Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcula $(B - A)^{-1}$.

b) Calcula la matriz X que verifica: $2X - AB = BA$.

c) Resuelve el sistema de ecuaciones: $C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) Calculamos la matriz $M = B - A$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Y ahora su inversa:

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} \cdot (\text{Adj}M)^t$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -8$$

$$\text{Adj}M = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = (B - A)^{-1} = \boxed{\frac{1}{-8} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}}$$

b) Despejamos X:

$$2X - AB = BA ;$$

$$2X = BA + AB ;$$

$$X = \frac{1}{2} \cdot (BA + AB)$$

Recordamos que el producto de matrices no es conmutativo en general:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$BA + AB = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Por último:

$$\boxed{X = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}}$$

c) Dado el sistema homogéneo $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \end{cases}$ calculamos el rango de C:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 1 + 4 - 1 = 0 ;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

El rango de la matriz de coeficientes C es 2, el rango de la matriz ampliada es 2 por tratarse de un sistema homogéneo y el número de variables n es 3. Según el **teorema de Rouché-Fröbenius**, el sistema es compatible indeterminado.

El sistema de ecuaciones es equivalente a:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

Parametrizamos $x = \lambda$:

$$\begin{cases} y = -\lambda \\ y + z = -2\lambda \end{cases}$$

Dado que $y = -\lambda$ entonces:

$$z = -2\lambda - (-\lambda) ;$$

$$z = -\lambda$$

La solución del sistema es:

$$\boxed{(x, y, z) = (\lambda, -\lambda, -\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) ¿Qué relación existe entre su inversa A^{-1} y su traspuesta A^t ?

b) Estudia, según los valores de λ , el rango de $A - \lambda \cdot I$, siendo I la matriz identidad de orden 3. Calcula las matrices X que verifican:

$$A \cdot X + X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Empezamos calculando la inversa de la matriz A , para ello, primero calculamos el determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Ahora, calculamos la matriz adjunta:

$$Adj A = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$Adj A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hacemos la traspuesta:

$$(Adj A)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la inversa sería:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (Adj A)^t = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos ahora la traspuesta de la matriz A , para ello cambiamos las filas por las columnas o viceversa:

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como vemos, la relación que guardan las dos matrices es que son iguales: $A^{-1} = A^t$

b) Calculamos la matriz $A - \lambda \cdot I$:

$$A - \lambda \cdot I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante y lo igualamos a cero para saber que valores lo anulan:

$$|A - \lambda \cdot I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

Ahora simplemente debemos recordar que el rango de una matriz es igual al orden del mayor determinante distinto de cero, por lo que tendríamos los siguientes casos:

· Si $\lambda \neq -1 \Rightarrow \text{rango}(A - \lambda \cdot I) = 3$.

· Si $\lambda = -1 \Rightarrow \text{rango}(A - \lambda \cdot I) = 2$.

En este último caso el rango es igual a 2 porque para ese valor encontramos determinantes de ese orden distintos de cero como, por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Por último, para buscar las matrices que cumplen la ecuación que nos dicen, vamos a sacar factor común en la misma:

$$A \cdot X + X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A + I) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matriz que multiplica a la matriz X podemos obtenerla a partir de la matriz $A - \lambda \cdot I$, sustituyendo λ por -1 :

$$A + I = A - (-1) \cdot I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La ecuación nos queda:

$$(A + I) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{3 \times 1}$$

Operando obtenemos un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas. Este sistema sabemos, sin hacer ningún cálculo adicional, que va a ser compatible indeterminado. El motivo es, que la matriz $A - \lambda \cdot I$ tiene rango 2 para el valor de $\lambda = -1$ como comprobamos anteriormente. La matriz ampliada también va a ser del mismo rango, porque los términos independientes son todos nulos. Aplicando el teorema de Rouché-Frobenius como los rangos son iguales y menores al número de incógnitas, el sistema será compatible indeterminado y tendrá infinitas soluciones. Lo resolvemos:

$$\begin{cases} x + -z = 0 \\ -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & -z = 0 \\ -x + y & = 0 \end{cases}$$

Ahora ponemos una incógnita como parámetro, por ejemplo $z = \lambda$ y resolvemos:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ -x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow -\lambda + y = 0 \Rightarrow y = \lambda \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$$

La matriz que nos piden es:

$$X = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \lambda \in \mathbb{R}$$