MOMENTOS

MOMENTO LINEAL

Momento lineal o cantidad de movimiento $\vec{p}$. Definimos *momento lineal* o *cantidad de movimiento* $\vec{p}$ de una partícula como el producto de su masa por su vector velocidad. Es una magnitud vectorial instantánea y se mide en kg·m·s^{-1} en el SI.

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{p}_i = m\vec{v}_i \\ \vec{p} = m\vec{v}\end{gathered}}$$

Momento lineal y segunda ley de Newton. La segunda ley de Newton se puede reescribir así: en un sistema de referencia inercial la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es igual a la rapidez con que varía la cantidad de movimiento de dicha partícula respecto del tiempo.

$$\boxed{\vec{F}_{tot} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

Demostración. Este curso sólo consideramos partículas de masa constante, por lo que:

$$\vec{F}_{tot} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \blacksquare$$

Ley de conservación del momento lineal. La ley de conservación del momento lineal se desprende inmediatamente de la 2LN y dice: mientras la fuerza resultante aplicada sobre una partícula sea nula, el momento lineal de la partícula permanecerá constante:

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{F}_{tot} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{p} = cte \\ \vec{F}_{tot} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{p}_i = \vec{p}_f\end{gathered}}$$

Demostración. Como $\vec{F}_{tot} = \vec{0}$, por 2LN tenemos $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$. Luego $\vec{p}(t) = cte$. $\blacksquare$

Impulso mecánico $\vec{I}$. Llamamos *impulso mecánico* $\vec{I}$ de una partícula entre los instantes $t_i \ y \ t_f$ a la variación del momento lineal de la partícula entre dichos instantes. Es una magnitud vectorial que depende de dos instantes y se mide en kg·m·s^{-1}.

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{I}_{(i,f)} = \vec{p}_f - \vec{p}_i \\ \vec{I} = \Delta\vec{p}\end{gathered}}$$

Se verifica lo siguiente: si la fuerza resultante aplicada sobre una partícula es constante entre $t_i \ y \ t_f$, entonces el impulso mecánico de la partícula entre los instantes $t_i \ y \ t_f$ es igual a la resultante $\vec{F}_{tot}$ multiplicada por el intervalo de tiempo $\Delta t = t_f - t_i$:

$$\boxed{\vec{F}_{tot} = cte \ \Longrightarrow \vec{I} = \vec{F}_{tot}\Delta t}$$

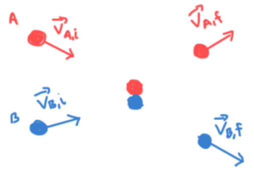
Demostración. Como $\vec{F}_{tot} = cte$ entre $t_i \ y \ t_f$, entonces en la expresión $\vec{F}_{tot} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ podemos cambiar la derivada por los incrementos siendo $\Delta t = t_f - t_i$. Esto es, $\vec{F}_{tot} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$. Luego, $\vec{I} = \Delta\vec{p} = \vec{F}_{tot}\Delta t$. $\blacksquare$

Momento lineal de un sistema de dos partículas. Llamamos *momento lineal* o *cantidad de movimiento* de un sistema de dos partículas, y lo denotamos $\vec{p}_{sist}$, a la suma de los momentos lineales de las dos partículas del sistema. Así, si el sistema está formado por las partículas A y B:

$$\boxed{\vec{p}_{sist} = \vec{p}_A + \vec{p}_B}$$

Choque de dos cuerpos. Cuando choquen dos cuerpos A y B, consideraremos el sistema formado por estos dos cuerpos y llamaremos instante t_- al instante justo anterior al choque e instante t_+ al instante justo posterior al choque. Estos instantes son tan próximos que podemos considerar que las fuerzas exteriores al sistema no tienen tiempo de modificar el momento lineal del sistema, por lo que el momento lineal del sistema justo antes del choque es igual al momento lineal del sistema justo después del choque. Así en un choque cualquiera de dos cuerpos siempre se cumplen las siguientes las ecuaciones escalares:

$$\boxed{\begin{gathered}Choque\ general: \\ \begin{cases} m_A v_{xA_-} + m_B v_{xB_-} = m_A v_{xA_+} + m_B \ v_{xB_+} \\ m_A v_{yA_-} + m_B v_{yB_-} = m_A v_{yA_+} + m_B \ v_{yB_+} \end{cases}\end{gathered}}$$



Decimos que un choque de dos cuerpos es *elástico* si la energía cinética del sistema justo antes del choque es igual a la energía cinética del sistema justo después del choque. En caso contrario diremos que el choque es *inelástico*; en esta situación, la pérdida de energía cinética del sistema se debe a que parte de esa energía se transforma en calor. Así, las ecuaciones escalares de un choque elástico son:

$$\begin{gathered}Choque\ elástico: \\ \begin{cases} m_A v_{xA_-} + m_B v_{xB_-} = m_A v_{xA_+} + m_B\, v_{xB_+} \\ m_A v_{yA_-} + m_B v_{yB_-} = m_A v_{yA_+} + m_B\, v_{yB_+} \\ m_A v_{A_-}^2 + m_B v_{B_-}^2 = m_A v_{A_+}^2 + m_B v_{B_+}^2 \end{cases}\end{gathered}$$

Decimos que un choque de dos cuerpos es *perfectamente inelástico* si después del choque ambos cuerpos permanecen unidos; esto es $\vec{v}_{A_+} = \vec{v}_{B_+} \equiv \vec{v}_+$.
Así, las ecuaciones escalares de un choque perfectamente inelástico quedan:

$$\begin{gathered}Choque\ perfectamente\ inelástico: \\ \begin{cases} m_A v_{xA_-} + m_B v_{xB_-} = (m_A + m_B) v_{x_+} \\ m_A v_{yA_-} + m_B v_{yB_-} = (m_A + m_B) v_{y_+} \end{cases}\end{gathered}$$

