PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

1) La ecuación de un M.A.S. es $x(t) = 2 \cos 30\pi t$, , en la que x es la elongación en cm y t en s. ¿Cuáles son la amplitud, la frecuencia y el período de este movimiento?

2) En un M.A.S. la elongación en cm es $x(t) = 0{,}4 \cos (10\pi t - \pi/3)$, siendo t el tiempo en s. Calcular la elongación, velocidad y aceleración del móvil en los instantes t = 0 s y t = 1/120 s.

3) La aceleración (en m/s^2) de un M.A.S. en función de la elongación (en m) $a = -256\ x$. Expresar esta aceleración en función del tiempo sabiendo que la amplitud de la vibración es de 2,5 cm. Considérese nula la constante de fase.

4) La abcisa de un móvil en función del tiempo en s es la función $x(t) = 4 \operatorname{sen} 10t + 3 \cos 10t$ cm. Expresar su aceleración en función del tiempo y demostrar que se trata de un M.A.S.

5) La velocidad en m/s de un M.A.S. es $v(t) = -0{,}36\pi \operatorname{sen} \pi(24t + 1)$, donde t es el tiempo en s. ¿Cuáles son la frecuencia y la amplitud de ese movimiento? Escribir la expresión de su elongación en función del tiempo.

6) Calcular la velocidad y aceleración máximas del M.A.S. cuya ecuación es $x(t) = 5 \cos (4\pi t + \pi/6)$, en la que x es la elongación en cm y t el tiempo en s.

7) La elongación en cm de un M.A.S. es $x = 4 \cos 10t$, donde t es el tiempo en s. Calcular la aceleración en el instante en que la elongación es de 3 cm.

8) Una partícula se desplaza con M.A.S. de amplitud 1 cm y frecuencia 8 Hz. Calcular su velocidad y su aceleración en el instante en que tiene una elongación de 6 mm.

9) ¿Qué amplitud y qué período debe tener un M.A.S. para que la velocidad máxima sea de 30 cm/s y la aceleración máxima de 12 m/s^2? Expresar la elongación de ese movimiento en función del tiempo.

10) En un M.A.S., cuando la elongación es nula, la velocidad es de 1 m/s y, en el instante en que la elongación es de 5 cm, la velocidad es nula. ¿Cuál es el período del movimiento?

11) En un M.A.S. de amplitud 4 cm, en el instante en que la elongación es $\sqrt{7}$ cm, la velocidad es de 6π m/s. Calcular la frecuencia del movimiento. ¿Cuál será la velocidad del móvil al pasar por la posición de equilibrio?

12) La ecuación de un M.A.S. es $x = 6 \cos (5t + \varphi_0)$, en la que x es la elongación en cm y t el tiempo en s. Determinar la posición y velocidad del móvil en el instante t = 0 s si:

a) $\varphi_0 = 0$; b) $\varphi_0 = \pi/3$ rad/s; c) $\varphi_0 = \pi/2$ rad/s; d) $\varphi_0 = \pi$ rad

13) Representar gráficamente las funciones del tiempo x–t; v–t y a–t en cada uno de los supuestos del problema anterior.

14) Discutir las diferencias entre los M.A.S. que tienen las siguientes ecuaciones de elongación:

a) $x(t) = A \operatorname{sen} \boxed{t}$; b) $x(t) = A \cos \boxed{t}$

15) Un M.A.S. tiene una frecuencia de 5 Hz y una amplitud de 8 mm. En el instante t = 0, el móvil se encuentra en el centro de la vibración y se desplaza en sentido positivo. Expresar su elongación, su velocidad y su aceleración como funciones del tiempo.

16) ¿Cuál es la máxima fuerza que actúa sobre un cuerpo de masa 50 g cuando vibra con una frecuencia de 25 Hz y una amplitud de 2 mm?

17) Se hace oscilar verticalmente un cuerpo de masa 80 g que está colgado de un muelle en hélice de constante elástica 2 N/m. Si la amplitud de la oscilación es de 10 cm, ¿cuál será la expresión de su elongación en función del tiempo?

18) Al suspender un cuerpo de masa 300 g del extremo de un muelle que está colgado verticalmente, éste se alarga 20 cm. Si se tira del cuerpo 5 cm hacia abajo y se suelta, comienza a oscilar. Calcular el período del movimiento. ¿Cuál será la máxima velocidad que

alcanzará?

19) Un resorte tiene una longitud de 30 cm. Si se cuelga de él un cuerpo de masa 250 g y se le hace oscilar verticalmente, emplea 6 s en realizar 10 oscilaciones completas. Calcular la constante elástica del resorte y su longitud cuando dicho cuerpo está colgado de él, en reposo.

20) La escala de un dinamómetro está graduada en N. Desde la división 0 N hasta la de 20 N hay una distancia de 10 cm. Hacemos oscilar, con una amplitud de 1 cm, a un cuerpo de masa 800 g suspendido del muelle del dinamómetro. Calcular la frecuencia de las oscilaciones y su aceleración máxima.

21) Un resorte se mantiene vertical apoyado en el suelo. Se coloca un cuerpo de masa m en reposo sobre el resorte y se observa que éste se acorta 6 cm. Si empujamos ligeramente el cuerpo hacia abajo y lo soltamos, ¿cuál será la frecuencia de las oscilaciones? ¿y si la masa del cuerpo fuese 2m?

22) Un cuerpo de masa 20 g, que se mueve sobre el eje OX, pasa por el origen de coordenadas con una velocidad de 10 m/s. Sobre él actúa una fuerza F = – 4x N, siendo x la abcisa del cuerpo en m. Calcular hasta qué distancia del origen llegará.

SOLUCIONES

1) Sabemos que la elongación de un m.a.s. está dada por una ecuación del tipo

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi_0)$$

aunque pudiera ser igualmente una función seno. Así que bastaría comparar con la ecuación dada,

$$x(t) = 2\cos 30\pi t \text{ cm}$$

para obtener inmediatamente los resultados:

$$A = 2 \text{ cm} \quad ; \quad \omega = 30\pi \text{ rad/s}; \quad \phi_0 = 0 \text{ rad}$$

En cuanto al periodo y la frecuencia, ya que $T = \frac{2\pi}{\omega}$, sería tan simple como

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{30\pi} = \frac{1}{15} \text{ s} \quad ; \quad \nu = \frac{1}{T} = 15 \text{ Hz}$$

2) Si la ecuación de elongaciones es $x(t) = 0{,}4\cos(10\pi t - \frac{\pi}{3})$ cm, las de velocidad y aceleración se obtienen por simple derivación:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -4\pi \operatorname{sen}(10\pi t - \frac{\pi}{3}) \text{ cm/s}$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -40\pi^2 \cos(10\pi t - \frac{\pi}{3}) \text{ cm/s}^2$$

y sólo habría que usarlas en los instantes propuestos, t = 0 s y t = 1/20 s. En el tiempo t = 0 s, la fase del movimiento vale

$$\phi_0 = -\frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

y en el tiempo t = 1/20 s, la fase es

$$\phi(\frac{1}{20}) = 10\pi.\frac{1}{20} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

de forma que, al tiempo t = 0 s, los valores pedidos son

$$x(0) = 0{,}4\cos(-\frac{\pi}{3}) = 0{,}2 \text{ cm} \qquad (1)$$

$$v(0) = -4\pi \operatorname{sen}(-\frac{\pi}{3}) = 10.88 \text{ cm/s} \qquad (2)$$

$$a(0) = -40\pi^2 \cos(-\frac{\pi}{3}) = -197{,}39 \text{ cm/s}^2 \qquad (3)$$

Entre otras cosas, hay que notar que la posición en ese momento está a mitad de camino entre el centro de equilibrio y la amplitud (0,2 cm es la elongación; la amplitud es 0,4 cm), mientras que la velocidad de 10,88 cm/s no es de ninguna manera la mitad de la velocidad máxima (de ±12,57 cm/s, como es fácil de ver). ¿Qué comentarios pueden hacerse sobre esto?

