1. Estudia la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+2}{x^2-x-2} & \text{si} \quad x<0 \\ e^{-x}-2 & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$

2. Responde a las siguientes cuestiones:

a) Determina la monotonía y los extremos relativos de $f(x)=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

b) Determina la curvatura y los puntos de inflexión y de $f(x)=x\cdot e^{1-2x}$

3. Determina a y b para que $f(x)=\begin{cases} 2x^2+ax+1 & \text{si} \quad x<2 \\ b+\ln(x-1) & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases}$ sea continua y derivable en su dominio.

4. Halla a y b sabiendo que $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ tiene un punto de inflexión en $x=-1$ y que la recta tangente a $f(x)$ en $x=2$ es paralela a $r:5x+y+1=0$

5. Responde a las siguientes cuestiones:

a) Determina la ecuación de la recta tangente a $f(x)=\sqrt{5-x^2}$ en el punto de abscisa $x=-1$.

b) Determina el valor de a para que $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-\sqrt{4x^2-ax+3})=-\dfrac{1}{2}$

EJERCICIO 1

$$x^2-x-2=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} \begin{cases} x=2 \\ x=-1 \end{cases}$$

* $\text{Dom}\left(y=\dfrac{2x+2}{x^2-x-2}\right)=\{x\in\mathbb{R} / x^2-x-2\neq 0\} \overset{\downarrow}{=} \mathbb{R}-\{-1,2\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{(-\infty,0)-\{-1\}\in \text{Dom}(f)}$

* $\text{Dom}(y=e^{-x}-2)=\mathbb{R} \Rightarrow \underline{[0,+\infty)\in\text{Dom}(f)}$

Por tanto, $\boxed{\text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{-1\}}$

- Las funciones parciales son continuas en su dominio por ser racional y exponencial $\Rightarrow f(x)$ es continua en su dominio salvo quizás en $x=0$.

Tenemos que clasificar la discontinuidad de $x=-1$ y estudiar que ocurre en $x=0$.

$x=-1$

$$\lim_{x\to-1} f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{2x+2}{x^2-x-2}=\left[\frac{0}{0}\ (I)\right]=\lim_{x\to-1}\frac{2\cdot(x+1)}{(x+1)(x-2)}=$$

Factorizamos

$$=\lim_{x\to-1}\frac{2}{x-2}=-\frac{2}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l}\exists \lim\limits_{x\to-1} f(x)=-\dfrac{2}{3} \\ \nexists f(-1)\end{array}\right\} \Rightarrow \underline{f(x) \text{ presenta en } x=-1 \text{ una discontinuidad evitable}}$$

$x=0$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2x+2}{x^2-x-2}=-1 \\ \lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(e^{-x}-2)=-1\end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\exists \lim_{x\to0} f(x)=-1}$$

* $f(0) = e^0 - 2 = -1 \rightarrow \underline{\exists f(0) = -1}$

* $\underline{\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)}$

$\boxed{f(x) \text{ es continua en } x=0}$ $\left(\exists \lim_{x\to 0} f(x),\ \exists f(0) \text{ y } \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)\right)$

<u>Solución</u>
$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) \text{ es continua en } \mathbb{R}-\{1\} \\ x=1 \text{ discontinuidad evitable} \end{array}}$$

EJERCICIO 2

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

* $Dom(f) = \mathbb{R} - \{x \,/\, (x+1)^2 = 0\} \rightarrow Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

$f(x)$ es continua y derivable en su dominio por ser racional.

* $$f'(x) = \frac{3x^2\cdot(x+1)^2 - x^3\cdot 2\cdot(x+1)\cdot 1}{(x+1)^4} = \frac{(x+1)\cdot\left[3x^2\cdot(x+1)-2x^3\right]}{(x+1)^4} =$$
$$= \frac{x^3+3x^2}{(x+1)^3} \rightarrow f'(x) = \frac{x^3+3x^2}{(x+1)^3}$$

<u>Puntos críticos</u>
$$\begin{cases} x \in Dom(f) \,/\, \nexists f'(x) \rightarrow \text{No hay} \\ x \in Dom(f') \,/\, f'(x) = 0 \rightarrow x=0 \quad x=-3 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{x^3+3x^2}{(x+1)^3} = 0 \rightarrow x^3 + 3x^2 = 0$$
$$x^2\cdot(x+3) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x+3=0 \\ x=-3 \end{cases}$$

* Estudiamos el signo de $f'(x)$

	$-\infty$ … -3	-3 … -1	-1 … 0	0 … $+\infty$
Signo $f'(x)$	+	−	+	+
$f(x)$ es	↗	↘	↗	↗

$f(x)$ crece si $x \in (-\infty,-3) \cup (-1,+\infty)$

$f(x)$ decrece si $x \in (-3,-1)$

$(-3, f(-3)) = \left(-3, -\frac{27}{4}\right)$ máximo relativo

$f(-3) = \frac{(-3)^3}{(-3+1)^2} = -\frac{27}{4}$

b) $f(x) = x \cdot e^{1-2x}$

* $Dom(f) = \mathbb{R}$

$f(x)$ es continua y derivable en su dominio por ser producto de funciones continuas.