MOMENTO ANGULAR

Momento de un vector respecto de un punto. Definimos *momento del vector fijo* $\vec{w}$ (que está aplicado en el punto P) respecto de un punto O cualquiera como una magnitud escalar con signo que denotaremos $M_{\vec{w},O}$ y que cumple:

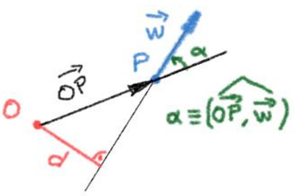
Valor absoluto de $M_{\vec{w},O}$. Es el producto del módulo de $\vec{w}$ por la distancia d que hay desde el punto O hasta la recta que contiene a $\vec{w}$.

Signo de $M_{\vec{w},O}$. Positivo si el giro de $\vec{w}$ alrededor de O es antihorario y negativo si el giro de $\vec{w}$ alrededor de O es horario.

Las siguientes dos fórmulas son útiles para calcular el momento de un vector. Se deja como ejercicio probar la segunda fórmula a partir de la primera:

$$M_{\vec{w},O} = \begin{cases} +|\vec{w}| \cdot d & si\ giro\ antihorario \\ -|\vec{w}| \cdot d & si\ giro\ horario \end{cases}$$

$$M_{\vec{w},O} = \left|\overrightarrow{OP}\right| \cdot |\vec{w}| \cdot sen(\widehat{\overrightarrow{OP}, \vec{w}})_z$$



Donde $(\widehat{\overrightarrow{OP}, \vec{w}})_z$ es el ángulo medido en sentido antihorario que va desde $\overrightarrow{OP}$ hasta $\vec{w}$ (poniendo ambos vectores con el mismo origen). Notar que si los vectores $\overrightarrow{OP}$ y $\vec{w}$ tienen la misma dirección, entonces el momento $M_{\vec{w},O}$ será nulo, pues $d = 0$ o, equivalentemente, $sen(\widehat{\overrightarrow{OP}, \vec{w}})_z = 0$.

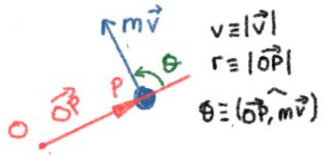
Aclaraciones.
Cuando en un ángulo pongamos el subíndice z queremos decir que el ángulo debe medirse en sentido antihorario (consideraremos el ángulo negativo si lo medimos en sentido horario).

Notar que para definir el momento de un vector respecto de un punto no hemos necesitado ningunos ejes x e y, por lo que el momento de un vector tiene un significado intrínseco. Aun así, a partir de ahora, siempre tomaremos momentos respecto del origen por aliviar la notación.

El curso que viene estudiaréis que el momento de un vector no es un escalar con signo, sino un vector. Lo correcto es lo del año que viene; sin embargo, para resolver problemas en el plano con lo que hemos dicho aquí es más que suficiente.

Momento angular o momento cinético L. Llamamos *momento angular* o *momento cinético* L de una partícula respecto del origen O al momento del vector cantidad de movimiento de dicha partícula (que está aplicado en el punto donde se encuentra la partícula) respecto del origen O. Este curso será una magnitud escalar con signo instantánea que se mide en kg·m²/s en el SI.

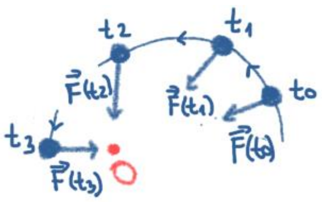
A partir de la definición anterior se puede probar que el momento angular es igual al producto de: (1) la masa m de la partícula, por (2) la distancia r de la partícula al origen, por (3) la celeridad v de la partícula, por (4) el seno del ángulo θ_z medido en sentido antihorario que va desde el vector de posición hasta el vector velocidad (poniendo ambos vectores con el mismo origen).



$$\begin{gathered} L_i = m \cdot r_i \cdot v_i \cdot sen(\theta_{z,i}) \\ L = m \cdot r \cdot v \cdot sen(\theta_z) \end{gathered}$$

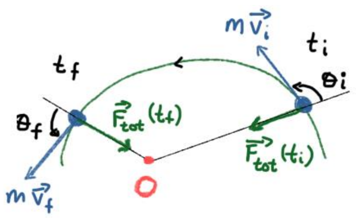
Demostración.
$L = \left|\overrightarrow{OP}\right| \cdot |m\vec{v}| \cdot sen(\widehat{\overrightarrow{OP}, \vec{w}})_z =$
$= |\vec{r}| \cdot |m\vec{v}| \cdot sen(\theta_z) = m \cdot r \cdot v \cdot sen(\theta_z)$. ■

Fuerza central. Decimos que una fuerza es *central* por un punto fijo O cuando la recta que contiene a dicha fuerza pasa en todo instante por ese punto fijo O. Esto es, a lo largo del tiempo, una fuerza central puede cambiar de módulo, de dirección, de sentido y de recta que la contiene, pero en todo instante dicha recta (que puede cambiar) debe contener al punto O.



