

➤ Ejercicio 1

Determinar la gráfica, dominio y recorrido de la función:

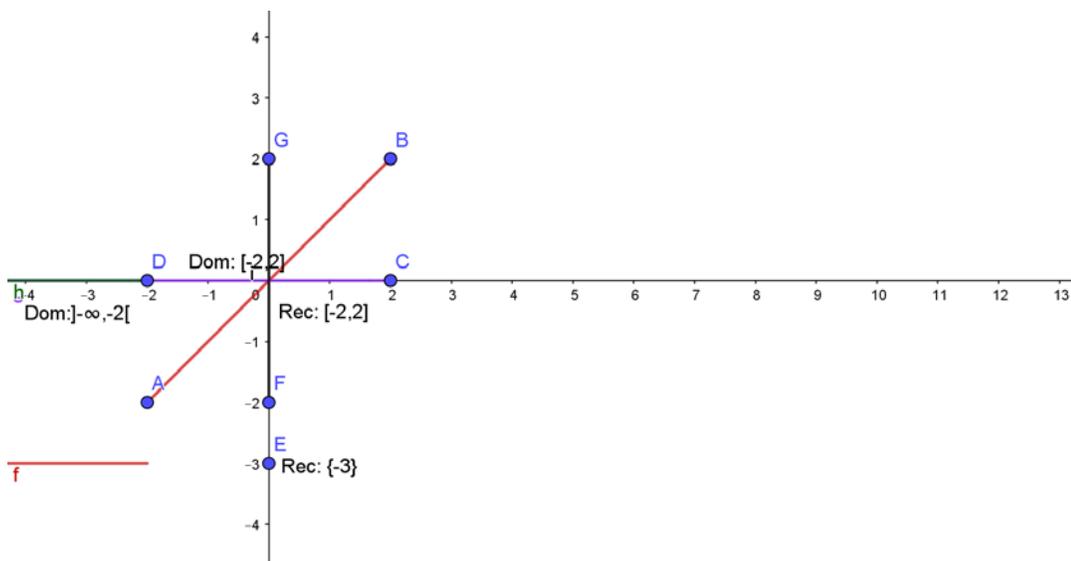
$$f(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } x < -2 \\ x & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Respuesta

Esta función está definida por trozos en los intervalos:

- $]-\infty, -2[$: $f(x) = -3$, cuya gráfica es un trozo de la función constante, recta paralela al eje X.
- $[-2, 2]$: $f(x) = x$, cuya gráfica es un trozo de la función lineal de pendiente $m = 1$ (función creciente) y coeficiente de posición $b = 0$.

Estas situaciones nos llevan a trazar la gráfica de la función dada:



de donde:

$$\text{Dom}(f(x)) =]-\infty, -2[\cup [-2, 2]$$

$$\text{Rec}(f(x)) = \{-3\} \cup [-2, 2]$$

➤ Ejercicio 2

Determinar la gráfica, dominio y recorrido de la función

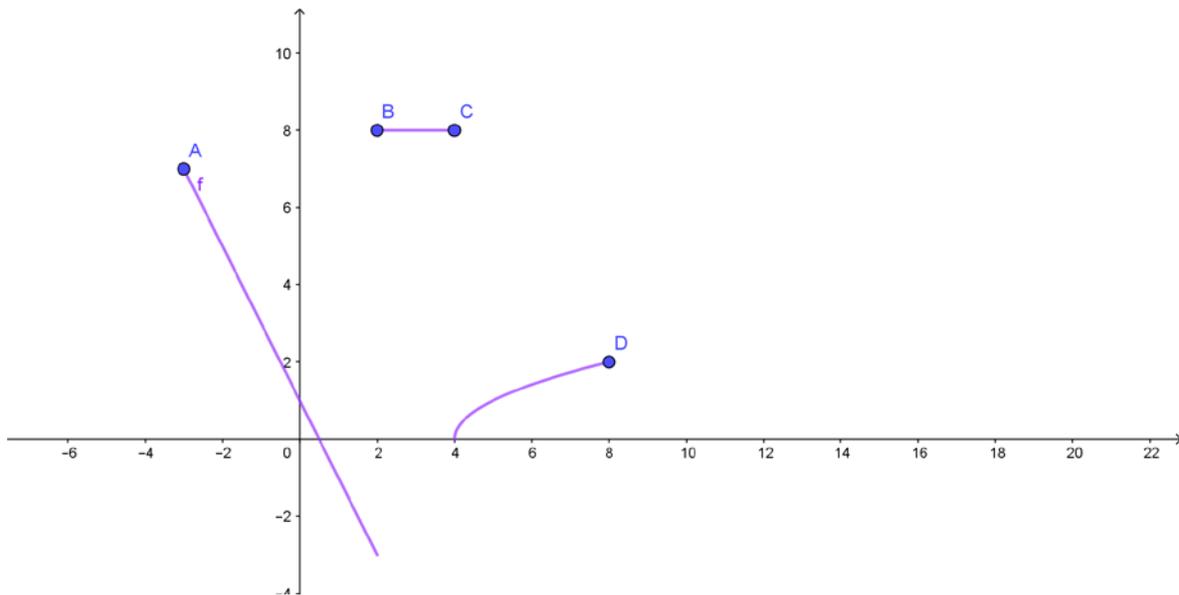
$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{si } -3 \leq x < 2 \\ 8 & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \\ \sqrt{x-4} & \text{si } 4 < x \leq 8 \end{cases}$$

