1. Vibraciones y Ondas

1.1. Movimiento armónico

1. ¿De qué magnitudes dependen los valores máximos de la velocidad y de la aceleración en un movimiento armónico simple? ¿En qué posiciones de la trayectoria se consiguen estos valores? Justifica la respuesta.

Solución:

La velocidad de un movimiento armónico simple es: $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$ y la velocidad máxima $v_{max} = \pm A\omega$, que depende de la amplitud y de la frecuencia. Será máxima en x=0, en el origen.

La aceleración de un movimiento armónico simple es: $v = \omega^2 x$ y la aceleración máxima $a_{max} = \pm A\omega^2$, que depende de la amplitud y del cuadrado de la frecuencia. Será máxima en x=A, en los extremos.

2. Explica como varía la energía mecánica de un oscilador lineal si:

a) Se duplica la amplitud.

b) Se duplica la frecuencia.

c) Se duplica la amplitud y se reduce la frecuencia a la mitad.

Razona la respuesta en todos los apanados.

Solución:

La Energía mecánica es $E_m = \dfrac{1}{2}kA^2 \Rightarrow E_m = \dfrac{1}{2}m4\pi^2 f^2 A^2$.

- Si se duplica la amplitud la energía mecánica se multiplica por cuatro.
- Si se duplica la frecuencia la energía mecánica se multiplica por cuatro.
- Si se duplica la amplitud y se divide la frecuencia a la mitad, la energía mecánica se mantiene contante.

3. Al suspender de un resorte vertical una partícula de masa de 2 kg se origina en éste un alargamiento de 5 cm. Desde esta posición de equilibrio, se estira el resorte 2 cm. soltándolo a continuación para que la masa empiece a oscilar. Calcu1a:

a) La constante recuperadora del resorte.

b) La frecuencia con que oscila la masa.

c) El valor de la velocidad máxima de oscilación de la masa.

d) El valor de la aceleración de la masa cuando se encuentra a l cm por encima de la posición de equilibrio.

Solución:

a) La constante recuperadora se calcula a partir de la ley de Hooke:

$F = k\Delta x \Rightarrow 2 \cdot 9,8 = K \cdot 5 \cdot 10^{-2} \Rightarrow \boxed{k = 392 \text{ N/m}}$

b) La frecuencia depende de la constante recuperadora y de la masa.

$k = m\omega^2 \Rightarrow f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}} \Rightarrow \boxed{f = 2,23 \text{ Hz}}$ y $\omega = 14$ rad/s.

c) la velocidad máxima de oscilación es: $v_{max} = \pm A\omega$

$\Rightarrow v_{max} = \pm 2 \cdot 10^{-2} \cdot 14 \Rightarrow \boxed{v_{max} = \pm 0,28 \text{ m/s}}$

d) La aceleración en función de la posición $a = -\omega^2 x$

$\Rightarrow a = 2 \cdot 10^{-2} \cdot 14^2 \Rightarrow \boxed{a = -1,96 \text{ m/s}^2}$

4. Una partícula, cuya masa es 50 g, se mueve con movimiento armónico simple de periodo 0,3 s y amplitud 20 cm. Determinar:
a) Los valores de la fuerza y de la energía cinética cuando la partícula está situada a 10 cm de la posición de equilibrio.
b) La variación de energía potencial cuando la partícula pasa de estar situada a 10 cm a estar situada a 20 cm de la posición de equilibrio.
Solución:

a) La F y la Ec dependen de x: $F = -kx$ y $E_c = \dfrac{1}{2}(a^2 - x^2)$. Y es presiso calcular primero la constante elástica o recuperadora.

$k = m\omega^2 \Rightarrow k = 0,05\left(\dfrac{2\pi}{0,3}\right)^2 \Rightarrow k = 21,93$ N/m

