

NOMBRE Y APELLIDOS _____

Valoración. Cada ejercicio vale 2,5 pts. Cada apartado vale 1,25 pts.

Nota. Usar en los cálculos dos o tres decimales.

Ejercicio 1. La posición de una partícula viene dada por $\mathbf{r}(t) = 5 \cdot \sin(3t + \pi/4)\mathbf{i} + 8 \cdot \sin(3t + \pi/4)\mathbf{j}$ (SI). Se pide:

- a) Representación gráfica de los puntos por los que pasa la partícula.
- b) Módulo de la aceleración en el instante 2 s.

Ejercicio 2. Se lanza un proyectil con una velocidad inicial de 108 km/h desde una altura de 200 m con un ángulo de inclinación de 30° sobre la horizontal. Se pide:

- a) Altura máxima que alcanza el proyectil.
- b) Instante en que se oye la explosión en el punto de lanzamiento.

Ejercicio 3.

- a) De un movimiento armónico simple sabemos que su amplitud es 10 cm, su frecuencia 8 Hz y que inicialmente su elongación es mínima (con signo). Representar gráficamente $x = x(t)$ de este movimiento.
- b) De un movimiento armónico simple sabemos que su pulsación es de 2 rad/s, su posición inicial es 4 m y su velocidad inicial -13,856 m/s. Hallar la expresión de la posición instantánea.

Ejercicio 4. El eje de un motor de 40 cm de diámetro gira inicialmente a 1000 rpm, descendiendo su velocidad uniformemente hasta que se para por completo. Sabiendo que cuando ha dado 60 vueltas gira a 50 rad/s, se pide:

- a) Distancia recorrida por la periferia desde que empieza el movimiento hasta que termina.
- b) Aceleración total (módulo) en el instante en que ha dado 40 vueltas.

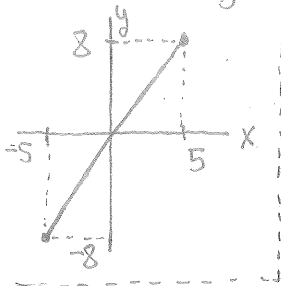
EJERCICIO 1

a)
$$\left. \begin{aligned} x &= 5 \sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right) \\ y &= 8 \sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= 5 \cdot \diamond \\ y &= 8 \cdot \diamond \end{aligned} \Rightarrow \diamond = \frac{x}{5} = \frac{y}{8}$$

luego la trayectoria está contenida en $\frac{x}{5} = \frac{y}{8}$

$\diamond \equiv \sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$ Como $\sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$ recorre $[-1, 1]$, entonces x recorre $[-5, 5]$.

Así, la trayectoria es el conjunto de puntos $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{8}{5}x, x \in [-5, 5]\}$



b) $\vec{r} = \left(5 \sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right), 8 \sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)\right)$

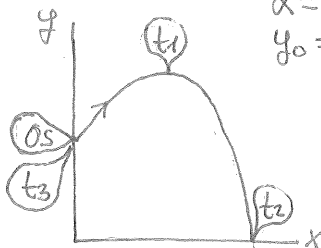
$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(15 \cos\left(3t + \frac{\pi}{4}\right), 24 \cos\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)\right)$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(-45 \sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right), -72 \sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)\right)$

$\vec{a}(2s) = \left(-45 \sin\left(3 \cdot 2 + \frac{\pi}{4}\right), -72 \sin\left(3 \cdot 2 + \frac{\pi}{4}\right)\right) = (-21,66, -34,66) \text{ m/s}^2$

$|\vec{a}(2s)| = \sqrt{(-21,66)^2 + (-34,66)^2} = 40,87 \text{ m/s}^2$

EJERCICIO 2



$v_0 = 108 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 30 \text{ m/s}$

$\alpha = +30^\circ$
 $y_0 = 200 \text{ m}$

$\left. \begin{aligned} x &= 30 \cos 30^\circ t \\ y &= 200 + 30 \sin 30^\circ t + 0,5(-9,8)t^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 25,98t \text{ (SI)} \Rightarrow v_x = 25,98 \text{ m/s} \\ y = 200 + 15t - 4,9t^2 \text{ (SI)} \Rightarrow v_y = 15 - 9,8t \text{ (SI)} \end{cases}$

a) ¿ y_1 ?

$v_{y,1} = 0 \Rightarrow 15 - 9,8t_1 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{15}{9,8} = 1,53 \text{ s}$

$y_1 = 200 + 15 \cdot 1,53 - 4,9 \cdot 1,53^2 = 211,48 \text{ m}$

b) ¿ t_3 ?