Propiedades de las fuerzas centrales. Se verifica lo siguiente, que no probaremos: si la fuerza total aplicada a una partícula es una fuerza central por el origen, entonces se conserva el momento angular de la partícula respecto del origen.

$$\boxed{\begin{array}{c} \vec{F}_{tot}\ \text{central} \Longrightarrow L_i = L_f \\ \vec{F}_{tot}\ \text{central} \Longrightarrow L = cte \end{array}}$$



También se verifica lo siguiente, que no probaremos: si la fuerza total aplicada a una partícula es una fuerza central por el origen, entonces dicha partícula sigue un movimiento plano; dicho plano contiene al origen y a la recta de la fuerza total en todo instante.

$$\boxed{\vec{F}_{tot}\ \text{central} \Longrightarrow MP}$$

Todo esto de las fuerzas centrales será de aplicación en la sección siguiente.

Estrategias para problemas de choques. En un problema de choque tenemos que tener claro:

(1) ¿Es un choque contenido en una recta o no? Si es rectilíneo, la conservación del momento lineal solo nos da una ecuación escalar. Si es plano, tendremos las dos ecuaciones escalares: la del eje x y la del eje y.

(2) ¿Qué tipo de choque es? Choque ‘sin más’, choque elástico o choque totalmente inelástico. Usaremos las ecuaciones correspondientes al tipo de choque.

Debemos intentar que aparezcan la menor cantidad de incógnitas posibles. Por ejemplo, si nos dicen que después del choque la partícula A sale con una inclinación de +30° respecto del eje x, entonces en vez de usar v_{xA_+} y v_{yA_+} (dos incógnitas) usaremos $v_{xA_+} = v_{A_+} cos30$ y $v_{yA_+} = v_{A_+} sen30$ (una incógnita v_{A_+}).

EJEMPLOS RESUELTOS

Ejemplo 1. Una partícula de 3 kg de masa se mueve en el instante t_A = 2s con una velocidad $\vec{v}_A = 8\vec{\imath} + 10\vec{\jmath}$ (m/s) y en el instante t_B = 6s con una velocidad $\vec{v}_B = 12\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$ (m/s). Se pide:

a) Momento lineal de la partícula en el instante t_A y en el instante t_B.

b) Impulso mecánico de la partícula entre los instantes t_A y t_B.

c) Resultante media aplicada sobre la partícula entre los instantes t_A y t_B.

d) Justificar si la resultante anterior debe ser la resultante real aplicada sobre la partícula.

Solución

Datos: $m = 3kg$; $t_A = 2s$; $\vec{v}_A = 8\vec{\imath} + 10\vec{\jmath}$ (m/s)
$t_B = 6s$; $\vec{v}_B = 12\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$ (m/s).

a) ¿$\vec{p}_A$ y $\vec{p}_B$?

$$\vec{p} = m\vec{v} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \vec{p}_A = m\vec{v}_A = 3\cdot(8\vec{\imath} + 10\vec{\jmath}) = 24\vec{\imath} + 30\vec{\jmath}\left(\frac{kg\cdot m}{s}\right) \\ \vec{p}_B = m\vec{v}_B = 3\cdot(12\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}) = 36\vec{\imath} - 12\vec{\jmath}\left(\frac{kg\cdot m}{s}\right) \end{array}}$$

b) ¿$\vec{I}(t_A, t_B)$?

$$\boxed{\vec{I}(t_A, t_B)} = \Delta\vec{p}(t_A, t_B) = \vec{p}_B - \vec{p}_A =$$
$$= (24\vec{\imath} + 30\vec{\jmath}) - (36\vec{\imath} - 12\vec{\jmath}) =$$
$$= (24-36)\vec{\imath} + (30-(-12))\vec{\jmath} = \boxed{-12\vec{\imath} + 42\vec{\jmath}\left(\frac{Kg\cdot m}{s}\right)}$$

c) ¿$\vec{F}_{tot\,media}(t_A, t_B)$?

$$\vec{F}_{tot} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \vec{F}_{tot\,media} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{\vec{I}}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{\vec{F}_{tot\,media} = \frac{\vec{I}}{\Delta t}}$$

$$\boxed{\vec{F}_{tot\,media}(t_A, t_B)} = \frac{\vec{I}(t_A, t_B)}{t_B - t_A} = \frac{-12\vec{\imath} + 42\vec{\jmath}}{6-2} = \boxed{-3\vec{\imath} + 10{,}5\vec{\jmath}\ (N)}$$

d) ¿$\vec{F}_{tot}(t) = \vec{F}_{tot\,media}$?

La respuesta es NO, pues no nos dice que la fuerza total haya sido constante entre los instantes 2s y 6s, lo que significa que la fuerza total puede haber tenido distintos valores entre 2s y 6s.

Ejemplo 2. Una pelota de golf de 40 g se lanza desde el suelo a una velocidad de 50 m/s, con una inclinación de 35° sobre la horizontal. Una ráfaga de viento ejerce sobre la pelota una fuerza horizontal hacia la derecha de 0,3 N. ¿Qué impulso mecánico recibe la pelota desde el instante inicial hasta los 2 s?

Solución

Datos: $m=0{,}040\,kg$; $v_0=50\,m/s$; $\alpha=35°$; $\vec{F}_v=0{,}3\vec{i}\,N$

¿ $\vec{I}(0s,2s)$? $t_2 \equiv 2s$

La definición de $\vec{I}=\Delta\vec{p}=\vec{p}_f-\vec{p}_i=m\vec{v}_f-m\vec{v}_i$.