$\Rightarrow F = -21,93 \cdot 0,1 \Rightarrow \boxed{F = -2,193 \text{ N}}$

$\Rightarrow E_c = \dfrac{1}{2}21,93(0,2^2 - 0,1^2) \Rightarrow \boxed{E_c = 0,33 \text{ J}}$

b) La variación de la energía potencial se puede calcular de dos maneras:

b1) $\Delta Ep = Ep_f - Ep_0 \Rightarrow \Delta Ep = \dfrac{1}{2}kx_f^2 - \dfrac{1}{2}kx_0^2 \Rightarrow \Delta Ep = \dfrac{1}{2}k(x_f^2 - x_0^2) \Rightarrow$
$\Delta Ep = \dfrac{1}{2}21,93(0,2^2 - 0,1^2) \Rightarrow \boxed{\Delta Ep = 0,33 \text{ J}}$

b2) Según el teorema de la conservación de la energía mecánica el aumento de energía potencial se debe a la disminución de la energia cinética: $\Delta Ep = -\Delta Ec \Rightarrow \Delta Ep = Ec_0 - Ec_f \Rightarrow \Delta Ep = \dfrac{1}{2}k(A^2 - x^2) - 0$ y da lo mismo.

5. Un oscilador armónico constituido por un muelle de masa despreciable, y una masa en el extremo de valor 40 g, tiene un periodo de oscilación de 2 s.
a) ¿Cuál debe ser la masa de un segundo oscilador, construido con un muelle idéntico al primero, para que la frecuencia de oscilación se duplique?
b) Si la amplitud de las oscilaciones en ambos osciladores es 10 cm, ¿cuánto vale, en cada caso, la máxima energía potencial del

oscilador y la máxima velocidad alcanzada por su masa?

Solución:

a) Si la constante elástica es la misma.

$$\left\{\begin{array}{lcl} T_1 & = & 2\pi\sqrt{\dfrac{m_1}{k}} \\ T_2 & = & 2\pi\sqrt{\dfrac{m_2}{k}} \end{array}\right. \Rightarrow m_2 = \frac{m_1}{4} \Rightarrow k = 0,395 \text{ N/m y } \boxed{m_2 = 10 \text{ g}}$$

b) La máxima energía potencial es la energía mecanica:

$Em = \dfrac{1}{2}kA^2$ si k y A son iguales $\Rightarrow Em = \dfrac{1}{2}0,395 \cdot 0,1^2 \Rightarrow$

$\boxed{Em = 0,002 \text{ J y la Em es cte}}$

La máxima velocidad en cada caso es:

$$v_{max} = A\omega \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} v_{max1} & = & 0,1 \cdot 2\pi \cdot 0,5 \\ v_{max2} & = & 0,1 \cdot 2\pi \cdot 1 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} v_{max1} = 0,314 \text{ m/s} \\ v_{max2} = 0,628 \text{ m/s} \end{array}}$$

6. Una pequeña esfera homogénea de masa 1,2 kg que cuelga de un resorte vertical, de masa despreciable y constante recuperadora $k = 300$ N/m, oscila libremente con una velocidad máxima de 30 cm/s. Determinar:

a) El periodo del movimiento.

b) El desplazamiento máximo de la esfera respecto de la posición de equilibrio.

c) Las energías cinética, potencial y total de la esfera cuando se encuentra en la posición de desplazamiento máximo.

Solución:

a) El periodo se calcula a partir de la constante elástica: $k = m\omega^2$

$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\dfrac{1,2}{300}} \Rightarrow \boxed{T = 0,397 \text{ s}}$ y $\omega = 15,81$ rad/s

b) La amplitud a partir de la velocidad máxima $v_{max} = A\omega$

$\Rightarrow 0,30 = A \cdot 15,81 \Rightarrow \boxed{A = 1,9 \text{ cm}}$

c) Las energías cinética, potencial y mecánica en x=A.

$$Ec = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2) \Rightarrow \boxed{Ec_{x=A} = 0 \text{ J}}$$

$$Ep = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow Ep_{x=A} = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow \boxed{Ep_{x=A} = 0,054 \text{ J}}$$

$$Em = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow Em_A = Ep_{x=A} \Rightarrow \boxed{Em = 0,054 \text{ J}}$$

7. La aceleración del movimiento de una partícula viene expresada por la relación $a = -ky$, siendo y el desplazamiento respecto a la posición de equilibrio y k una constante. ¿De qué movimiento se trata? ¿Qué representa k? ¿Cuál es la ecuación del citado

movimiento? Razona las respuestas.
Solución:
Se trata de un movimiento armónico simple porque la fuerza responsable del movimiento es proporcional y de sentido contrario al desplazamiento: $F = ma \Rightarrow F = -mky$ y $\Rightarrow F = -Ky$.
Considerando que se trata de un movimiento armónico simple: $K = m\omega^2 \Rightarrow m\omega^2 = mk$ y $k = \omega^2$.
Y la k representa la pulsación al cuadrado.
Si $a = -ky \Rightarrow \dfrac{d^2y}{dt^2} = -ky$, y la solución a esta ecuación diferencial es la del movimiento armónico simple $\boxed{y = A\,\mathrm{sen}(\omega t) \text{ siendo } w = \sqrt{k}}$ esta expresión se puede comprobar derivando la expresión dos veces:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{dy}{dt} & = & A\omega\cos(\omega t) \\ \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} & = & -A\omega^2\,\mathrm{sen}(\omega t) \end{array}\right| \Rightarrow \text{y se cumple } \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y$$