Veamos ahora los valores de elongación, velocidad y aceleración al tiempo 1/20 s:

$$x(\frac{1}{20}) = 0{,}4\cos\frac{\pi}{6} = 0{,}35 \text{ cm} \qquad (4)$$

$$v(\frac{1}{20}) = -4\pi\,\text{sen}\frac{\pi}{6} = -6{,}28 \text{ cm/s} \qquad (5)$$

$$a(\frac{1}{20}) = -40\pi^2\cos\frac{\pi}{6} = -341{,}89 \text{ cm/s}^2 \qquad (6)$$

de modo que, en este momento, la velocidad está dirigida en sentido negativo y vale **la mitad** del valor máximo (±12,57 cm/s, como ya se hizo notar). Esto permite responder la pregunta hecha anteriormente: la velocidad del móvil alcanza su valor máximo (± 12,57 cm/s) cuando pasa por el centro de las oscilaciones (x = 0 cm), y va disminuyendo cuando se desplaza hacia el extremo de la oscilación (sea en x = 0,4 cm, sea en x = – 0,4 cm); pero **no lo hace de forma lineal**, ya que la aceleración se va haciendo más grande a medida que el móvil se acerca al extremo. En otras palabras, se pierde la mayor parte de la velocidad cuando se está ya cerca del extremo de la trayectoria: esto puede comprobarse mirando con atención los valores obtenidos en los resultados (1) a (6).

3) Tenemos a = – 256 x , con x medido en m y a en m/s^2. Como se sabe, en un m.a.s. la ecuación fundamental es

$$a = -\omega^2 x$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi_0)$$

de forma que resulta evidente que

$$\omega^2 = 256 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{256} = 16 \text{ rad/s}$$

De otro lado, las ecuaciones temporales de elongación, velocidad y aceleración son del tipo

$$x(t) = A\,\text{sen}(\omega t + \phi_0)$$

$$v(t) = A\omega\cos(\omega t + \phi_0)$$

$$a(t) = -A\omega^2\,\text{sen}(\omega t + \phi_0)$$

donde ϕ_0 = 0, tal como se dice en el enunciado. Finalmente, conocemos también el valor de la amplitud A = 2,5 cm = 0,025 m; así como la pulsación ω = 16 rad/s, de forma que sólo hay que escribir

$$a(t) = -0{,}025.256\,\text{sen}16t = -6{,}4\,\text{sen}16t$$

donde t se mide en s y a se mide en m/s^2.

4) Como se sabe, la ecuación fundamental en un m.a.s. es

$$a = -\omega^2 x \qquad (1)$$

donde a es la aceleración y x la elongación del movimiento. Todo movimiento que satisfaga esta ecuación es un m.a.s. que tiene lugar en eje X; en consecuencia, debemos probar que tal igualdad es cierta cuando la posición del móvil está dada por

$$x(t) = 4\,\text{sen}10t + 3\cos10t \qquad x <> \text{cm} \;;\quad t <> \text{s}$$

Para ello, hay que derivar esta función de posición dos veces: primero tendremos la velocidad del movimiento, después la aceleración:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 40\cos 10t - 30\,\text{sen}\,10t \qquad v <> cm/s \quad ; \quad t <> s$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -400\,\text{sen}\,10t - 300\cos 10t \qquad a <> cm/s^2 \quad ; \quad t <> s$$

Y ahora se trata de comprobar que esta aceleración cumple la condición definida en (1). Basta sacar factor común – 100 en esta última ecuación para que quede:

$$a = -100(4\,\text{sen}\,10t + 3\cos 10t) = -100\,x \qquad x <> cm \quad ; \quad a <> cm/s^2$$

y el problema está resuelto: se trata de un m.a.s., en el que ω^2 = 100 y, por tanto, ω = 10 rad/s. Aunque no discutiremos esto ahora, se puede probar que la amplitud del movimiento sería 5 cm.

5) La velocidad del m.a.s. que nos proponen es

$$v(t) = -0{,}36\pi\,\text{sen}\,\pi(24t+1) \qquad t <> s \quad ; \quad v <> m/s$$

y de esa ecuación debemos obtener, por simple comparación con la ecuación teórica de la velocidad en un m.a.s., las constantes del movimiento, en particular el período y la frecuencia. Podemos partir de las ecuaciones de un m.a.s. que planteamos a continuación:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi_0)$$
$$v(t) = -A\omega\,\text{sen}(\omega t + \phi_0)$$
$$a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi_0)$$

en las que, como puede verse, hemos usado una función coseno en la elongación x(t) para que, de ese modo, aparezca la función seno en la velocidad, tal como sucede en la función del enunciado. Ahora, comparando la segunda de estas ecuaciones con la velocidad del enunciado, tenemos las siguientes identificaciones inmediatas:

$$\left.\begin{aligned} A\omega &= 0{,}36\pi \ \ m/s \\ \omega &= 24\pi \ rad/s \end{aligned}\right\} \quad A = \frac{0{,}36\pi}{24\pi} = 0{,}015 \ m = 1{,}5 \ cm$$

$$\phi_0 = \pi \ rad$$

de las cuales, fácilmente, conseguimos ahora el período y la frecuencia:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{24\pi} = \frac{1}{12}\ s \qquad ; \qquad \nu = \frac{1}{T} = 12\ Hz$$

Y queda únicamente la función elongación–tiempo. Conocemos la amplitud A, la pulsación ω y la fase inicial ϕ_0, de modo que falta sólo escribir:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi_0) = 0{,}015\cos(24\pi t + \pi) = 0{,}015\cos\pi(24t+1)\ m$$

6) Si la elongación como función del tiempo está dada por

$$x(t) = 5\cos(4\pi t + \frac{\pi}{6}) \qquad x <> cm \quad ; \quad t <> s$$

entonces es inmediato identificar

$$A = 5\ cm \quad ; \quad \omega = 4\pi\ rad/s \quad ; \quad \phi_0 = \frac{\pi}{6}\ rad$$

de manera que los valores máximos de la velocidad y la aceleración son muy sencillos:

$$v_{max} = \pm A\omega = \pm 5.4\pi = \pm\ 20\pi = \pm\ 62{,}83\ cm/s$$

$$a_{max} = \mp A\omega^2 = \mp 5.(4\pi)^2 = \mp\ 80\pi^2 = \mp\ 789{,}57\ cm/s^2$$

y no parece preciso decir mucho más, salvo recordar quizá que los valores máximos de la velocidad se tienen cada vez que el móvil pasa por el centro de las oscilaciones (por x = 0 cm), y su signo depende que el móvil pase por ahí moviéndose en un sentido u otro. En cambio, los valores máximos de la aceleración se tienen en los extremos de la oscilación, cuando la elongación es igual a la amplitud (es decir, x = ±A cm = ±5 cm), y tienen signo contrario al de x, de acuerdo a la ecuación fundamental $a = -\omega^2 x$.