En nuestro caso: $\vec{I}(0s,2s)=m\vec{v}_2-m\vec{v}_0$. Sin embargo no vamos a calcularlo así, pues desconocemos $\vec{v}_2$ ($\vec{v}_0$ sería $\vec{v}_0=v_0\cos\alpha\,\vec{i}+v_0\,\text{sen}\,\alpha\,\vec{j}$). Veamos que la fuerza total es constante:

F_v $\quad \vec{F}_{tot}=F_v\vec{i}-mg\vec{j}=0{,}3\vec{i}-0{,}392\vec{j}\,(N)=cte.$

mg $\quad \vec{F}_{tot}=cte \Rightarrow \vec{F}_{tot}=\dfrac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}=\dfrac{\vec{I}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{I}=\vec{F}_{tot}\cdot\Delta t$

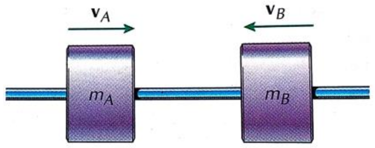
Así $\boxed{\vec{F}_{tot}=cte \Rightarrow \vec{I}=\vec{F}_{tot}\,\Delta t}$ Esta es la que usaremos.

$$\boxed{\vec{I}(0s,2s)}=\vec{F}_{tot}\cdot(2s-0s)=(0{,}3\vec{i}-0{,}392\vec{j})\cdot 2=$$
$$=\boxed{0{,}6\vec{i}-0{,}784\vec{j}\ \left(\tfrac{kg\cdot m}{s}\right)}$$

Ejemplo 3. El bloque *A* de 8 kg se mueve hacia la derecha con una velocidad de 6 m/s, impactando sobre el bloque *B* de 5 kg que se mueve hacia la izquierda con una velocidad de 12 m/s. Se pide calcular la velocidad final de los dos bloques en los siguientes casos:

a) La velocidad del bloque *A* después del choque es de 3 m/s hacia la izquierda.
b) El choque es perfectamente inelástico.
c) El choque es elástico.

El apartado c) es *.



Solución

Datos: $m_A=8\,kg$; $v_{A-}=+6\,m/s$; $m_B=5\,kg$; $v_{B-}=-12\,m/s$

Para aligerar la notación respecto a la de teoría considero: $v_{A-}\equiv v^A_{x-}$; $v_{B-}\equiv v^B_{x-}$; $v_{A+}\equiv v^A_{x+}$; $v_{B+}\equiv v^B_{x+}$

Este es un problema rectilíneo por lo que no usaremos el eje y.

Recordamos que en un choque se conserva el momento lineal del sistema; esto es, el momento lineal del sistema antes del choque es igual al momento lineal del sistema después del choque. Como estamos ante un problema rectilíneo queda:

$$\boxed{m_Av_{A-}+m_Bv_{B-}=m_Av_{A+}+m_Bv_{B+}}$$

La anterior ecuación debe cumplirse para cualquier choque rectilíneo; por tanto, también para los choques perfectamente inelásticos y para los choques elásticos.

Recordamos que choque perfectamente inelástico significa que después del choque ambos cuerpos quedan "enganchados", es decir, después del choque tienen la misma velocidad. Esto simplifica la ecuación de conservación del momento lineal que quedará: $\boxed{m_Av_{A-}+m_Bv_{B-}=(m_A+m_B)v_+}$

Recordamos que choque elástico significa que la energía cinética del sistema antes del choque es igual a la energía cinética del sistema después del choque. Esto añade una ecuación más, quedando:

$$\boxed{\begin{array}{l} m_Av_{A-}+m_Bv_{B-}=m_Av_{A+}+m_Bv_{B+} \\ \frac{1}{2}m_A(v_{A-})^2+\frac{1}{2}m_B(v_{B-})^2=\frac{1}{2}m_A(v_{A+})^2+\frac{1}{2}m_B(v_{B+})^2 \end{array}}$$

a) ¿v_{A+} y v_{B+} si $v_{A+}=-3\,m/s$?

$\boxed{v_{A+}=-3\,m/s}$

$(p_{sist,x}=cte)$: $m_Av_{A-}+m_Bv_{B-}=m_Av_{A+}+m_Bv_{B+} \Rightarrow$

$8\cdot6+5\cdot(-12)=8\cdot(-3)+5v_{B+} \Rightarrow$

$\boxed{v_{B+}}=\dfrac{8\cdot6-5\cdot12+8\cdot3}{5}=\boxed{+2{,}4\,m/s}$

b) ¿v_{A+} y v_{B+} si $v_{A+}=v_{B+}\equiv v_+$?

$(p_{sist,x}=cte)$: $m_Av_{A-}+m_Bv_{B-}=(m_A+m_B)v_+ \Rightarrow$

$8\cdot6+5\cdot(-12)=(8+5)v_+ \Rightarrow v_+=\dfrac{8\cdot6+5\cdot(-12)}{13}$

$\boxed{v_+=-0{,}923\,m/s}$

c) ¿v_{A+} y v_{B+} si $E_{c,sist-}=E_{c,sist+}$?