8. Una partícula que realiza un movimiento armónico simple recorre una distancia total de 20 cm en cada vibración completa y su máxima aceleración es de 50 cm/s^2.
a) ¿Cuáles son los valores de su amplitud, periodo y velocidad máxima?
b) ¿En qué posiciones de la trayectoria se consiguen los valores máximos de la velocidad y de la aceleración?
Solución:
a) La amplitud $20 = 4A \Rightarrow \boxed{A = 5\text{ cm}}$
El periodo a partir de la aceleración máxima $a_{max} = \omega^2 A \Rightarrow 50 = \omega^2 \cdot 5 \Rightarrow \omega = \sqrt{10}$ rad/s y el periodo $\boxed{T = 2\text{ s}}$
La velocidad máxima: $v_{max} = A\omega \Rightarrow v_{max} = 5\sqrt{10} \Rightarrow \boxed{v_{max} = 15,81\text{ m/s}}$
b) Los valores de la velocidad y de la aceleración en función de la posición son: $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$ y $a = -\omega^2 x$ y se comprueba fácilmente que la velocidad es máxima en el equilibrio x=0 y la aceleración es máxima en los extremos x=A.

9. Si se duplica la energía mecánica de un oscilador armónico, explique qué efecto tiene:
a) En la amplitud y la frecuencia de las oscilaciones.
b) En la velocidad y el período de oscilación.
Solución:
En ambos casos, la frecuencia y el periodo dependen de la constante recuperadora y es característica del oscilador armónico.

Sin embargo la energía $E = \frac{1}{2}kA^2$ y la velocidad $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$ dependen de la amplitud, de modo que si la energía se duplica la amplitud aumenta $\sqrt{2}$ veces y la velocidad también aumenta $\sqrt{2}$ veces.

10. Una partícula realiza un movimiento armónico simple con una amplitud de 8 cm y un periodo de 4 s. Sabiendo que en el instante inicial la partícula se encuentra en la posición de elongación máxima:
a) Determine la posición de la partícula en función del tiempo.
b) ¿Cuáles son los valores de la velocidad y de la aceleración 5 s después de que la partícula pase por un extremo de la trayectoria?
Solución:
a) La ecuación de un movimiento armónico simple es: $x = A\operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$, que sustituyendo datos: $x = 8\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{4}t + \varphi_0)$.
En el momento inicial t=0, x=8 cm $\Rightarrow 8 = 8\operatorname{sen}(\varphi_0) \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ y la posición de la partícula en función del tiempo queda: $\boxed{x = 8\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ en cm y s}}$
b) El movimiento empieza en un extremo, luego hay que determinar la v y la aceleración a los 5 s.
$v = 4\pi\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \boxed{v_5 = -4\pi \text{ cm/s}}$
$a = -2\pi^2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \boxed{a_5 = 0 \text{ cm/s}^2}$
De hecho el perido son 4 s luego en 5 s la partícula se encuentra en x=0 y tendrá velocidad máxima y aceleración nula.

11. Un punto material está animado de un movimiento armónico simple a lo largo del eje X, alrededor de su posición de equilibrio en $x = 0$. En el instante $t = 0$, el punto material está situado en $x = 0$ y se desplaza en el sentido negativo del eje X con una velocidad de 40 cm/s. La frecuencia del movimiento es de 5 Hz.
a) Determine la posición en función del tiempo.
b) Calcule la posición y la velocidad en el instante $t = 5$ s.
Solución:
En t=0, x=0 y v=-40 cm/s y la f=5 Hz.
Si f=5 Hz; $\omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = 10\pi$ rad.
Las ecuaciones de la posición y de la velocidad en función del tiempo son:
$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& A\operatorname{sen}(10\pi t + \varphi_0) \\ v &=& A \cdot 10\pi\cos(10\pi t + \varphi_0) \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{lcl} 0 &=& A\operatorname{sen}\varphi_0 \\ -40 &=& A \cdot 10\pi\cos\varphi_0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \varphi_0 = \pi \text{ rad} \\ A = 4/\pi \text{ cm} \end{array}$$
La expresión de la posición en función del tiempo es:

