

1. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 8x + 13 & \text{si } x > 2 \end{cases}$
- a) Estudia la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$
- b) Determina los puntos en los que la recta tangente a $f(x)$ es paralela a $r: y = -2x + 7$. Halla la ecuación de la recta tangente en dichos puntos.
- c) Calcula $\int_1^4 f(x) dx$
2. Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{2 - x}$ determina dominio, puntos de corte con los ejes, asíntotas, monotonía y extremos relativos y esboza su gráfica.
3. Determina la curvatura y los puntos de inflexión de $f(x) = x \cdot e^{1-4x}$
4. Calcula las siguientes integrales:
- a) $\int \frac{x^2}{\sqrt{5-x^3}} dx$
- b) $\int \left(\frac{3}{x} + x \cdot e^{x^2-4} - \sen 5x \right) dx$
5. Una empresa de productos de almacenaje fabrica cajas de cartón de base cuadrada y tales que el perímetro de una cara lateral rectangular es de 30 cm. Calcúlense las dimensiones en centímetros (largo, ancho y alto) que ha de tener cada caja para que su volumen sea máximo. ¿Cuál es dicho volumen máximo?

EJERCICIO 4

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } \text{Dom}\left(y = \frac{2}{x}\right) &= \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \underline{(-\infty, 2] - \{0\} \in \text{Dom}(f)} \\ \text{Dom}(y &= x^2 - 8x + 13) = \mathbb{R} \rightarrow \underline{(2, +\infty) \in \text{Dom}(f)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}}$$

* Las funciones parciales son continuas y derivables en su dominio por ser racional y polinómica respectivamente $\rightarrow$ $f(x)$ es continua y derivable en su dominio salvo quizás en $x=2$

CONTINUIDAD

$x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} = \frac{2}{0} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{x} = \frac{2}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x} = \frac{2}{0^+} = +\infty \end{array} \right. \rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$f(x)$ no es continua en $x=0$ y en dicho punto presenta una discontinuidad de salto infinito

$x=2$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 8x + 13) = 1 \\ f(2) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ es continua en $x=2$

DERIVABILIDAD

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x^2} & \text{si } x < 2 \text{ y } x \neq 0 \\ 2x-8 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$x=0$

$f(x)$ no es continua en $x=0 \rightarrow f(x)$ no es derivable en $x=0$

$x=2$

$$\left. \begin{aligned} f'(2^-) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(-\frac{2}{x^2}\right) = -\frac{1}{2} \\ f'(2^+) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x-8) = -4 \end{aligned} \right\} \rightarrow f'(2^-) \neq f'(2^+) \rightarrow$$

$\rightarrow f(x)$ no es derivable en $x=2$

Solución

* $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

$x=0$ discontinuidad de salto infinito

* $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0, 2\}$

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x^2} & \text{si } x < 2 \text{ y } x \neq 0 \\ 2x-8 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$b) r: y = -2x + 7 \Rightarrow m_r = -2$$

$$* t \parallel r \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m_t = m_r = -2 \\ m_t = f'(x) \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x) = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{-2}{x^2} = -2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \quad \checkmark \quad (x < 2) \\ 2x - 8 = -2 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3 \quad \checkmark \quad (x > 2) \end{array} \right.$$

$$P_1(1, f(1)) \Rightarrow \boxed{P_1(1, 2)}$$

$$P_2(-1, f(-1)) \Rightarrow \boxed{P_2(-1, -2)}$$

$$P_3(3, f(3)) \Rightarrow \boxed{P_3(3, -2)}$$

Puntos en los que la recta
tangente es paralela a r

$$\left. \begin{array}{l} P_1(1, 2) \\ m_1 = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow t_1: y = 2 - 2 \cdot (x - 1) \Rightarrow t_1: y = -2x + 4$$

$$\left. \begin{array}{l} P_2(-1, -2) \\ m_2 = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow t_2: y = -2 - 2(x + 1) \Rightarrow t_2: y = -2x - 4$$

$$\left. \begin{array}{l} P_3(3, -2) \\ m_3 = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow t_3: y = -2 - 2(x - 3) \Rightarrow t_3: y = -2x + 4$$

$$c) \int_1^4 f(x) dx = \int_1^2 \frac{2}{x} dx + \int_2^4 (x^2 - 8x + 13) dx =$$

$$= \underline{2\ln 2 - \frac{10}{3}}$$

$$* \int_1^2 \frac{2}{x} dx = \int_1^2 2 \cdot \frac{1}{x} dx = \left[2\ln|x| \right]_1^2 = 2\ln 2 - 2\underbrace{\ln 1}_0 =$$

$$= \underline{2\ln 2}$$

$$* \int_2^4 (x^2 - 8x + 13) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 13x \right]_2^4 =$$

$$= \left(\frac{64}{3} - 64 + 52 \right) - \left(\frac{8}{3} - 16 + 26 \right) = \frac{28}{3} - \frac{38}{3} = \underline{-\frac{10}{3}}$$