$(p_{sist,x}=cte)$: $m_Av_{A-}+m_Bv_{B-}=m_Av_{A+}+m_Bv_{B+}$ (1)

$(E_{c\,sist}=cte)$: $m_Av_{A-}^2+m_Bv_{B-}^2=m_Av_{A+}^2+m_Bv_{B+}^2$ (2)

(1): $8\cdot6+5\cdot(-12)=8\cdot v_{A+}+5v_{B+} \Rightarrow$

$v_{A+}=\dfrac{-12-5v_{B+}}{8} \Rightarrow v_{A+}=-1{,}5-0{,}625v_{B+}$ (1')

(2): $8\cdot6^2+5(-12)^2=8v_{A+}^2+5v_{B+}^2 \Rightarrow$

$1008=8v_{A+}^2+5v_{B+}^2 \Rightarrow$

$1008=8(-1{,}5-0{,}625v_{B+})^2+5v_{B+}^2 \Rightarrow$

$1008=8\cdot(2{,}25+1{,}875v_{B+}+0{,}391v_{B+}^2)+5v_{B+}^2 \Rightarrow$

$1008=18+15\cdot v_{B+}+3{,}125v_{B+}^2+5v_{B+}^2 \Rightarrow$

$8{,}125v_{B+}^2+15v_{B+}-990=0 \Rightarrow v_{B+}=\dfrac{-15\pm180}{16{,}25}$

$v_{B+}=\left\{\begin{array}{l}+10{,}15\,m/s \\ -12\,m/s\end{array}\right\} \Rightarrow v_{A+}=-1{,}5-0{,}625v_{B+} \Rightarrow$

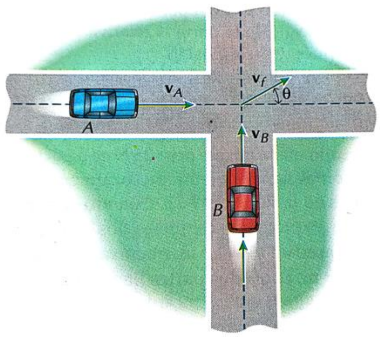
$v_{A+}=\left\{\begin{array}{l}-7{,}84\,m/s \\ +6\,m/s\end{array}\right\} \Rightarrow$ Hay dos soluciones:

($v_{A+}=-7{,}84\,m/s$; $v_{B+}=+10{,}15\,m/s$) y ($v_{A+}=+6\,m/s$; $v_{B+}=-12\,m/s$). La segunda es imposible porque significaría que después del choque A sigue moviéndose a la derecha y B a la izquierda.

$\boxed{v_{A+}=-7{,}84\,m/s\ ;\ v_{B+}=+10{,}15\,m/s}$

Ejemplo 4*. Dos automóviles chocan en un cruce, según indica la figura. El coche *A* de 1100 kg tiene una celeridad inicial de 24 km/h, mientras que el coche *B* de 1750 kg tiene una celeridad inicial de 40 km/h. Si los autos quedan enganchados y se mueven conjuntamente después del choque, se pide:

a) Celeridad conjunta v_f después del choque.
b) Ángulo θ después del choque.



Solución

Datos: $m_A = 1100\,kg$; $v_{A-} = 24\frac{km}{h} = 6{,}67\,m/s$

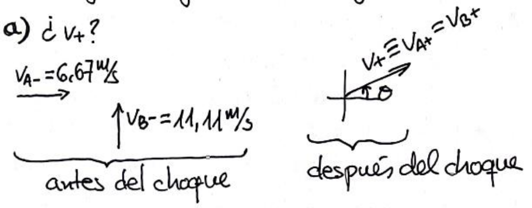
$m_B = 1750\,kg$; $v_{B-} = 40\,km/h = 11{,}11\,m/s$

Choque perfectamente inelástico: $\vec{v}_{A+} = \vec{v}_{B+} \equiv \vec{v}_+$

Recordamos que en cualquier choque plano se verifica:
$$\left\{\begin{array}{l} m_A v_{xA-} + m_B v_{xB-} = m_A v_{xA+} + m_B v_{xB+} \\ m_A v_{yA-} + m_B v_{yB-} = m_A v_{yA+} + m_B v_{yB+} \end{array}\right\}$$

Si el choque es perfectamente inelástico, como en este problema, se verifica que $\left\{\begin{array}{l} v_{xA+} = v_{xB+} \equiv v_{x+} \\ v_{yA+} = v_{yB+} \equiv v_{y+} \end{array}\right\}$ con lo que las ecs. quedan:
$$\left\{\begin{array}{l} m_A v_{xA-} + m_B v_{xB-} = (m_A + m_B)\, v_{x+} \\ m_A v_{yA-} + m_B v_{yB-} = (m_A + m_B)\, v_{y+} \end{array}\right\}$$

a) ¿v_+?



$(p_{sist,x} = cte)$: $1100 \cdot 6{,}67 + \cancel{1750 \cdot 0} = (1100 + 1750)\, v_{x+}$ (1)

$(p_{sist,y} = cte)$: $\cancel{1100 \cdot 0} + 1750 \cdot 11{,}11 = (1100 + 1750)\, v_{y+}$ (2)

(1): $v_{x+} = \dfrac{1100 \cdot 6{,}67}{1100 + 1750} = 2{,}57\,m/s$

(2): $v_{y+} = \dfrac{1750 \cdot 11{,}11}{1100 + 1750} = 6{,}82\,m/s$

$$\boxed{v_+ = \sqrt{v_{x+}^2 + v_{y+}^2}} = \sqrt{2{,}57^2 + 6{,}82^2} = \boxed{7{,}29\,m/s}$$

b) ¿θ?

$$tg\,\theta = \frac{v_{y+}}{v_{x+}} = \frac{6{,}82}{2{,}57} \Rightarrow \boxed{\theta = 69{,}35^\circ}$$

Ejemplo 5*. Sobre un tapete horizontal que será nuestro plano x-y, una bola de billar *A* con velocidad 2 m/s en dirección y sentido del eje x colisiona con otra bola *B* de igual masa que estaba en reposo sobre el tapete. Se pide la velocidad (vector) de ambas bolas después del choque en los siguientes casos:

a) Tras la colisión, la bola *A* se desvía 20° del eje x con componente y positiva, mientras que la bola *B* se desvía 40° del eje x.
b) Tras la colisión ambas bolas permanecen unidas.
c) La colisión es elástica y, tras ella, la esfera *A* se desvía 30°, con componente y negativa.