7) Al darnos la elongación:

$$x = 4\ \cos 10\, t \qquad x <> cm \qquad ; \qquad t <> s$$

nos están ofreciendo la amplitud (vale 4 cm, como es fácil de ver) y la pulsación, cuyo valor es ω = 10 rad/s. Por otro lado, la ecuación fundamental de un m.a.s. es, como se sabe, la que relaciona elongación y aceleración del móvil:

$$a = -\omega^2 x$$

donde, en nuestro caso, $\omega^2 = 10^2 = 100\ rad^2/s^2$. En consecuencia, podemos escribir

$$a = -100\, x \qquad x <> cm \qquad ; \qquad a <> cm/s^2$$

y, para x = 3 cm, será

$$a = -100.3 = -300\ cm/s^2 = -3\ m/s^2$$

8) Siendo la frecuencia ν = 8 Hz, es muy sencillo obtener la pulsación (o frecuencia angular, como también se la conoce):

$$\omega = 2\pi\nu = 16\pi\ rad/s$$

y ahora debemos recordar la relación existente entre velocidad y elongación del móvil en un M.A.S.:

$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

de manera que, conociendo A = 1 cm y $\omega = 16\pi$ rad/s, es inmediato averiguar la velocidad para cualquier elongación. Para x = 0,6 cm tendremos:

$$v = \pm 16\pi\sqrt{1 - 0{,}6^2} = \pm 16\pi.0{,}8 = \pm 40{,}21\ cm/s$$

Y, en lo que respecta a la aceleración, bastará recordar la ecuación fundamental de un M.A.S.:

$$a = -\omega^2 x$$

donde sólo hay que sustituir el valor de la elongación 0,6 cm:

$$a = -(16\pi)^2 .0{,}6 = -1515{,}95\ cm/s^2 = -15{,}16\ m/s^2$$

9) ¿Qué amplitud y qué período debe tener un M.A.S. para que la velocidad máxima sea de 30 cm/s y la aceleración máxima de 12 m/s^2? Expresar la elongación de ese movimiento en función del tiempo.

Si la velocidad máxima es de 30 cm/s, entonces sabemos que

$$A\omega = 30 \text{ cm/s} = 0{,}3 \text{ m/s} \qquad (1)$$

y si la aceleración máxima es de 12 m/s^2, entonces es que

$$A\omega^2 = 12 \text{ m/s}^2 \qquad (2)$$

así que bastaría dividir las igualdades (2) y (1) para tener fácilmente A y ω. Primero ω:

$$\frac{A\omega^2}{A\omega} = \omega = \frac{12}{0{,}3} = 40 \text{ rad/s}$$

y ahora A, metiendo ω en (1) o en (2):

$$A = \frac{30 \text{ cm/s}}{\omega} = \frac{30 \text{ cm/s}}{40 \text{ rad/s}} = 0{,}75 \text{ cm}$$

Entonces podemos escribir la ecuación de elongaciones, que sería del tipo $x(t) = A$ sen $(\omega t+\phi_0)$, simplemente sustituyendo los valores obtenidos. Quedará:

$$x(t) = 0{,}75 \text{ sen}(40t + \phi_0) \qquad x <> \text{cm} \quad ; \quad t <> \text{s}$$

Debe observarse que la fase inicial ϕ_0 queda indeterminada, puesto que no podemos calcularla con los datos disponibles. Eso no significa, sin embargo, que no tomemos en cuenta su existencia.

10) La elongación es nula en un M..A.S. cada vez que el móvil pasa por el centro de equilibrio, es decir, x = 0. Como sabemos, en tal momento la velocidad debe tener su máximo valor, $\pm A\omega$. En consecuencia, sabemos que el valor 1 m/s que indica el enunciado es el valor máximo de la velocidad, tomado con signo positivo, es decir, cuando el móvil se desplaza en el sentido positivo del eje. Podemos escribir, consecuentemente

$$A\,\omega = 1 \text{ m/s}$$

Por otro lado, cuando la velocidad sea nula el móvil tendrá que estar en un extremo de su oscilación, es decir, la elongación será igual a la amplitud en ese instante:

$$A = 5 \text{ cm} = 0{,}05 \text{ m}$$

De las dos igualdades se despeja ω inmediatamente, dividiéndolas miembro a miembro:

$$\omega = \frac{A\omega}{A} = \frac{1 \ {}^{m}\!/\!{}_{s}}{0{,}05 \text{ m}} = 20 \text{ rad/s}$$

y el período es ahora inmediato, recordando $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{20} = 0{,}314 \text{ s}$$

11) Otra vez debemos emplear la relación conocida entre elongación y velocidad del móvil en el M.A.S.:

$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

Aquí conoceríamos que, cuando la elongación es $\sqrt{7}$ cm, la velocidad vale 6π m/s = 600π cm/s. De otro lado, la amplitud es A = 4 cm, de forma que sólo falta despejar la frecuencia angular ω:

$$600\pi = \omega\sqrt{4^2 - 7} = 3\omega \qquad \Rightarrow \qquad \omega = 200\pi \text{ rad/s}$$

Inmediatamente, la frecuencia:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{200\pi}{2\pi} = 100 \text{ Hz}$$

Y, al pasar por la posición de equilibrio, la velocidad debe ser máxima, como sabemos. Su valor es ± Aω, de forma que será:

$$v_{máx} = \pm 4.200\pi \text{ cm/s} = \pm 8\pi \text{ m/s} = \pm 25{,}1 \text{ m/s}$$

12) Tenemos la función elongación–tiempo definida de modo completo, salvo por la fase inicial φ_0,

$$x(t) = 6\cos(5t + \varphi_0) \qquad x <> \text{cm} \quad ; \quad t <> \text{s} \qquad (1)$$

que aparece indeterminada. Las diferencias entre los distintos movimientos que tendríamos al ir variando esa fase inicial φ_0 tendrían que ver exclusivamente con la posición inicial del móvil —por tanto, también con su velocidad inicial y su aceleración inicial —, tratándose por lo demás de movimientos idénticos. En todos ellos, la velocidad se escribiría según