$\boxed{x(t) = \frac{4}{\pi}\,\mathrm{sen}(10\pi t + \pi) \text{ en cm y s}}$

b) La posición y la velocidad en t = 5 son x_5 y $v_5 \Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} x_{(t=5)} = 0 \text{ cm y} \\ v_{(t=5)} = -40 \text{ cm/s} \end{array}}$

y al cabo de 5 s el punto vuelve a estár en fase.

12. Un muelle cuya constante de elasticidad es k está unido a una masa puntual de valor m. Separando la masa de la posición de equilibrio el sistema comienza a oscilar. Determine:

a) El valor del período de las oscilaciones T y su frecuencia angular ω.

b) Las expresiones de las energías cinética, potencial y total en función de la amplitud y de la elongación del movimiento del sistema oscilante.

Solución:

Se trata de un movimínto armnónico simple de constante elástica k y masa oscilante m.

a) La constante $k = m\omega^2 = m(\frac{2\pi}{T})^2 \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

b) Las ecuaciones del movimiento son:

$x = A\,\mathrm{sen}(\omega t)$ y $v = A\omega\cos(\omega t) = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$

La energía cinética es:

$Ec = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2) = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2)$

La energía potencial es:

$Ep = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2}kx^2$

La energía mecánica total será la suma de la Ec y la Ep:

$Em = Ec + Ep = \frac{1}{2}kA^2$

13. Una partícula efectúa un movimiento armónico simple cuyo período es igual a 1 s. Sabiendo que en el instante t = 0 su elongación es 0,70 cm y su velocidad 4,39 cm/s, calcule:

a) La amplitud y la fase inicial.

b) La máxima aceleración de la partícula

Solución:

Se trata de un mas con fase inicial φ_0 y pulsación $\omega = 2\pi$

a) Las ecuaciones del movimiento son:

$x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0)$ y $v = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$ que sustituyendo en las condiciones iniciales... $0,70 = A\,\mathrm{sen}(\varphi_0)$ y $4,39 = A \cdot 2\pi\cos(\varphi_0)$

Dividiendo ambas expresiones se obtiene $\Rightarrow$ $\boxed{\varphi_0 = 0,78 \text{ rad y } A = 1 \text{ cm}}$

b) Para determinar la aceleración máxima se calcula:
$a_{max} = \pm A\omega^2 \Rightarrow \boxed{a_{max} = \pm 39,08 \text{ m/s}^2}$

14. Un cuerpo de 200 g unido a un resorte horizontal oscila, sin rozamiento, sobre una mesa, a lo largo del eje de las X, con una frecuencia angular = 8,0 rad/s. En el instante t = 0, el alargamiento del resorte es de 4 cm respecto de la posición de equilibrio y el cuerpo lleva en ese instante una velocidad de -20 cm/s. Determine:
a) La amplitud y la fase inicial del movimiento armónico simple realizado por el cuerpo.
b) La constante elástica del resorte y la energía mecánica del sistema.
Solución:
Se trata de un mas con fase inicial φ_0 y pulsación $\omega = 8$ rad/s.
a) Las ecuaciones del movimiento son:
$x = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi_0)$ y $v = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$ que sustituyendo en las condiciones iniciales... $4 = A\,\text{sen}(\varphi_0)$ y $-20 = 8A\cos(\varphi_0)$
Dividiendo ambas expresiones se obtiene $\Rightarrow \boxed{\varphi_0 = 1,01 \text{ rad y } A = 4,71 \text{ cm}}$
b) Para determinar la constante elástica y la energía mecánica:
$k = m\omega^2 \Rightarrow \boxed{k = 12,8 \text{ N/m}}$
$Em = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow \boxed{Em = 0,014 \text{ J}}$