Solución

Datos: $v_{A-} = 2\,m/s$; $v_{B-} = 0\,m/s$; $m_A = m_B \equiv m$

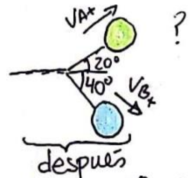
Recordamos que en cualquier choque plano se verifica:
$$\left\{\begin{array}{l} m_A v_{xA-} + m_B v_{xB-} = m_A v_{xA+} + m_B v_{xB+} \\ m_A v_{yA-} + m_B v_{yB-} = m_A v_{yA+} + m_B v_{yB+} \end{array}\right\}$$

Cuando el choque sea perfectamente inelástico, se tiene que la velocidad de las dos bolas después del choque es la misma; esto es, $v_{xA+} = v_{xB+} \equiv v_{x+}$ y $v_{yA+} = v_{yB+} \equiv v_{y+}$. Por tanto, las ecuaciones quedan:
$$\left\{\begin{array}{l} m_A v_{xA-} + m_B v_{xB-} = (m_A + m_B)\, v_{x+} \\ m_A v_{yA-} + m_B v_{yB-} = (m_A + m_B)\, v_{y+} \end{array}\right\}$$

Cuando el choque sea elástico, se tiene que la suma de las energías cinéticas de las dos bolas antes del choque es igual a la suma de las energías cinéticas de las dos bolas después del choque, por lo que se añade una ecuación más:
$$\left\{\begin{array}{l} m_A v_{xA-} + m_B v_{xB-} = m_A v_{xA+} + m_B v_{xB+} \\ m_A v_{yA-} + m_B v_{yB-} = m_A v_{yA+} + m_B v_{yB+} \\ \cancel{\tfrac{1}{2}} m_A v_{A-}^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}} m_B v_{B-}^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}} m_A v_{A+}^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}} m_B v_{B+}^2 \end{array}\right\}$$

Obviamente si el choque no es elástico la energía cinética del sistema después del choque es menor que la energía cinética del sistema antes del choque. Esta pérdida de energía cinética se transforma en calor.

a) ¿$\vec{v}_{A+}$ y $\vec{v}_{B+}$ si $v_{A-} = 2\,m/s$ $v_{B-} = 0$



$(p_{sist,x} = cte)$: $\cancel{m} \cdot 2 + \cancel{m} \cdot 0 = \cancel{m}\, v_{A+} \cos 20^\circ + \cancel{m}\, v_{B+} \cos 40^\circ$ (1)

$(p_{sist,y} = cte)$: $\cancel{m} \cdot 0 + \cancel{m} \cdot 0 = \cancel{m}\, v_{A+}\, sen 20^\circ - \cancel{m}\, v_{B+}\, sen 40^\circ$ (2)

(2): $v_{B+} = \dfrac{v_{A+}\, sen 20^\circ}{sen 40^\circ}$

(1): $2 = v_{A+} \cos 20^\circ + \dfrac{v_{A+}\, sen 20^\circ}{sen 40^\circ} \cos 40^\circ \Rightarrow$

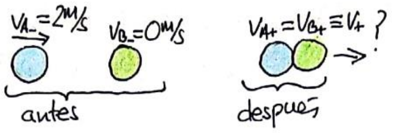
(1): $2 = v_{A+}\cos 20° + \frac{v_{A+}\,\text{sen}20°}{\text{sen}40°}\cos 40° \Rightarrow$

$$v_{A+} = \frac{2}{\cos 20° + \frac{\text{sen}20°\cos 40°}{\text{sen}40°}} = 1{,}48\ m/s$$

$$v_{B+} = \frac{v_{A+}\,\text{sen}20°}{\text{sen}40°} = \frac{1{,}48\cdot \text{sen}20°}{\text{sen}40°} = 0{,}79\ m/s$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec v_{A+} = (v_{A+}\cos20°,\ v_{A+}\text{sen}20°) = (1{,}39,\ 0{,}51)\ m/s \\ \vec v_{B+} = (v_{B+}\cos40°,\ -v_{B+}\text{sen}40°) = (0{,}61,\ -0{,}51)\ m/s\end{array}}$$

b) ¿$\vec v_{A+}$ y $\vec v_{B+}$ si



(psist,x=cte): $m\cdot 2 + m\cdot 0 = (m+m)v_{x+}$ (1)

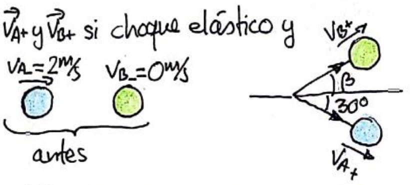
(psist,y=cte): $m\cdot 0 + m\cdot 0 = (m+m)v_{y+}$ (2)

(1): $2m = 2m v_{x+} \Rightarrow v_{x+} = 1\ m/s$

(2): $0 = 2m v_{y+} \Rightarrow v_{y+} = 0\ m/s$

$\boxed{\vec v_{A+} = \vec v_{B+} = (1,\ 0)\ m/s} = 1\vec i\ m/s$

c) ¿$\vec v_{A+}$ y $\vec v_{B+}$ si choque elástico y ?