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -30\,\text{sen}(5t + \varphi_0) \qquad v <> \text{cm/s} \quad ; \quad t <> \text{s} \qquad (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) permiten responder de modo inmediato a las cuestiones planteadas en el enunciado. Podemos empezar entrando con t = 0 s en cada una de ellas:

$$x(0) = x_0 = 6\cos\varphi_0 \text{ cm} \quad ; \quad v(0) = v_0 = -30\,\text{sen}\,\varphi_0 \text{ cm/s} \qquad (3)$$

y ahora usamos las expresiones de x_0 y v_0 de (3), empleando en cada caso los valores de fase inicial del enunciado para terminar el problema:

$$\varphi_0 = 0 \text{ rad} \quad \Rightarrow \quad x_0 = 6\cos 0 = 6 \text{ cm} \quad ; \quad v_0 = -30\,\text{sen}\,0 = 0 \text{ cm/s}$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \quad \Rightarrow \quad x_0 = 6\cos\frac{\pi}{3} = 3 \text{ cm} \quad ; \quad v_0 = -30\,\text{sen}\frac{\pi}{3} = -25{,}98 \text{ cm/s}$$

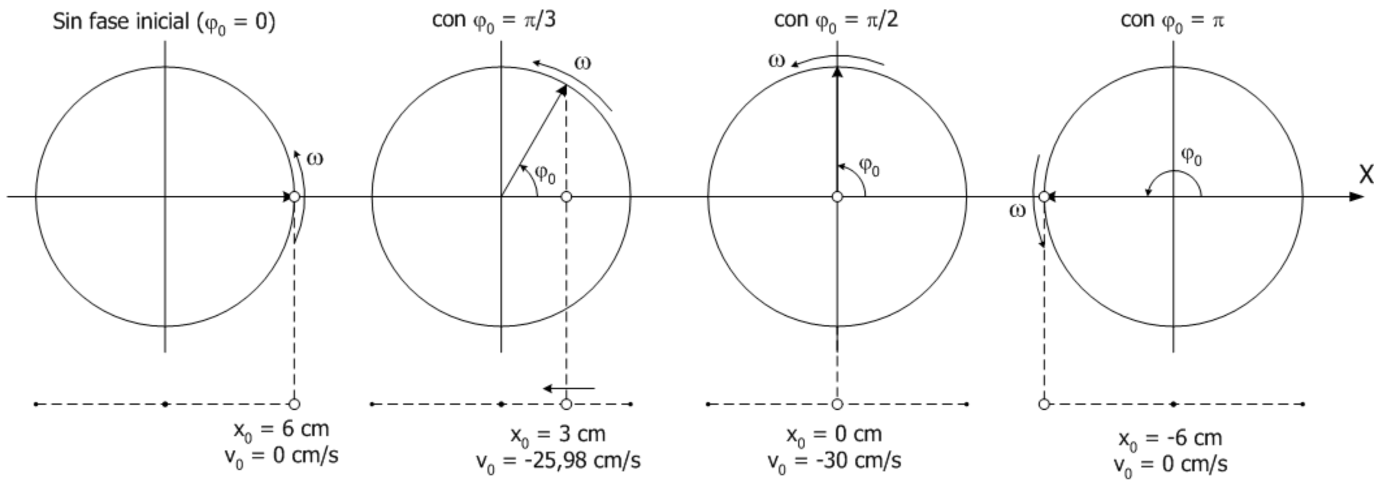
$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \quad \Rightarrow \quad x_0 = 6\cos\frac{\pi}{2} = 0 \text{ cm} \quad ; \quad v_0 = -30\,\text{sen}\frac{\pi}{2} = -30 \text{ cm/s}$$

$$\varphi_0 = \pi \text{ rad} \quad \Rightarrow \quad x_0 = 6\cos\pi = -6 \text{ cm} \quad ; \quad v_0 = -30\,\text{sen}\,\pi = 0 \text{ cm/s}$$

Un ejercicio sencillo, pero que ilustra bien las diferencias entre estos supuestos, es la representación gráfica de las funciones temporales elongación, velocidad y aceleración en cada uno de los casos: de ello se ocupa el problema siguiente.

13) Este es un ejercicio esencialmente gráfico, pero muy interesante en la medida en que describe el modo en que deben enfocarse y utilizarse las diferencias de fase entre M.A.S. que, por lo demás, son idénticos, tales como los que hemos descrito en el problema anterior.

Vamos a empezar por mostrar las distintas escenas iniciales, indicando la situación del fasor en cada una de ellas:



Situación en el instante t = 0 s en cada uno de los supuestos del enunciado. Téngase presente que la proyección del extremo del fasor se hace sobre el eje X, dirección de las oscilaciones

En cada una de estas figuras aparece, como decimos, la situación inicial del fasor: debe mirarse con atención como se muestra la fase inicial φ_0 correspondiente. También tratamos de hacer notar la proyección del extremo del fasor sobre el eje X, donde se suponen las oscilaciones; para que resulte más claro, se han representado debajo lo que serían las oscilaciones limpias, sin el fasor utilizado como medio para producirlas. En cada supuesto, se recoge la posición inicial, x_0, y la velocidad inicial, v_0. Todos los valores señalados son los que hemos obtenido ya en el ejercicio anterior.

La única diferencia, entonces, entre los cuatro movimientos cuyo instante inicial se representa es una cuestión de ventaja (o retraso) de unos respecto a otros. Si, como parece lógico, tomamos al primero como referencia, cuando la fase inicial es cero, entonces debemos entender que su fasor, girando con la misma velocidad angular ω = 5 rad/s que todos los demás, **lleva en todo momento un retraso de fase de π/3 rad = 60° respecto al segundo de los movimientos, un retraso de fase de π/2 rad = 90° respecto al segundo y, finalmente, un retraso de fase de π rad = 180° respecto al último de ellos.**

El paso siguiente, y muy importante de este tipo de discusiones, es el modo en que debemos conectar la diferencia de fase entre dos movimientos con el retraso — o adelanto — temporal de uno respecto al otro. Hablamos constantemente de una ventaja o retraso de fase, y rara vez lo hacemos de la traducción temporal de ese adelanto o retraso, lo que seguramente sería más intuitivo. Pues bien, la respuesta a esta cuestión es simple: basta emplearla expresión

$$\delta t = \frac{\delta\varphi}{\omega} \qquad (3)$$

donde $\delta\varphi$ es la diferencia de fase entre los dos movimientos y δt el adelanto (o retraso) temporal entre uno y otro. La lógica de esta expresión es bastante obvia: simplemente dividimos la ventaja angular (¿qué otra cosa es la diferencia de fase?) de un fasor respecto a otro por la velocidad angular ω con la que giran ambos; el cociente nos dice el tiempo que es necesario para que cualquiera de los fasores gire el ángulo $\delta\varphi$.

Así, en el caso que nos ocupa, la oscilación correspondiente al caso b), x(t) = 6 cos (5t + π/3), tiene un adelanto de fase $\delta\varphi = \pi/3$ respecto al caso a), con fase inicial nula, x(t) = 6 cos 5t. Eso implica que la oscilación b) tiene una ventaja temporal de valor

$$\delta t = \frac{\pi/3}{5} = \frac{\pi}{15} = 0{,}209\ \mathrm{s} \qquad (4)$$

respecto a la oscilación a), sin fase inicial. Es decir, el oscilador b) llega a todas partes 0,209 s antes de que lo haga el oscilador a).