EJERCICIO 2

DOMINIO $\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} / 2 - x \neq 0\} \Rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES

* Eje de abscisas | $y=0$

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{2 - x} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} x=1 \\ x=1 \end{matrix}$$

$f(x)$ corta al eje de abscisas en $(1, 0)$

* Eje de ordenadas | $x=0 \Rightarrow y = \frac{0^2 - 2 \cdot 0 + 1}{2 - 0} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

$f(x)$ corta al eje de ordenadas en $(0, \frac{1}{2})$

ASÍNTOTAS

ASÍNTOTAS VERTICALES (AV)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x + 1}{2 - x} = \frac{3}{0} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{3}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty \end{cases} \rightarrow$$

$\rightarrow$ $x=2$ es AV de $f(x)$

ASÍNTOTAS HORIZONTALES (AH)

Como $f(x)$ es racional, si tiene AH es la misma por ambos lados.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{2 - x} &= \left[\frac{\infty}{\infty} (I) \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x^2} - 1} = \frac{1}{0} = \infty \rightarrow \underline{\text{No tiene AH}} \end{aligned}$$

ASÍNTOTAS OBLÍCUAS (AO) $y = mx + n$

Como $f(x)$ es racional, si tiene AO es la misma por ambos lados

$$\begin{aligned} * m &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x - x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} (I) \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{2x}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x} - 1} = \frac{1}{-1} = \underline{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{2 - x} - (-1)x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 1 + 2x - x^2}{2 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2 - x} = 0 \end{aligned}$$

$y = -x$ es AO de $f(x)$

Posición

Izquierda | $x = -100$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Función } y = 100'009... \\ \text{Asíntota } y = 100 \end{array} \right. \rightarrow$

$\rightarrow f(x)$ está situada por encima de la AO

Derecha | $x = 100$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Función } y = -100'01... \\ \text{Asíntota } y = -100 \end{array} \right. \rightarrow$

$\rightarrow f(x)$ está situada por debajo de la AO

MONOTONÍA Y EXTREMOS RELATIVOS

* $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$ y $f(x)$ es continua y derivable en su dominio por ser racional

$$\begin{aligned} * \boxed{f'(x) &= \frac{(2x-2) \cdot (2-x) - (x^2-2x+1) \cdot (-1)}{(2-x)^2} =} \\ &= \frac{4x - 2x^2 - 4 + 2x + x^2 - 2x + 1}{(2-x)^2} = \frac{-x^2 + 4x - 3}{(2-x)^2} \end{aligned}$$

Puntos críticos $\begin{cases} x \in \text{Dom}(f) / \nexists f'(x) \rightarrow \text{No hay} \\ x \in \text{Dom}(f') / f'(x) = 0 \rightarrow \textcircled{x=1} \quad \textcircled{x=3} \end{cases}$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-x^2+4x-3}{(2-x)^2} = 0 \Rightarrow -x^2+4x-3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{-2} = \frac{-4 \pm 2}{-2} \rightarrow \begin{matrix} \nearrow \textcircled{x=1} \\ \searrow \textcircled{x=3} \end{matrix}$$

*

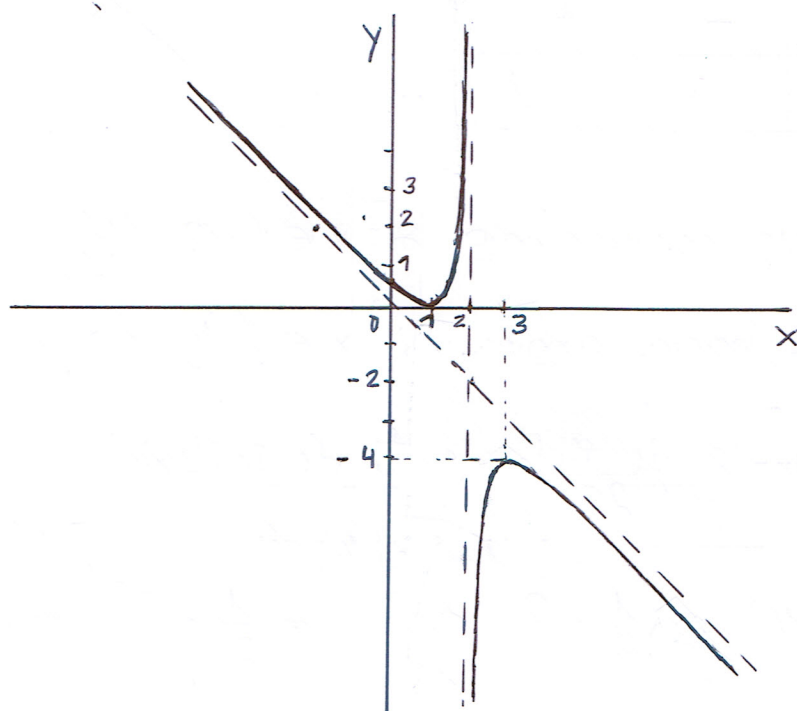
	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
Signo $f'(x)$	-	+		+	-
$f(x)$ es	$\searrow$	$\nearrow$		$\nearrow$	$\searrow$