(psist,x=cte): $\cancel{m}\cdot2 + \cancel{m}\cdot 0 = \cancel{m} v_{A+}\cos30° + \cancel{m} v_{B+}\cos\beta$ (1)

(psist,y=cte): $\cancel{m}\cdot0 + \cancel{m}\cdot0 = -\cancel{m} v_{A+}\text{sen}30° + \cancel{m} v_{B+}\text{sen}\beta$ (2)

(Ec,sist=cte): $\cancel{\tfrac12} \cancel{m}\, 2^2 + \cancel{\tfrac12} \cancel{m}\cdot 0^2 = \cancel{\tfrac12} \cancel{m}\, v_{A+}^2 + \cancel{\tfrac12} \cancel{m}\, v_{B+}^2$ (3)

(1): $v_{A+}\cos30° + v_{B+}\cos\beta = 2$ (1')

(2): $-v_{A+}\text{sen}30° + v_{B+}\text{sen}\beta = 0$ (2')

(3): $v_{A+}^2 + v_{B+}^2 = 4$ (3')

(1'): $v_{B+}\cos\beta = 2 - v_{A+}\cos30°$

(2'): $v_{B+}\text{sen}\beta = v_{A+}\text{sen}30°$ $\Rightarrow$ (1')^2+(2')^2 $\Rightarrow$

$$v_{B+}^2\cos^2\beta + v_{B+}^2\text{sen}^2\beta = 4 - 4v_{A+}\cos30° + v_{A+}^2\cos^2 30° + v_{A+}^2\text{sen}^2 30°$$

$$v_{B+}^2 = 4 - 4v_{A+}\cos30° + v_{A+}^2 \quad (4)$$

(3') y (4): $v_{A+}^2 + (4 - 4v_{A+}\cos30° + v_{A+}^2) = 4 \Rightarrow$

$2v_{A+}^2 - 4v_{A+}\cos30° = 0 \Rightarrow v_{A+} = \begin{cases} 0 \text{ imposible, pues se mueve} \\ 1{,}73\ m/s \end{cases}$

$v_{A+} = 1{,}73\ m/s$

(3'): $v_{B+} = \sqrt{4 - v_{A+}^2} = \sqrt{4-1{,}73^2} = 1\ m/s$

(2'): $\text{sen}\beta = \frac{v_{A+}\,\text{sen}30°}{v_{B+}} = \frac{1{,}73\cdot\text{sen}30°}{1} = 0{,}865 \Rightarrow \beta = 60°$

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec v_{A+} = (v_{A+}\cos30°,\ -v_{A+}\text{sen}30°) = (1{,}5,\ -0{,}865)\ m/s \\ \vec v_{B+} = (v_{B+}\cos\beta,\ v_{B+}\text{sen}\beta) = (0{,}5,\ 0{,}866)\ m/s\end{array}}$$

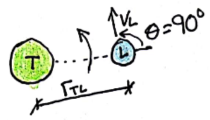
Ejemplo 6. La Luna tiene una masa de $7{,}35\cdot10^{22}$ kg y tarda 27,3 días en dar una vuelta alrededor de la Tierra, girando en sentido antihorario. La distancia del centro de la Tierra al centro de la Luna es $3{,}84\cdot10^{8}$ m. Calcular el momento angular de la Luna respecto a la Tierra.

Solución

Datos: $m_L = 7{,}35\cdot10^{22}$ kg; $T = 27{,}3$ días $= 2358720$ s

sentido antihorario; $r_{TL} = 3{,}84\cdot10^8$ m.

¿L_L?



Suponemos que el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra es MCU. Por tanto, θ=90°

$L_L = m_L r_{TL} v_L \,\text{sen}\theta$. Solo nos falta hallar la velocidad de la Luna, para lo que usaremos el periodo del movimiento.

$$v_L = r_{TL}\cdot\omega = r_{TL}\cdot\frac{2\pi}{T} = 3{,}84\cdot10^8\cdot\frac{2\pi}{2358720}$$

$v_L = 1022{,}9\ m/s$

$$L_L = m_L r_{TL} v_L\,\text{sen}\theta = (7{,}35\cdot10^{22})\cdot(3{,}84\cdot10^8)\cdot1022{,}9\cdot\text{sen}90°$$

$$\boxed{L_L = 2{,}887\cdot10^{34}\ \frac{kg\cdot m^2}{s}}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

4.1. Una partícula se mueve con momento lineal $10\vec{\jmath}$ kg·m/s y, tras una interacción con otra partícula que duró una centésima de segundo, su momento lineal pasa a ser $8\vec{\imath}+12\vec{\jmath}$ (kg·m/s). Despreciando el efecto de la gravedad durante la interacción, se pide:

a) Impulso mecánico que recibe la partícula en la interacción.
b) Módulo de la fuerza media que actuó sobre la partícula en la interacción.

Sol. a) $8\vec{\imath}+2\vec{\jmath}$ *(kg·m·s*$^{-1}$*); b)* $\overrightarrow{800\imath}+200\vec{\jmath}$ *(N).*

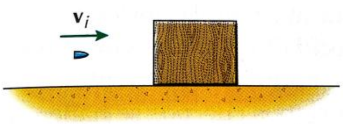
4.2. Tenemos una pistola de 1,4 kg cargada con una bala de 5 g. Al apretar el gatillo la bala sale con una celeridad de 120 m/s. ¿Con qué celeridad retrocede la pistola?

Sol. 0,43 m/s.

4.3. Una mujer de 60 kg y su hija de 35 kg están en reposo, cara a cara, en una pista de patinaje sobre hielo. Se empujan la una a la otra para desplazarse. Como consecuencia, la madre se mueve hacia atrás con una velocidad de 0,9 m/s. Suponiendo ausencia de rozamiento, ¿a qué distancia se encontrarán la una de la otra después de 5 s?