De idéntica manera, las ventajas temporales que tienen los osciladores c) y d), siempre respecto del oscilador a) sin fase inicial, valdrían:

Oscilador c) $$\delta t = \frac{\pi/2}{5} = \frac{\pi}{10} = 0{,}314\ \mathrm{s} \qquad (5)$$

Oscilador d) $$\delta t = \frac{\pi}{5} = 0{,}628\ \mathrm{s} \qquad (6)$$

que son, respectivamente, ¼ T (un cuarto de período) y ½ T (medio período). Para comprender esto mejor, recordemos que el período T es el tiempo que precisa una oscilación completa, lo que coincide evidentemente con el tiempo que el fasor tarda en girar una vuelta completa: hablar de período en el giro **uniforme** del fasor es lo mismo que hablar de período del oscilador, ambos con el valor

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

así que, como resulta fácil de comprender, una diferencia de fase de $\pi/2$ rad — un cuarto de vuelta de fasor — termina significando una diferencia temporal de

$$\delta t = \frac{\delta\varphi}{\omega} = \frac{\pi/2}{2\pi/T} = \frac{1}{4}T$$

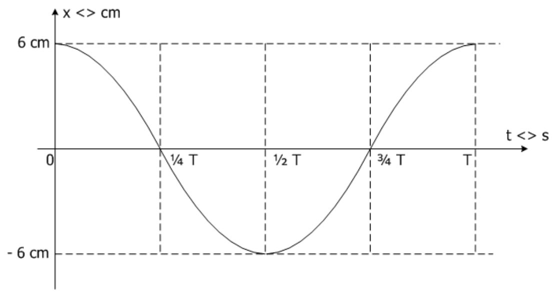
mientras que una diferencia de fase de π rad — media vuelta de fasor — termina significando una diferencia temporal de

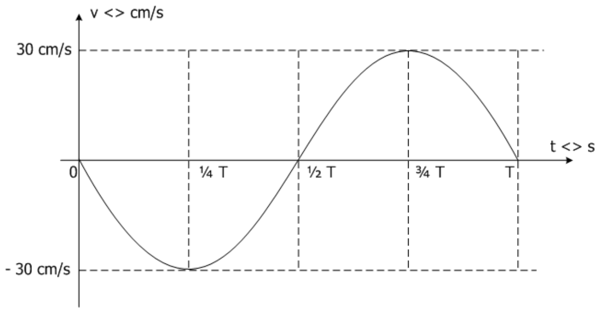
$$\delta t = \frac{\delta\varphi}{\omega} = \frac{\pi}{2\pi/T} = \frac{1}{2}T$$

Así, los casos de desfase $\pi/2$, π, $3\pi/2$,... se identifican de modo inmediato con retrasos (o adelantos) temporales de ¼ T, ½ T, ¾ T,... . De cualquier forma, el cálculo de la diferencia temporal entre dos movimientos armónicos desfasados se consigue mediante (3), y a ella habría que remitirse para casos de desfase de valores arbitrarios.

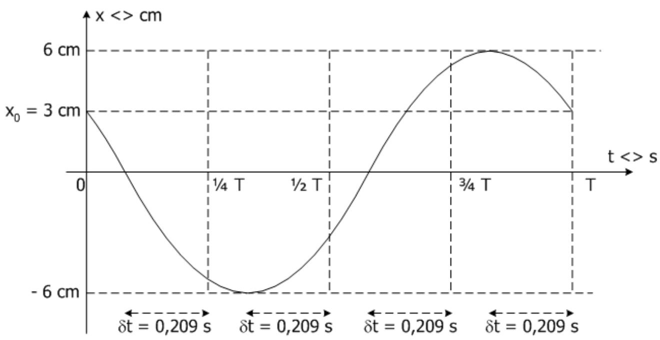
Entendido todo lo anterior, las gráficas temporales de elongación y velocidad de los cuatro osciladores propuestos se recogen a continuación (dejamos las de aceleración para el alumno). Esencialmente, el modo de hacerlo es representar las primeras, que corresponden al caso a) sin fase inicial y, a partir de ellas, conseguir las demás “desplazando” cada gráfica a la izquierda, a lo largo del eje de tiempo, las diferencias temporales que hemos ido encontrando en las ecuaciones (4), (5) y (6). Por supuesto, ya que se trata en todo caso de funciones periódicas, basta obtener la representación a lo largo del primer período: a partir de ahí, cada una de las gráficas se repite, período a período, de forma indefinida.

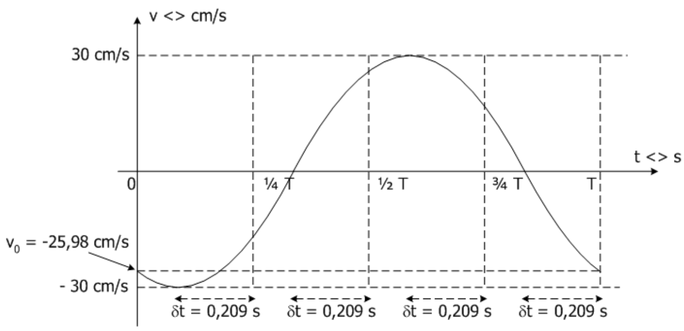
Estas son las correspondientes al caso a), sin fase inicial:



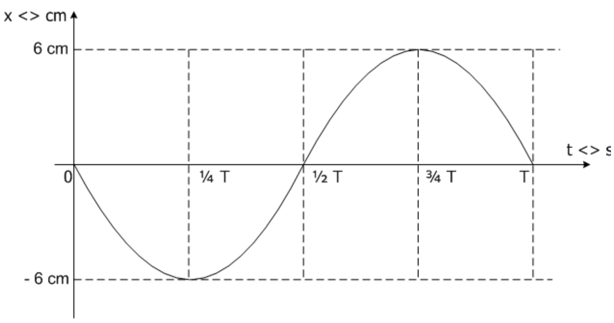


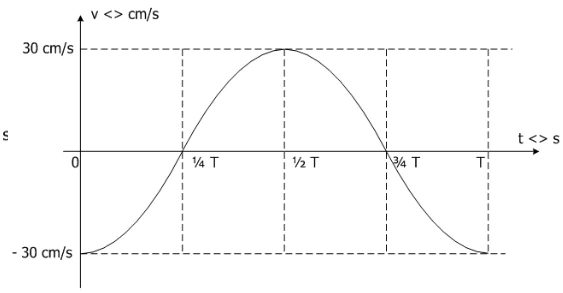
y ahora las que corresponden al caso b), con fase inicial de $\pi/3$ y adelanto temporal de 0,209 s respecto a las anteriores:



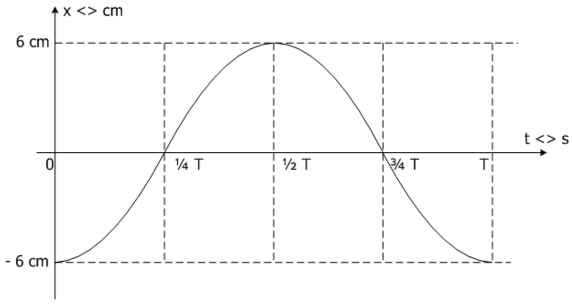


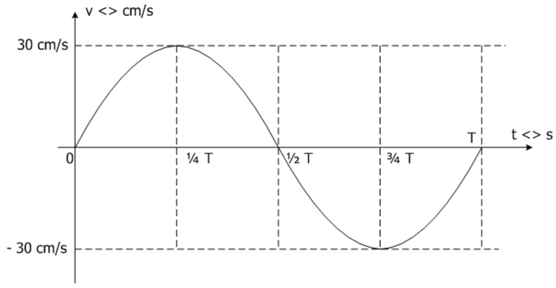
En tercer lugar, las relativas al caso c), con fase inicial de $\pi/2$ y adelanto de un cuarto de período respecto a las primeras:





y, finalmente, las del caso d), con fase inicial π y adelanto de medio período respecto al caso a):





de modo que solo resta una detenida y cuidadosa observación de las gráficas. Háganse después las correspondientes a la aceleración en cada caso, algo que no debería resultar difícil teniendo en cuenta la conocida ecuación fundamental $a = -\omega^2 x$.