$y_2 = 0 \Rightarrow 200 + 15t_2 - 4,9t_2^2 = 0 \Rightarrow t_2 = \frac{-15 \pm \sqrt{15^2 + 4 \cdot 4,9 \cdot 200}}{2 \cdot (-4,9)} = \begin{cases} 8,1 \text{ s} \end{cases}$

$t_2 = 8,1 \text{ s} \Rightarrow x_2 = 25,98 \cdot 8,1 = 210,44 \text{ m}$

llamo $\Delta t \equiv t_3 - t_2$

$(v_{\text{son}} \Delta t)^2 = y_0^2 + x_2^2 \Rightarrow (340 \Delta t)^2 = 200^2 + 210,44^2 \Rightarrow$

$\Delta t = \sqrt{200^2 + 210,44^2} / 340 = 0,85 \text{ s}$

$t_3 = t_2 + \Delta t = 8,1 + 0,85 = 8,95 \text{ s}$

EJERCICIO 3

a) MAS ¿Gráfica $x=x(t)$?

$$A=0,1\text{m} \quad \omega=2\pi f=2\pi \cdot 8=50,27\text{rad/s}$$

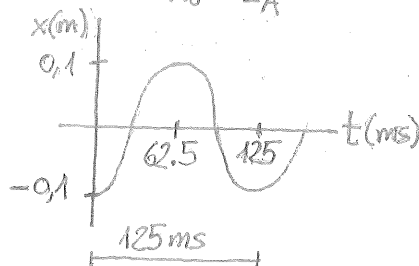
$$f=8\text{Hz}$$

$$x_0=-A$$

$$x_0=A\sin(\omega \cdot 0 + \phi_0) \Rightarrow x_0=A\sin\phi_0 \Rightarrow \sin\phi_0=\frac{x_0}{A}=\frac{-A}{A}=-1 \Rightarrow \phi_0=-\frac{\pi}{2}\text{rad}$$

$$x=0,1\sin(50,27t-\frac{\pi}{2}) \text{ (SI)}$$

$$T=\frac{1}{f}=0,125\text{s}$$



b) MAS

$$\omega=2\text{rad/s}$$

$$x_0=4\text{m}$$

$$v_{x0}=-13,856\text{m/s}$$

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= A\sin(\omega \cdot 0 + \phi_0) \Rightarrow x_0=A\sin\phi_0 \\ v_{x0} &= A\omega\cos(\omega \cdot 0 + \phi_0) \Rightarrow v_{x0}=A\omega\cos\phi_0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \tan\phi_0 &= \frac{\sin\phi_0}{\cos\phi_0} = \frac{x_0/A}{v_{x0}/A\omega} = \frac{x_0\omega}{v_{x0}} \end{aligned}$$

$$\tan\phi_0 = \frac{4 \cdot 2}{-13,856} \Rightarrow \phi_0 = \begin{cases} -0,524\text{rad} (4^{\circ}\text{cuadr}) \\ 2,618\text{rad} (2^{\circ}\text{cuadr}) \end{cases}$$

Como $x_0=4>0$, entonces $\sin\phi_0>0$. luego $\phi_0=2,618\text{rad}$.

$$A = \frac{x_0}{\sin\phi_0} = \frac{4}{\sin(2,618)} = 8\text{m} \Rightarrow \boxed{x=8\sin(2t+2,618) \text{ (SI)}}$$

EJERCICIO 4

$$\text{MCUA}, \quad \omega_0 = 1000 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \cdot \frac{2\pi\text{rad}}{1\text{rev}} \cdot \frac{1\text{min}}{60\text{s}} = 104,72\text{rad/s}; \quad R=0,2\text{m}$$

$$\theta_1 = 60\text{vueltas} \cdot \frac{2\pi\text{rad}}{1\text{vuelta}} = 376,99\text{rad}$$

$$\omega_1 = 50\text{rad/s}$$

a) ¿s₂? Siendo t₂ ≡ instante en el que se para por completo.

$$\omega_1^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta_1 - \theta_0) \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{2\theta_1} = \frac{50^2 - 104,72^2}{2 \cdot 376,99} = -11,229\text{rad/s}^2}$$

$$\omega_2 = 0\text{rad/s} \Rightarrow \omega_2^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta_2 - \theta_0) \Rightarrow \theta_2 = \frac{-\omega_0^2}{2\alpha} = \frac{-104,72^2}{2 \cdot (-11,229)} = 488,30\text{rad}$$

$$s_2 = R \cdot \theta_2 = 0,2 \cdot 488,3 = \boxed{97,66\text{m}}$$

b) ¿a₃? Siendo $\theta_3 = 40\text{vueltas} = 251,33\text{rad}$

$$\alpha_3 = \alpha = -11,229\text{rad/s}^2 \Rightarrow a_{t3} = R\alpha_3 = 0,2 \cdot (-11,229) = -2,246\text{m/s}^2$$

$$\omega_3^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta_3 - \theta_0) \Rightarrow \omega_3 = \sqrt{2\alpha\theta_3 + \omega_0^2} = \sqrt{2 \cdot (-11,229) \cdot 251,33 + 104,72^2} = 72,951\text{rad/s}$$

$$a_{n3} = R\omega_3^2 = 0,2 \cdot 72,951^2 = 1064,38\text{m/s}^2$$

$$a_3 = \sqrt{a_{t3}^2 + a_{n3}^2} = \sqrt{(-2,246)^2 + 1064,38^2} = \boxed{1064,38\text{m/s}^2}$$