Sol. 12,2 m.

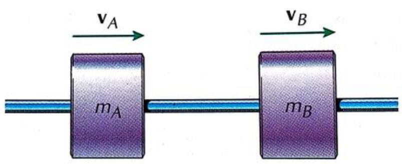
4.4. Un proyectil de 50 g y velocidad 200 m/s se empotra en un bloque de madera de 3 kg, que se encontraba en reposo sobre una superficie. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento entre el bloque de madera y el suelo es de 0,1, ¿qué distancia recorrerá el conjunto proyectil-bloque hasta que pare por completo?



Sol. 5,49 m.

4.5*. El bloque *A* de 4 kg se mueve hacia la derecha a 15 m/s. El bloque *B* de 10 kg también se mueve hacia la derecha con una velocidad de 7 m/s. Se pide la velocidad de los dos bloques después del impacto en los siguientes casos:

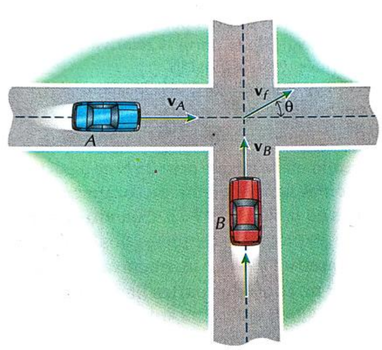
a) La velocidad del bloque *B* después del choque es de 10 m/s hacia la derecha.
b) El choque es perfectamente inelástico.
c) El choque es elástico.



Sol. a) 7,5 m/s (derecha) m_A *y 10 m/s (derecha)* m_B*;*
b) 9,29 m/s (derecha) ambos;
c) 3,57 m/s (derecha) m_A *y 11,57 m/s (derecha)* m_B*.*

4.6*. Dos automóviles chocan en un cruce, según indica la figura anterior. Al coche *A* tiene una masa de 1000 kg y una celeridad inicial de 45 km/h, mientras que el coche *B* tiene una masa de 1500 kg. Si los autos quedan enganchados y se mueven conjuntamente en la dirección θ = 30° después del choque, se pide:

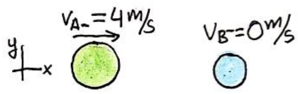
a) Celeridad conjunta v_f después del choque.
b) Celeridad del coche *B* antes del choque.



Sol. a) 5,77 m/s; b) 4,81 m/s.

4.7*. Sobre un tapete horizontal que será nuestro plano *x-y*, una bola de billar *A* de 500 g con velocidad 4 m/s en dirección y sentido del eje *x* colisiona con otra *B* de 300 g que estaba en reposo sobre el tapete. Se pide el vector velocidad de ambas bolas después del choque en los siguientes casos:

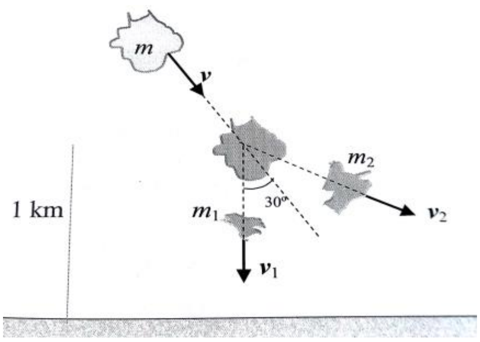
a) Después del choque la velocidad de *A* es de 2,5 m/s desviándose 30° del eje *x*, con componente *y* positiva.
b) El choque es perfectamente inelástico.
c) El choque es elástico y, tras él, la esfera *A* se mueve a una celeridad de 2 m/s, con componente y positiva.



Sol. Tomando la dirección y sentido usual de los ejes x e y:
a) $(2{,}17\vec{\imath}+1{,}25\vec{\jmath})$ *m/s,* $(3{,}06\vec{\imath}-2{,}08\vec{\jmath})$ *m/s;*
b) $2{,}5\vec{\imath}$ *m/s; c)* $(1{,}6\vec{\imath}+1{,}2\vec{\jmath})$ *m/s,* $(4\vec{\imath}-2\vec{\jmath})$ *m/s.*

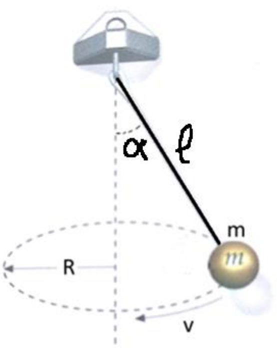
4.8*. Un meteorito (ver figura) de masa *m* = 90 kg se encuentra en cierto instante a 1 km de altura cayendo a *v* = 200 km/h de manera que la dirección de la caída forma con la vertical un ángulo α = 30°. En ese instante se fragmenta en dos rocas de masas m_1 y m_2 verificándose que $m_2 = 2m_1$. El fragmento menor cae verticalmente con una celeridad de 70 m/s. Se pide:

a) Vector velocidad de m_2 justo después de fragmentarse.
b) Separación entre ambas rocas al impactar con el suelo.



Sol. Tomando la dirección y sentido usual de los ejes x e y:
a) $(41{,}67\vec{\imath} - 37{,}17\vec{\jmath})$ *m/s;   b) 457,86 m.*

4.9. El péndulo de la figura describe un MCU en sentido horario. La longitud del hilo es l = 0,5 m, la masa de la bola es m = 0,4 kg, el ángulo que forma el hilo con la vertical es α = 30°. ¿Cuál es el momento angular de la partícula respecto de su centro de giro?



Sol. −0,119 kg·m²·s⁻¹.