Respuesta

Es una función definida por trozos, por lo cual en cada intervalo:

- $[-3, 2[$: $f(x) = -2x+1$, es un trozo de la gráfica de la función lineal de pendiente $m = -2$ (decreciente) y coeficiente de posición $b = 1$.
- $[2, 4]$: $f(x) = 8$, es un trozo de la gráfica de la función constante.
- $]4, 8]$: $f(x) = \sqrt{x-4}$, es un trozo de la función raíz cuadrada principal.

Por lo tanto, la gráfica de la función dada queda:



Por lo tanto:

$$\text{Dom}(f(x)) = [-3, 2[\cup [2, 4] \cup]4, 8]$$

$$\text{Rec}(f(x)) = \underbrace{]-3, 7] \cup]0, 2]}_{]-3, 7]} \cup \{8\}$$

$$\text{Rec}(f(x)) =]-3, 7] \cup \{8\}$$

➤ Ejercicio 3

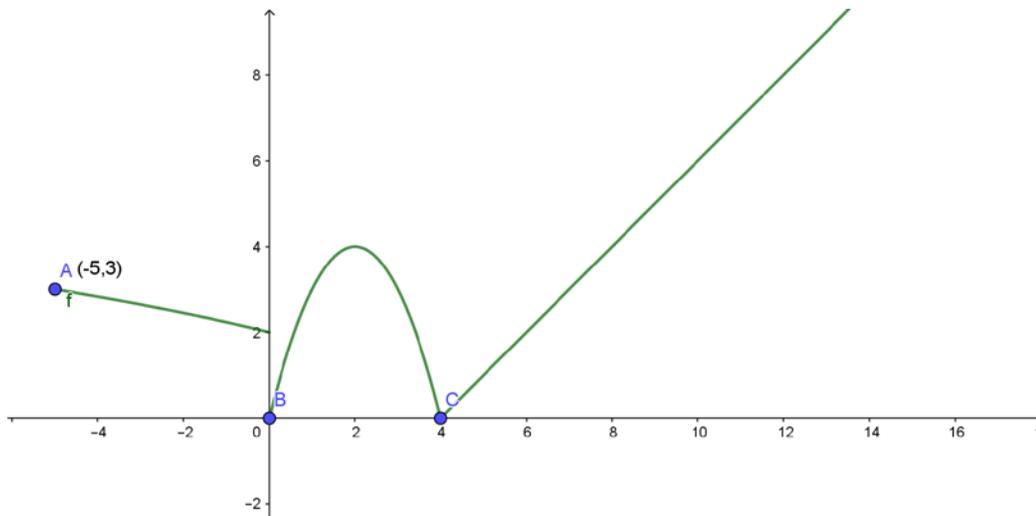
Determine la gráfica, dominio y recorrido de la función

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x} & \text{si } -5 \leq x < 0 \\ -x^2 + 4x & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ |x-4| & \text{si } 4 \leq x \end{cases}$$

Respuesta

- Intervalo: $[-5, 0[$, trozo de la función raíz cuadrada principal $f(x) = \sqrt{4-x}$ y como su dominio se obtiene de $4-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4$, entonces su dominio es en este intervalo: $[-5, 0[$.
- Intervalo: $[0, 4[$, trozo de la función cuadrática $f(x) = -x^2 + 4x$ cuyo dominio es \mathbb{R} , por lo que este intervalo es su dominio. Su vértice es $(2, 4)$.
- Intervalo: $[4, +\infty[$, trozo de la función valor absoluto $f(x) = |x-4|$ cuyo dominio es \mathbb{R} , por lo que este intervalo es su dominio.

Por lo tanto, su gráfica es:



obteniéndose:

$$\begin{aligned} \text{Dom}(f(x)) &= [-5, 0[\cup [0, 4[\cup [4, +\infty[\\ \text{Re } c(f(x)) &= \underbrace{]-2, 3] \cup [0, 4] \cup [0, +\infty[}_{[0, +\infty[} \\ \text{Re } c(f(x)) &= [0, +\infty[\end{aligned}$$

➤ **Ejercicio 4**

Calcular, si existe, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, si:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 8 & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{4 - 2x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Respuesta

Como se trata de una función por trozos, entonces la respuesta al cálculo de este límite es a través de los **límites laterales**.