$f(x)$ crece si $x \in (1, 2) \cup (2, 3)$

$f(x)$ decrece si $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

$(1, f(1)) = (1, 0)$ mínimo relativo

$(3, f(3)) = (3, -4)$ máximo relativo



EJERCICIO 3

* $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $f(x)$ es continua y derivable en su dominio por ser producto de funciones continuas y derivables

* $f'(x) = 1 \cdot e^{1-4x} + x \cdot e^{1-4x} \cdot (-4) = e^{1-4x} \cdot (1-4x)$

$f''(x) = e^{1-4x} \cdot (-4) \cdot (1-4x) + e^{1-4x} \cdot (-4) =$ Factor común
 $= -4 \cdot e^{1-4x} \cdot (1-4x+1) = \underline{-4 \cdot e^{1-4x} \cdot (2-4x)}$

$$\begin{cases} x \in \text{Dom}(f) / \nexists f''(x) \rightarrow \text{No hay} \\ x \in \text{Dom}(f'') / f''(x)=0 \rightarrow x = 1/2 \end{cases}$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow -4e^{1-4x} \cdot (1-2x)=0 \Rightarrow 1-2x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1=2x \Rightarrow x = 1/2$$

*

	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
Signo $f''(x)$	-		+
$f(x)$ es	$\cap$		$\cup$

$f(x)$ es cóncava hacia abajo si $x \in (-\infty, 1/2)$

$f(x)$ es cóncava hacia arriba si $x \in (1/2, +\infty)$

$(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2})) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2e})$ punto de inflexión

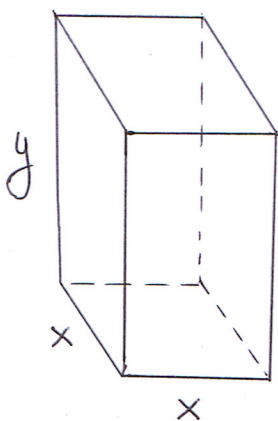
$\searrow$
 $f(1/2) = \frac{1}{2} \cdot e^{1-4 \cdot (1/2)} = \frac{1}{2} \cdot e^{-1} = \underline{\underline{\frac{1}{2e}}}$

EJERCICIO 4

$$\begin{aligned} a) \int \frac{x^2}{\sqrt{5-x^3}} dx &= \frac{1}{3} \int \underbrace{3x^2}_{f'(x)} \cdot \underbrace{(5-x^3)^{-1/2}}_{f(x)^{-1/2}} dx = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{(5-x^3)^{1/2}}{1/2} + C = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \sqrt{5-x^3} + C = \frac{2\sqrt{5-x^3}}{3} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \int \left(\frac{3}{x} + x \cdot e^{x^2-4} - \sin 5x \right) dx &= \\ &= \int \frac{3}{x} dx + \int x \cdot e^{x^2-4} dx - \int \sin 5x dx = \\ &= 3 \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} \int 2x \cdot e^{x^2-4} dx - \frac{1}{5} \int 5 \cdot \sin 5x dx = \\ &= 3 \ln|x| + \frac{1}{2} e^{x^2-4} - \frac{1}{5} \cdot (-\cos 5x) + C = \\ &= 3 \ln|x| + \frac{e^{x^2-4}}{2} + \frac{\cos 5x}{5} + C \end{aligned}$$

EJERCICIO 5



x = lado de la base (cm)

y = altura (cm)

* Perímetro cara lateral = 30 cm $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 2x + 2y = 30 \Rightarrow x + y = 15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 15 - x$$

$$\text{Volumen} = \text{Largo} \cdot \text{ancho} \cdot \text{alto}$$

$$V(x) = x \cdot x \cdot (15-x) \rightarrow \boxed{V(x) = -x^3 + 15x^2}$$

$$x > 0$$

$$y > 0 \rightarrow 15-x > 0 \rightarrow x < 15 \left. \vphantom{y > 0} \right\} \rightarrow \underline{\text{Dominio} = (0, 15)}$$

* $V(x)$ es continua y derivable en su dominio por ser polinómica

$$* \quad V'(x) = -3x^2 + 30x$$

$$V'(x) = 0 \rightarrow -3x^2 + 30x = 0 \rightarrow -3x \cdot (x-10) = 0$$

$$x=0$$

(No válida
 $x > 0$)

$$x=10$$

	0	10	15
Signo $V'(x)$	+	-	
$V(x)$ es	↗	↘	

$x=10$ máximo relativo
y absoluto

Solución

* Las dimensiones de la caja de volumen máximo son:

$$\text{Largo} = 10 \text{ cm}$$

$$\text{Ancho} = 10 \text{ cm}$$

$$\text{Alto} = 15 - 10 = 5 \text{ cm}$$

$$* \quad \text{Volumen Máximo} = 10 \cdot 10 \cdot 5 = 500 \text{ cm}^3$$