14) Este ejercicio requiere un comentario de carácter genérico acerca de las ecuaciones elongación–tiempo que encontramos usualmente al trabajar con movimientos armónicos simples: lo más frecuente es que aparezcan bajo cualquiera de las formas:

$$x(t) = A\ \mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0) \qquad (1)$$

o bien

$$x(t) = A\ \cos(\omega t + \varphi_0) \qquad (2)$$

siendo el caso del problema anterior, por ejemplo, correspondiente a la segunda de ellas. ¿Existe alguna diferencia esencial entre ambos movimientos? La respuesta a estas preguntas es **no**: la única diferencia a resaltar entre los M.A.S. (1) y (2) es una simple cuestión de fase; más concretamente, una ventaja de fase de 90º de (2) con respecto a (1), lo que quiere decir que el fasor que usamos en el movimiento (2) lleva 90º de adelanto respecto al que usamos en el movimiento (1), así que el móvil descrito en (2) lo hace todo — pasa por el origen, llega a los extremos de su movimiento, etc.. — ¼ T (un cuarto de período) antes que (1). Esto puede entenderse mejor si se recuerda la relación

$$\cos\alpha = \mathrm{sen}(\alpha + \frac{\pi}{2})$$

que muestra como la función coseno lleva un adelanto de fase de $\pi/2$ respecto a la función seno.

Recordando cuestiones explicadas en el problema anterior, podemos ver cuál es el retraso temporal de la oscilación descrita en (1) respecto de la descrita en (2): ya que el retraso de fase es $\delta\phi = \pi/2$, tendríamos

$$\delta t = \frac{\pi/2}{\omega} = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{1}{4}T$$

resultado fácil de entender si se recuerda que $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, y que justifica alguna afirmación hecha más arriba: sabemos ahora, pues, que la oscilación (2) lleva ¼ T de ventaja respecto a la oscilación (1).

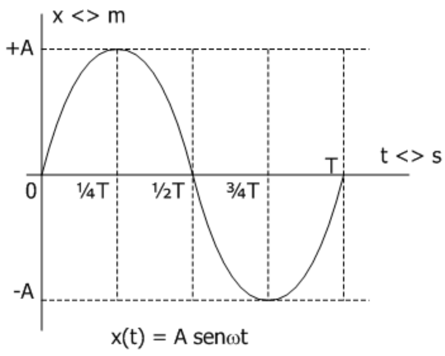
De modo que, en adelante, aceptaremos indistintamente las funciones seno y/o coseno en las ecuaciones de un movimiento armónico: de hecho, también una combinación lineal de ambas es finalmente otro M.A.S., como ya se probó en algún ejercicio anterior.

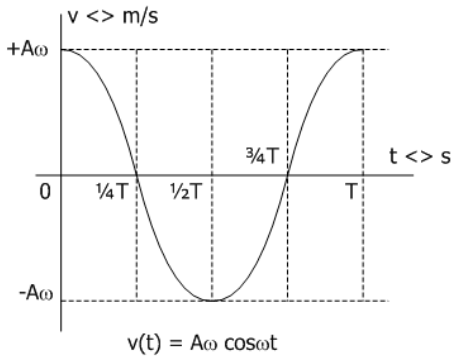
Para reforzar los párrafos anteriores, veamos ahora cuáles serían las ecuaciones de elongación, velocidad y aceleración en los dos casos propuestos en el enunciado: se trata de casos sencillos que manejan funciones seno y coseno, sin fase inicial:

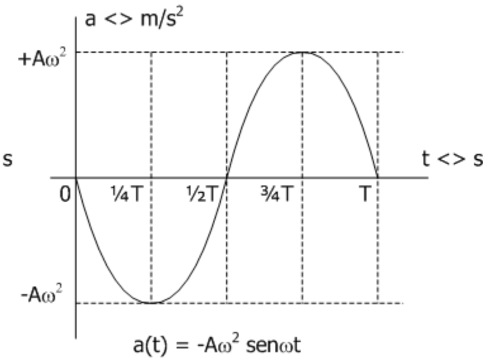
$$\left.\begin{aligned} x(t) &= A\,\text{sen}\,\omega t \\ v(t) &= \frac{dx(t)}{dt} = A\omega\,\cos\omega t \\ a(t) &= \frac{dv(t)}{dt} = -A\omega^2\,\text{sen}\,\omega t \end{aligned}\right\}\ (3) \qquad \left.\begin{aligned} x(t) &= A\cos\omega t \\ v(t) &= \frac{dx(t)}{dt} = -A\omega\,\text{sen}\,\omega t \\ a(t) &= \frac{dv(t)}{dt} = -A\omega^2\,\cos\omega t \end{aligned}\right\}$$

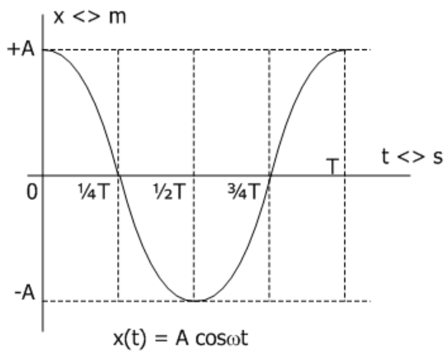
(4)

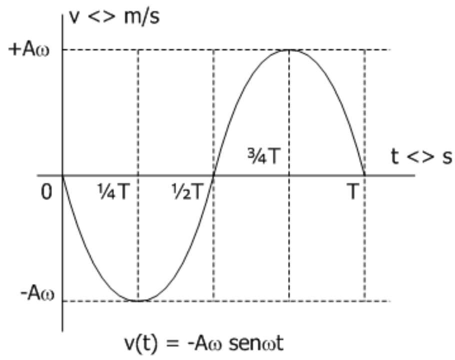
ecuaciones que ahora representamos gráficamente, contra el tiempo, de modo que puede verse cómo todo lo que sucede en el movimiento descrito por las ecuaciones (3) lo hace un cuarto de período antes el móvil descrito en las ecuaciones (4):