En efecto:

a) Límite lateral por la izquierda:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 6x + 8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \stackrel{x=2}{=} 0$$

b) Límite lateral por la derecha:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{4 - 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \stackrel{x=2}{=} 0$$

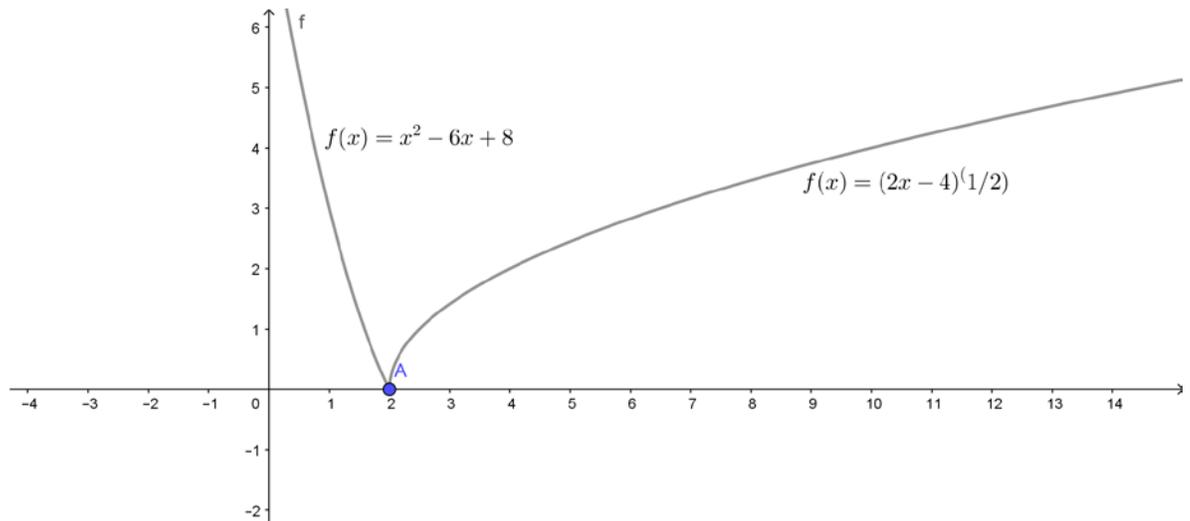
Por lo tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$$

y con ello:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0, \text{ existe.}$$

Por tratarse de una función a trozos de funciones conocidas, entonces mostraremos gráficamente este resultado obtenido:



➤ Ejercicio 5

Calcular, si existe, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, sabiendo que:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{si } x < 1 \\ \frac{\sqrt{2x - 1} - 1}{x^2 - 3x + 2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Respuesta

a) Límite Lateral por la izquierda:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{(x+1)(\cancel{x-1})}{\cancel{x-1}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \stackrel{x=1}{=} 2$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$$

b) Límite Lateral por la derecha:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{2x-1}-1}{x^2-3x+2} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{\sqrt{2x-1}-1}{(x-1)(x-2)} \cdot \frac{\sqrt{2x-1}+1}{\sqrt{2x-1}+1} \right] \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{2x-1-1}{(x-1)(x-2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2x-1}+1} \right] \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{2(\cancel{x-1})}{(\cancel{x-1})(x-2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2x-1}+1} \right] \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &\stackrel{x=1}{=} -1\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1.$$

Como los límites laterales resultaron **distintos**, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x), \text{ no existe.}$$

➤ Ejercicio 6

Calcular, si existe, $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ sabiendo que:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 7x - 6}{2x^3 - x^2 - 8x + 4} & \text{si } x < -2 \\ \frac{3}{32} \cdot \frac{\sqrt{1-4x}-3}{\sqrt{3+x}-1} & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

Respuesta

a) Límite Lateral por la izquierda:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^3 - 7x - 6}{2x^3 - x^2 - 8x + 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{\cancel{(x+2)}(x^2 - 2x - 3)}{\cancel{(x+2)}(2x^2 - 5x + 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \frac{1}{4}$$

b) Límite Lateral por la derecha:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \left[-\frac{3}{32} \cdot \frac{\sqrt{1-4x-3}}{\sqrt{3+x-1}} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\frac{3}{32} \cdot \lim_{x \rightarrow -2^+} \left[\frac{\sqrt{1-4x-3}}{\sqrt{3+x-1}} \cdot \frac{\sqrt{1-4x+3}}{\sqrt{3+x+1}} \cdot \frac{\sqrt{3+x+1}}{\sqrt{1-4x+3}} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\frac{3}{32} \cdot \lim_{x \rightarrow -2^+} \left[\frac{1-4x-9}{3+x-1} \cdot \frac{\sqrt{3+x+1}}{\sqrt{1-4x+3}} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\frac{3}{32} \cdot \lim_{x \rightarrow -2^+} \underbrace{\left[\frac{\cancel{-4(x+2)}}{\cancel{x+2}} \cdot \frac{\sqrt{3+x+1}}{\sqrt{1-4x+3}} \right]}_{-\frac{8}{3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) \stackrel{x=-2}{=} -\frac{3}{32} \cdot \left(-\frac{8}{3} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{1}{4}$$

Por lo tanto, los límites laterales son iguales, lo que significa que:

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \frac{1}{4}, \text{ existe.}$$