15. Una masa de 2 kg está unida a un muelle horizontal cuya constante recuperadora es k =10 N/m. El muelle se comprime 5 cm desde la posición de equilibrio (x=0) y se deja en libertad. Determine:
a) La expresión de la posición de la masa en función del tiempo, x = x(t).
b) Los módulos de la velocidad y de la aceleración de la masa en un punto situado a 2 cm de la posición de equilibrio.
c) La fuerza recuperadora cuando la masa se encuentra en los extremos de la trayectoria.
d) La energía mecánica del sistema oscilante.
Nota: Considere que los desplazamientos respecto a la posición de equilibrio son positivos cuando el muelle está estirado.
Solución:
a) Es un mas de constante recuperadora k=10 N/m y masa oscilante m=2 kg. A partir de estos valores determinamos la pulsación ω.
$k = m\omega^2 \Rightarrow w = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y $\omega = \sqrt{5}$

La expresión de la posición en función del tiempo, x(t) es $x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0)$. Puesto que partimos de un extremo la amplitud A=5 cm y la fase inicial $\varphi_0 = -\dfrac{\pi}{2}$.

La expresión de la posición en función del tiempo es: $\boxed{x = 5\,\mathrm{sen}(\sqrt{5}t - \frac{\pi}{2})\ \mathrm{cm}}$

b) Las expresiones de la velocidad y de la aceleración son:
$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$ y $a = -\omega^2 x$ que sustituyendo para x=2 se tiene...
$\boxed{v_2 = 10,25\ \mathrm{cm/s}\ \mathrm{y}\ a_2 = -10\ \mathrm{cm}}$

c) La fuerza es proporcional y de sentido contrario al desplazamiento y el los extremos $F = \pm kA \Longrightarrow \boxed{F = \pm 0,5\ \mathrm{N}}$

d)La espresión de la energía mecánica es: $Em = \dfrac{1}{2}kA^2$ que sustituyendo valores... $\boxed{Em = 0,0125\ \mathrm{J}}$

16. Se tiene una onda armónica transversal que se propaga en una cuerda tensa. Si se reduce a la mitad su frecuencia, razone qué ocurre con: a) el periodo; b) la velocidad de propagación; c) la longitud de onda; d) la amplitud.

Solución:

a) El periodo es inverso a la frecuencia y entonces el periodo se duplica.

b) La velocidad de una onda transversal en una cuerda solo depende de la tensión de la cuerda y de su densidad lineal según la expresión $v = \sqrt{\dfrac{T}{\lambda}}$. Sin embargo en una onda estacionaria podemos disminuir a la mitad la frecuencia diminuyedo la tensión de la cuerda y entonces la velocidad disminuye a la mitad.

c) La velocidad de una onda es $v = \lambda f$ y si la frecuencia se reduce a la mitad la longitud de onda, λ se duplica.

d)La amplitud no depende de la frecuencia.

17. Una partícula de masa 3 g oscila con movimiento armónico simple de elongación en función del tiempo: $x = 0,5\cos(0,4t + 0,1)$, en unidades SI. Determine: a) La amplitud, la frecuencia, la fase inicial y la posición de la partícula en $t = 20$ s. b) Las energías cinéticas máxima y mínima de la partícula que oscila, indicando en qué posiciones se alcanzan.

Solución:

Se trata de una particula de masa m=3 g que oscila con un mas de constante recuperadora $K = m\omega^2 = 4,8 \cdot 10^{-4}$ N/m y $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = 0,0636\ \mathrm{s}^{-1}$

a) Los valores de la Amplitud, la frecuencia y la posición se deducen directamente de la expresión

$\boxed{A = 0,5 \text{ m};\ f = 0,0636 \text{ s}^{-1} \text{ y } x_{20} = -0,122 \text{ m}}$

b) El valor de la energía cinética es $Ec = \dfrac{1}{2}k(A^2 - x^2)$ y éste valor será:

- máximo cuando $x = 0$; $Ec = \dfrac{1}{2}kA^2 \Longrightarrow \boxed{Ec_{max} = 6 \cdot 10^{-5} \text{ J}}$

- mínima cuando $x = A$; $Ec = \dfrac{1}{2}k(A^2 - A^2) \Longrightarrow \boxed{Ec_{min} = 0 \text{ J}}$

18. Un bloque de 50 g, conectado a un muelle de constante elástica 35 N/m, oscila en una superficie horizontal sin rozamiento con una amplitud de 4 cm. Cuando el bloque se encuentra a 1 cm de su posición de equilibrio, calcule:
a) La fuerza ejercida sobre el bloque.
b) La aceleración del bloque.
c) La energía potencial elástica del sistema.
d) La velocidad del bloque.
Solución:

El bloque oscila con un mas y nos dan la masa, $m = 0,05$ kg, la constante elástica, $k = 35$ N/m, y la amplitud, $A = 0,04$ m.