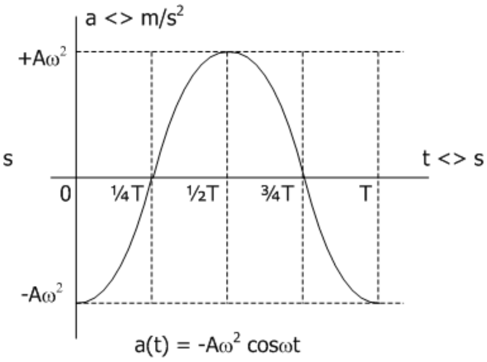












15) Escribiendo la elongación de un M.A.S. en términos de

$$x(t) = A\ \text{sen}(\omega t + \phi_0)$$

tal como hemos hecho nosotros, decir que al tiempo t = 0 s el móvil se halla en el origen y moviéndose en sentido positivo significa que la fase inicial ϕ_0 es nula (o vale un número entero de veces 2π, lo que viene a ser lo mismo). Por lo tanto, la ecuación de elongaciones quedaría

$$x(t) = A\ \text{sen}\,\omega t$$

y, como sabemos que A = 8 mm y ν = 5 Hz (de modo que $\omega = 2\pi\nu = 10\pi$ rad/s), las ecuaciones de elongación, velocidad y aceleración quedarán

$$x(t) = 0{,}8\ \text{sen}10\pi t\ \text{cm}$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 8\pi\ \cos 10\pi t\ \text{cm/s}$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -80\pi^2\ \text{sen}10\pi t\ \text{cm/s}^2$$

con lo que el problema estaría resuelto. Aprovecharemos, sin embargo, para mostrar de nuevo que las ecuaciones de elongación pueden escribirse indistintamente empleando senos o cosenos en su formulación: en efecto, si escribiésemos la elongación del M.A.S. como

$$x(t) = A\ \cos(\omega t + \phi_0)$$

entonces las condiciones iniciales de elongación nula y velocidad positiva al tiempo t = 0 s requieren que ϕ_0 tome el valor $-\pi/2$ rad (lo cual no es sino un modo de decir que la función seno está retrasada $\pi/2$ rad respecto a la función coseno). La respuesta alternativa al problema sería, entonces:

$$x(t) = 0{,}8\ \cos(10\pi t - \frac{\pi}{2})\ \text{cm}$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -8\pi\ \text{sen}(10\pi t - \frac{\pi}{2})\ \text{cm/s}$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -80\pi^2\ \cos(10\pi t - \frac{\pi}{2})\ \text{cm/s}^2$$

donde, como es fácil de comprobar, los valores que se obtienen para cualquier valor de tiempo, en particular para el instante inicial t = 0 s, son exactamente los mismos que en las ecuaciones escritas más arriba.

16) Como se sabe, la fuerza que debe estar aplicada sobre un cuerpo cuando este desarrolla un M.A.S. es del tipo elástico

$$F = -K x \qquad (1)$$

donde x es la distancia del cuerpo al centro de las oscilaciones y K la constante elástica correspondiente, relacionada con la masa m del cuerpo y la pulsación ω del movimiento según

$$K = m\omega^2$$

En nuestro caso, ya que la frecuencia es conocida, es inmediato obtener ω:

$$\omega = 2\pi\nu = 50\pi\ \text{rad/s}$$

y, consiguientemente, $$K = m\omega^2 = 0{,}05 . (50\pi)^2 = 1233{,}7\ \text{N/m}$$

Ya que sabemos también el valor de la máxima elongación (amplitud) A = 2 mm, podemos simplemente sustituir en (1), dando a x el máximo valor posible y obteniendo el máximo valor de la fuerza sobre el cuerpo. Prescindimos, en todo caso, del signo de la fuerza y respondemos con su máximo valor absoluto:

$$F_{máx} = 1233{,}7\ \text{N/m} . 2.10^{-3}\ \text{m} = 2{,}47\ \text{N}$$

17) En este caso conocemos directamente la constante elástica de recuperación del resorte

$$K = 2 \text{ N/m}$$

y la masa del cuerpo, m = 0,08 kg, de forma que resultará sencillo obtener ω, recordando que $K = m\omega^2$:

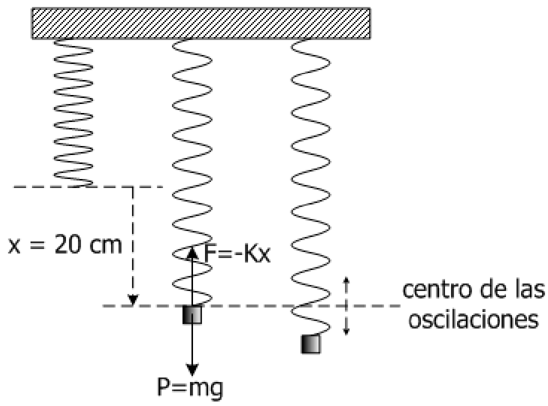
$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{2}{0,08}} = 5 \text{ rad/s}$$

con lo cual, y conociendo la elongación A = 10 cm, es inmediato escribir la ecuación pedida:

$$x(t) = 10 \text{ sen } (5t + \phi_0)$$

donde la constante de fase inicial, ϕ_0, estaría indeterminada por falta de datos acerca de las condiciones iniciales de la oscilación.

18) Hay que empezar por explicar cómo suspendemos el cuerpo del resorte: lo colocamos en el extremo libre y, sujetándolo con la mano, lo dejamos bajar suavemente e impidiendo que gane velocidad, hasta que se alcanza la situación de equilibrio en la que el peso del cuerpo y la fuerza con que el resorte tira de él hacia arriba están igualadas. La figura muestra cómo el resorte está alargado 20 cm y cuál debe ser el equilibrio de fuerzas; al escribir esa igualdad tomamos el valor absoluto de ambas fuerzas para exigir que midan lo mismo. Cuando el sistema se abandona en esa posición, queda en equilibrio



y el cuerpo en reposo hasta que se deforme el resorte 5 cm más, como pide el enunciado. Entonces se establece el M.A.S. con amplitud de 5 cm y con el centro de oscilaciones en el lugar en que se alcanzó el equilibrio entre peso y fuerza de recuperación del resorte (no en el que corresponde a la longitud natural del muelle). El equilibrio de fuerzas antes de introducir la deformación de 5 cm es:

$$\left| -K\,x \right| = mg$$

de donde podemos obtener el valor de K:

$$K = \frac{mg}{x} = \frac{0,3.10}{0,2} = 15 \text{ N/m}$$

y, con K, es sencillo hallar el período de las oscilaciones:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,3}{15}} = 0,89 \text{ s}$$

Por otro lado, la máxima velocidad en un M.A.S. se alcanza en el centro de las oscilaciones, como sabemos bien, y su valor es ± $A\omega$. Por tanto:

$$v_{máx} = \pm A\,\omega = \pm A\,\frac{2\pi}{T} = \pm 5\,\frac{2\pi}{0,89} = \pm 35,3 \text{ cm/s}$$

19) Si se emplean 6 s en realizar 10 oscilaciones, el período T será $T = \frac{6}{10} = 0,6 \text{ s}$

Por otro lado, recordemos $$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

donde conoceríamos T = 0,6 s y también m = 0,25 kg. Por tanto, es inmediato obtener K:

$$K = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = \frac{4\pi^2 .0,25}{0,6^2} = 27,42\ N/m$$

