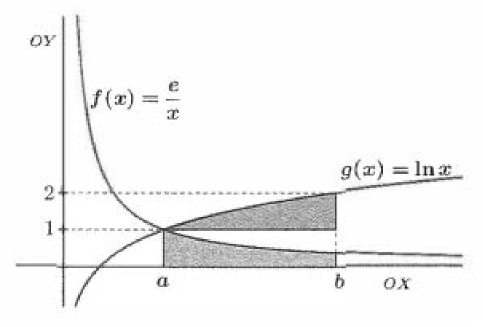
Calcula los valores de las abscisas a y b que aparecen en el gráfico, y, después, comprueba que las áreas de las dos regiones sombreadas son iguales:



Solución:

El valor $x = a$ es donde ambas funciones se cortan $f(a) = g(a) = 1$:

$$\frac{e}{a} = 1 \ ;$$

$$\boxed{a = e}$$

Por otro lado observamos que $g(b) = 2$:

$$\ln b = 2 \ ;$$

$$\boxed{b = e^2}$$

El área bajo la curva $y = f(x)$ es:

$$\int_e^{e^2} \frac{e}{x}\, dx = \Big[e \ln |x|\Big]_e^{e^2} = e \ln |e^2| - e \ln |e| =$$
$$= 2e - e = \boxed{e \text{ u.a.}}$$

Al área bajo la curva de g es la siguiente integral menos el rectángulo de base $b - a$ y de altura 1:

$$\int_e^{e^2} \ln |x|\, dx$$

Esta integral se calcula con el método de integración por partes:

$$\int_e^{e^2} \ln |x|\, dx = \Big[x \ln x - x\Big]_e^{e^2} =$$
$$= (e^2 \ln e^2 - e^2) - (e \ln e - e) = e^2$$

El área del rectángulo es:

$$(e^2 - e) \cdot 1 = e^2 - e$$

Restando estos dos resultados obtenemos el área sombreada de arriba:

$$e^2 - (e^2 - e) = \boxed{e \text{ u.a.}}$$

Dada la función $f(x) = \frac{ax}{3x^2+1}$, se pide:

a) Encontrar el valor de a que verifica que $F(0) = 0$ y $F(1) = \frac{4}{3} \cdot \ln(4)$, donde F denota una primitiva de f.
b) Considerando el valor de a obtenido en el apartado anterior, estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre x=-1 y x=1.

Solución:

a) Observamos que la integral $\int f(x)$ es inmediata de tipo logarítmico (recordar la tabla de integrales inmediatas):

$$F(x) = \int \frac{ax}{3x^2+1}\,dx = \frac{a}{6}\int \frac{6x}{3x^2+1}\,dx = \frac{a}{6} \cdot \ln|3x^2+1| + k$$

Tenemos que $F(0) = 0$:

$$F(0) = \frac{a}{6} \cdot \ln|3 \cdot 0^2 + 1| + k = 0\ ;$$

$$k = 0$$

Y tenemos que $F(1) = \dfrac{4}{3} \cdot \ln(4)$. Sabemos que k=0:

$$F(1) = \frac{a}{6} \cdot \ln|3 \cdot 1^1 + 1| + 0 = \frac{4}{3} \cdot \ln(4)\ ;$$

$$\frac{a}{6} \cdot \ln(4) = \frac{4}{3} \cdot \ln(4)\ ;$$

$$\frac{a}{6} = \frac{4}{3}\ ;$$

$$a = \frac{24}{3}\ ;$$

$$\boxed{a = 8}$$

b) Dada la función racional $f(x) = \frac{8x}{3x^2+1}$ sabemos que su dominio es $\mathbb{R}$ ya que el denominador $3x^2+1$ no se anula para ningún valor real. Además, tiene simetría impar ya que:

$$f(-x) = \frac{8(-x)}{3(-x)^2+1} = -\frac{8x}{3x^2+1} = -f(x)$$

Para representar gráficamente la función tenemos que calcular al menos:

1. Puntos de corte con los ejes:

   - Punto de corte con el eje x (y=0):
     $$\frac{8x}{3x^2+1} = 0\ ;$$
     $$8x = 0\ ;$$
     $$x = 0$$
     Corta al eje x en el punto (0,0). También es punto de corte con el eje y (x=0).

2. Asíntotas:

   - Asíntota vertical no tiene ya que el dominio de f es $\mathbb{R}$.
   - Asíntota horizontal:
     $$\lim_{x\to\infty} \frac{8x}{3x^2+1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{8x}{3x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{8}{3x} = 0$$
     f tiene asíntota horizontal de ecuación y=0.
   - No tiene asíntota oblicua.

3. Monotonía:

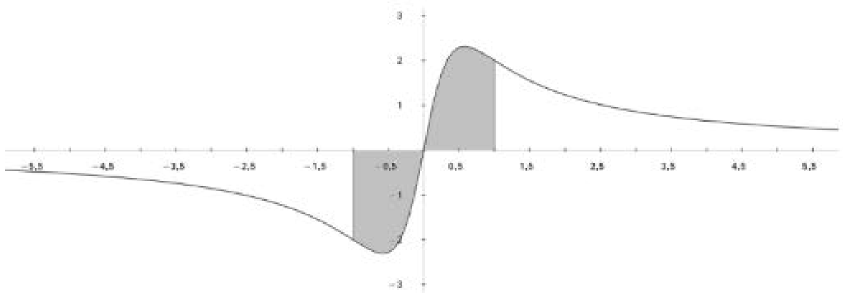
   Comenzamos calculando los puntos críticos de f:
   $$f'(x) = \frac{8(3x^2+1) - 8x(6x)}{(3x^2+1)^2} = \frac{24x^2 + 8 - 48x^2}{(3x^2+1)^2} = 0\ ;$$
   $$-24x^2 + 8 = 0\ ;$$
   $$x^2 = \frac{1}{3}\ ;$$
   $$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Con estos puntos críticos estudiamos la monotonía de f en la siguiente tabla:

x	$(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$	$(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$	$(\frac{\sqrt{3}}{3}, 2)$
Signo $f'(x)$	$-$	$+$	$-$
Monotonía $f(x)$	Decrece	Crece	Decrece

- f crece en $x \in (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$
- f decrece en $x \in (-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$
- f tiene un mínimo en $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, f(-\frac{\sqrt{3}}{3})) = (-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{4\sqrt{3}}{3})$
- f tiene un máximo en $(\frac{\sqrt{3}}{3}, f(\frac{\sqrt{3}}{3})) = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3})$

Con todos estos datos podemos hacer un esbozo semejante a la siguiente gráfica:



Hemos de calcula el área de la región sombreada. Al ser una función impar el área buscada es:

$$2\int_0^1 \frac{8x}{3x^2+1}\,dx = 2\cdot\frac{8}{6}\cdot \ln|3x^2+1|\Big|_0^1 =$$
$$= \frac{8}{3}\Big(\ln(3\cdot 1^1+1) - \ln(3\cdot 0^2+1)\Big) =$$
$$= \boxed{\frac{8}{3}\ln(4)\ \text{u.a.}}$$