$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \Rightarrow \omega = 26,46$ rad/s y se pide:

a) La $F_{0,01} = \pm kx \Longrightarrow \boxed{F_{0,01} = \pm 3,5 \cdot 10^{-1} \text{ N}}$

b) La $a_{0,01} = \pm \omega^2 x \Longrightarrow \boxed{a_{0,01} = \pm 7 \text{ m/s}^2}$

c) La $Ep_{0,01} = \dfrac{1}{2}kx^2 \Longrightarrow \boxed{Ep_{0,01} = 1,75 \cdot 10^{-3} \text{ J}}$

d) La $v_{0,01} = \pm \omega\sqrt{A^2 - x^2} \Longrightarrow \boxed{v_{0,01} = \pm 1,025 \text{ m/s}}$

19. a) Al colgar una masa en el extremo de un muelle en posición vertical, éste se desplaza 5 cm; ¿de qué magnitudes del sistema depende la relación entre dicho desplazamiento y la aceleración de la gravedad? b) Calcule el periodo de oscilación del sistema muelle-masa anterior si se deja oscilar en posición horizontal (sin rozamiento). Dato: aceleración de la gravedad g = 9,81 m/s^2.
Solución:

a) Cuando colgamos un cuerpo de masa m de un muelle éste experimenta un alargamiento que debe cumplir la ley de Hoooke $F = k\triangle x$; por otra parte la única fuerza que actúa es el peso y podemos escribir $\ldots mg = k\triangle x$. De aquí se desprende que la relación entre el desplazamiento y la aceleración de la gravedad solo depende de la masa y la constante elástica del muelle, porque: $\boxed{\dfrac{\triangle x}{g} = \dfrac{m}{k}}$

b) El valor de la constante elástica, $k = \dfrac{mg}{\triangle x}$.

Por otra parte $k = m\omega^2$ y despejando el periodo, $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ y sustituyendo el valor de k, tenemos que el periodo es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\dfrac{mg}{\triangle x}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\triangle x}{g}} \Rightarrow \boxed{T = 0,45 \text{ s}}$$

20. Una partícula de masa 100 g realiza un movimiento armónico simple de amplitud 3 m y cuya aceleración viene dada por la expresión $a = -9\pi^2 x$ en unidades SI. Sabiendo que se ha empezado a contar el tiempo cuando la aceleración adquiere su valor absoluto máximo en los desplazamientos positivos, determine:
a) El periodo y la constante recuperadora del sistema.
b) La expresión matemática del desplazamiento en función del tiempo $x = x(t)$.
c) Los valores absolutos de la velocidad y de la aceleración cuando el desplazamiento es la mitad del máximo.
d) Las energías cinética y potencial en el punto donde tiene velocidad máxima.
Solución:
a) Nos dan la expresión de la aceleración: $a = -9\pi^2 x$ que comparándola con la ecuación de la aceleracion de un mas: $a = -\omega^2 x$ nos permite determinar directamente ω, T, y k.
$\boxed{\omega = 3\pi \text{ rad/s}; T = \frac{2}{3} \text{ s y } k = 0,9\pi^2 \text{ N/m}}$
b) Para determinar la ecuación $x(t)$, necesitamos saber primero la fase inicial φ_0. En el origen $t = 0$, $x = A$, $v = 0$ y $a = a_{max}$
$x = 3\,\text{sen}(3\pi t + \varphi_0)$ que para $t = 0$ se tiene $3 = 3\,\text{sen}(\varphi_0)$ y se obtiene un valor de $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$ y la expresión $x(t)$ queda $\boxed{x = 3\,\text{sen}(3\pi t + \frac{\pi}{2})}$
c) Las expresiones de la velocidad y la acelración en función de x son:
$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} \Longrightarrow \boxed{v_{3/2} = 24,5 \text{ m/s}}$
$a = -9\pi^2 x \Longrightarrow \boxed{a_{3/2} = 133,24 \text{ m/s}^2}$
d) En el punto de máxima velocidad la Ec = Em y la Ep=0. $Ec = \dfrac{1}{2}kA^2$
$\Longrightarrow \boxed{Ec_{max} = 40 \text{ J y } Ep = 0 \text{ J}}$

21. Se tienen dos muelles de constantes elásticas k_1 y k_2 en cuyos extremos se disponen dos masas m_1 y m_2 respectivamente, y tal que $m_1 < m_2$. Al oscilar, las fuerzas que actúan sobre cada una de estas masas en función de la elongación aparecen representadas en

la figura-1.
a) ¿Cuál es el muelle de mayor constante elástica?
b) ¿Cuál de estas masas tendrá mayor período de oscilación?