Para responder a la segunda cuestión podemos referirnos a la figura del problema anterior, ya que se trata exactamente de la misma situación. Podemos utilizar de nuevo

$$\left| -K\,x \right| = mg$$

lo que daría esta vez

$$x = \frac{mg}{K} = \frac{2,5\ N}{27,42\ N/m} = 9,12.10^{-2}\ m = 9,12\ cm$$

de manera que la longitud del resorte con el cuerpo suspendido será la suma de la longitud normal más el alargamiento

$$30\ cm + 9,12\ cm = 39,12\ cm$$

20) Cuando nos dicen que desde la división 0 N hasta la división 20 N hay una distancia de 10 cm nos están proporcionando la constante K del resorte. En efecto, sabemos que un alargamiento del resorte de valor 10 cm corresponde a una fuerza deformante de 20 N. Como la fuerza F que deforma el resorte (*) y la deformación x resultante están relacionadas según

$$F = K\,x$$

es fácil obtener la constante K de recuperación del dinamómetro. Sería

$$K = \frac{F}{x} = \frac{20\ N}{0,1\ m} = 200\ N/m$$

Con este dato podemos discutir cómo serán las oscilaciones de un cuerpo suspendido del resorte del dinamómetro. Bastará recordar que el período de las oscilaciones está dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,8}{200}} = 0,397\ s$$

y la frecuencia, por tanto, $$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,397} = 2,52\ Hz$$

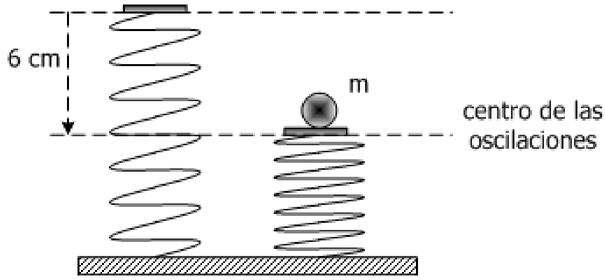
Por último, hay que recordar que la aceleración máxima del móvil en un M.A.S. corresponde al paso por las posiciones extremas de la oscilación, y su valor es

$$a_{máx} = \pm A\,\omega^2 = \pm\ A\,(2\pi\nu)^2 = \pm\,1\ cm.(2\pi.2,52)^2 = \pm 250\ cm/s^2$$

donde se ha hecho uso de la amplitud dada en el enunciado y de la conocida relación entre frecuencia ν y pulsación ω.

(*) No se debe confundir con la fuerza que el resorte aplica sobre el objeto sujeto a su extremo, que es F = – Kx (igual y de sentido contrario a la que deforma el resorte, según la ley de acción y reacción).

21) Un resorte se mantiene vertical apoyado en el suelo. Se coloca un cuerpo de masa m en reposo sobre el resorte y se observa que éste se acorta 6 cm. Si empujamos ligeramente el cuerpo hacia abajo y lo soltamos, ¿cuál será la frecuencia de las oscilaciones? ¿y si la masa del cuerpo fuese 2m?



Se trata de la misma situación discutida en los problemas anteriores 18 y 19. Como en ellos, al colocar el cuerpo de masa m sobre el resorte se alcanza un equilibrio entre dos fuerzas que actúan sobre el cuerpo: su peso mg y la fuerza de recuperación del resorte, proporcional a la deformación del mismo. El equilibrio requiere que

$$\left| -K\,x \right| = mg$$

donde, a pesar de que no conocemos la masa m del cuerpo, siempre podemos obtener el cociente m/K, que es en realidad lo que nos interesa, como veremos enseguida. Sería:

$$\frac{m}{K} = \frac{0{,}06}{10} = 6.10^{-3}\ \mathrm{kg.m}/\mathrm{N}$$

Recordemos ahora que $$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \qquad (1)$$

para comprender cómo, efectivamente, no se trata tanto de conocer m o K, sino más bien su cociente. El período de las oscilaciones sería

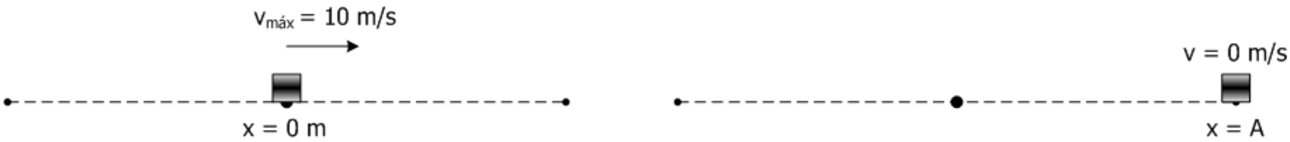
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{6.10^{-3}} = 0{,}49\ \mathrm{s}$$

y, por tanto, la frecuencia es $$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}49} = 2{,}05\ \mathrm{Hz}$$

La última cuestión se refiere al cambio que produciría en la frecuencia doblar el valor de la masa. La respuesta es simple: en (1), el valor del radicando sería el doble, 2m/K en lugar de m/K; por tanto, el nuevo período sería $\sqrt{2}$ = 1,41 veces mayor. La frecuencia, inversa del período, se volvería 1,41 veces más pequeña, de forma que su nuevo valor sería

$$\nu = \frac{2{,}05}{\sqrt{2}} = 1{,}45\ \mathrm{Hz}$$

22) Estamos ante una oscilación que tiene lugar en el eje X, controlada por una fuerza elástica F = – Kx, con la constante K = 4 N/m. De acuerdo con esta ecuación, el centro de las oscilaciones es el origen mismo, x = 0, puesto que ahí es donde la fuerza sobre el móvil resulta ser nula. La figura de la izquierda muestra la situación inicial descrita en el enunciado,
donde, al tratarse del centro de las oscilaciones, la velocidad del móvil toma su valor máximo



que, como sabemos, es $v_{máx}$ = Aω. En consecuencia, podemos escribir una primera ecuación

$$v_{máx} = 10\ \mathrm{m/s} = A\,\omega \qquad (1)$$

en la que no conocemos A ni ω, de forma que precisaremos una segunda ecuación para obtener respuestas: la conseguiremos recordando que K = $m\omega^2$, de forma que, con lo valores de K y de m del enunciado, es inmediato hallar el valor de la pulsación ω:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{4}{0{,}02}} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}\ \text{rad/s}$$

valor que, llevado a (1), nos dará la amplitud de la oscilación, que es exactamente lo que se demanda en el enunciado: la máxima distancia a la que el móvil se aleja del origen, es decir, la máxima elongación. La situación en ese momento se refleja en la figura de la derecha, en la que el móvil está en el extremo de su trayectoria, con velocidad v = 0 m/s y posición x = A. El valor de la amplitud pedida resulta ser

$$A = \frac{10\ \text{m}/\text{s}}{10\sqrt{2}\ \text{rad}/\text{s}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{m} = 0{,}707\ \text{m}$$

y el problema estaría hecho. En realidad, un enfoque diferente al que se ha seguido aquí hubiera sido probablemente más adecuado a este ejercicio: estamos ante un claro ejemplo de conversión de energía cinética en energía potencial elástica.