* $\boxed{f'(x) = 1 \cdot e^{1-2x} + x \cdot (-2) \cdot e^{1-2x} = e^{1-2x} \cdot (1-2x)}$

$f''(x) = e^{1-2x} \cdot (-2) \cdot (1-2x) + e^{1-2x} \cdot (-2)$

$f''(x) = e^{1-2x} \cdot (-2+4x-2) \Rightarrow \boxed{f''(x) = e^{1-2x} \cdot (4x-4)}$

$\begin{cases} x \in Dom(f) \ / \ \nexists f''(x) \rightarrow \text{no hay} \\ x \in Dom(f'') \ / \ f''(x) = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases}$

$f''(x) = 0 \Rightarrow e^{1-2x} \cdot (4x-4) = 0 \Rightarrow 4x-4=0 \Rightarrow x = 1$

$e^A > 0 \ \forall A$

	$-\infty$	1	$+\infty$
Signo $f''(x)$	$-$	$+$	
$f(x)$ es	$\cap$	$\cup$	

$f(x)$ es <u>cóncava hacia abajo</u> si $x \in (-\infty, 1)$

$f(x)$ es <u>cóncava hacia arriba</u> si $x \in (1, +\infty)$

$(1, f(1)) = (1, 1/e)$ <u>punto de inflexión</u>

$\uparrow$

$f(1) = 1 \cdot e^{1-2\cdot 1} = e^{-1} = 1/e$

EJERCICIO 3

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax + 1 & \text{si } x < 2 \\ b + \ln(x-1) & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Dom}(y = 2x^2 + ax + 1) = \mathbb{R} \ \forall a \Rightarrow (-\infty, 2) \in \text{Dom}(f) \\ \text{Dom}(y = b + \ln(x-1)) = \{x \in \mathbb{R} / x - 1 > 0\} = (1, +\infty) \Rightarrow [2, +\infty) \in \text{Dom}(f) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boxed{\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \ \forall a, b}$

Las funciones parciales son continuas y derivables en $\mathbb{R}$ por ser polinómica y logarítmica $\Rightarrow$ <u>$f(x)$ es continua y derivable en $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ $\forall a, b$</u>

$$f'(x) = \begin{cases} 4x + a & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Tenemos que hallar a y b para que f(x) también sea continua y derivable en $x=2$.

CONTINUIDAD

$f(x)$ es continua en $x=2 \Leftrightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (2x^2+ax+1) = 8+2a+1 = 2a+9 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} b+\ln(x-1) = b+\underbrace{\ln 1}_{0} = b \\ f(2) = b \end{array}\right\} \Rightarrow 2a+9=b \quad \boxed{2a-b=-9}$$

DERIVABILIDAD

$f(x)$ es derivable en $x=2 \Leftrightarrow f'(2^-) = f'(2^+)$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = \lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^-} (4x+a) = 8+a \\ f'(2^+) = \lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-1} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 8+a=1 \quad \boxed{a=-7}$$

Por tanto

$$\left.\begin{array}{l} 2a-b=-9 \\ a=-7 \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} 2\cdot(-7)-b=-9 \\ -14+9=b \\ -5=b \end{array}$$

Solución

$$\boxed{\text{f(x) es continua y derivable en su dominio si } a=-7 \text{ y } b=-5}$$

EJERCICIO 4

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$

* $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $f(x)$ es continua y derivable en su dominio.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ y $f''(x) = 6x + 2a$

* $x = -1$ punto de inflexión $\rightarrow f''(-1) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 6\cdot(-1) + 2a = 0 \rightarrow 2a = 6 \rightarrow a = 3$

* Recta tg en $x = 2$ paralela a $r: y = -5x - 1 \rightarrow$

$\rightarrow m_t = m_r \rightarrow f'(2) = -5 \rightarrow 3\cdot(-2)^2 + 2a\cdot(-2) + b = -5$

$12 + 4a + b = -5$

$4a + b = -17$

$$\left.\begin{array}{l} a = 3 \\ 4a + b = -17 \end{array}\right\} \rightarrow 12 + b = -17 \rightarrow b = -29$$

Solución: $\boxed{a = 3 \text{ y } b = -29}$

EJERCICIO 5

a) $f(x)=\sqrt{5-x^2}$

* Punto de tangencia $P(-1,f(-1)) \rightarrow P(-1,2)$

$f(-1)=\sqrt{5-(-1)^2}=\sqrt{4}=2$

* Pendiente $m_t=f'(-1)$

$$\left.\begin{array}{l} m_t=f'(-1) \\ f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{5-x^2}}\cdot(-2x)=\dfrac{-x}{\sqrt{5-x^2}} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow \quad m_t=\dfrac{-(-1)}{\sqrt{5-(-1)^2}}=\dfrac{1}{2} \rightarrow m_t=\dfrac{1}{2}$

* Recta tangente $y=2+\frac{1}{2}\cdot(x+1)$

$y=2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

$y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2-ax+3}\right)=[\infty-\infty\ (I)]=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(2x-\sqrt{4x^2-ax+3}\right)\left(2x+\sqrt{4x^2-ax+3}\right)}{2x+\sqrt{4x^2-ax+3}}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x)^2-\left(\sqrt{4x^2-ax+3}\right)^2}{2x+\sqrt{4x^2-ax+3}}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2-4x^2+ax-3}{2x+\sqrt{4x^2-ax+3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax-3}{2x+\sqrt{4x^2-ax+3}}=$

$$= \left[\frac{+\infty}{+\infty}\ (I)\right] \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{ax}{x} - \frac{3}{x}}{\frac{2x}{x} + \sqrt{\frac{4x^2}{x^2} - \frac{ax}{x^2} + \frac{3}{x^2}}} \underset{\uparrow}{=}$$

Dividimos numerador y denominador por x

simplificamos

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{a - \frac{3}{x}}{2 + \sqrt{4 - \frac{a}{x} + \frac{3}{x^2}}} = \frac{a}{2+2} = \frac{a}{4}$$

Luego $\frac{a}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2a = -4 \Rightarrow a = -2$