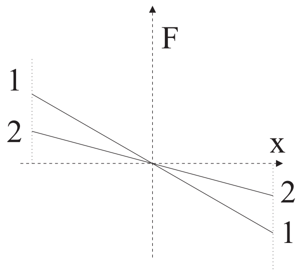

Figura 1: Ejercicio 21

Solución:

a) La gáfica representa la F en función de x, por tanto la pendiente es $-k$, y el primer muelle tendrá mayor contante elástica porque tiene mayor pendiente negativa, $k_1 > k_2$.

b) La constante elástica $k = m\omega^2 = m\dfrac{4\pi^2}{T^2}$ y cuanto mayor sea k menor sera el periodo T, entonces $T_1 < T_2$.

22. a) Determine la constante elástica k de un muelle, sabiendo que si se le aplica una fuerza de 0,75 N éste se alarga 2,5 cm respecto a su posición de equilibrio.
Unido al muelle anterior un cuerpo de masa 1,5 kg se constituye un sistema elástico que se deja oscilar libremente sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Sabiendo que en $t = 0$ el cuerpo se encuentra en la posición de máximo desplazamiento, $x = 30$ cm, respecto a su posición de equilibrio, determine: b) La expresión matemática del desplazamiento del cuerpo en función del tiempo. c) La velocidad y la aceleración máximas del cuerpo. d) Las energías cinética y potencial cuando el cuerpo se encuentra a 15 cm de la posición de equilibrio.
Solución:

a) Una $F = 0,75$ N produce un alargamiento $\triangle x = 2,5$ cm, entonces la constante elástica $k = \dfrac{F}{\triangle x} \Longrightarrow \boxed{k = 30 \text{ N}}$

b) Dado que $k = m\omega^2$ entonces $\omega = \sqrt{20}$
La ecuación del mas es: $x = 0,3\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}t + \varphi_0)$ y sabiendo que cuando $t = 0$, $x = 0,3$ se tiene $0,3 = 0,3\,\mathrm{sen}(\varphi_0)$ de donde $\varphi_0 = \pi/2$ y ya tenemos la expre-

sión del desplazamiento en función del tiempo:$\Longrightarrow$ $\boxed{x = 0,3\,\mathrm{sen}(\sqrt{20}t + \frac{\pi}{2})}$

c) Las expresiones de la velocidad y la aceleración máximas son:

$v_{max} = \pm A\omega \Longrightarrow \boxed{v_{max} = \pm 1,34 \text{ m/s}}$

$a_{max} = \pm A\omega^2 \Longrightarrow \boxed{a_{max} = \pm 6 \text{ m/s}^2}$

d) Las expresiones de la Energía cinética y de la energía potencial son:

$Ec = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2) \Longrightarrow \boxed{Ec_{x=0,15} = 1,01 \text{ J}}$

$Ep = \frac{1}{2}kx^2 \Longrightarrow \boxed{Ep_{x=0,15} = 0,34 \text{ J}}$

23. Una masa puntual de valor 150 g unida a un muelle horizontal de constante elástica $k = 65$ N·m^{-1} constituye un oscilador armónico simple. Si la amplitud del movimiento es de 5 cm, determine:

a) La expresión de la velocidad de oscilación de la masa en función de la elongación.

b) La energía potencial elástica del sistema cuando la velocidad de oscilación es nula.

c) La energía cinética del sistema cuando la velocidad de oscilación es máxima.

d) La energía cinética y la energía potencial elástica del sistema cuando el módulo de la aceleración de la masa es igual a 13 m·s^{-2}.

Solución:

Las ecuaciones del movimiento armónico simple en función del tiempo y de la posición son en ausencia de fase inicial φ_0:

$x = A\,\mathrm{sen}(\omega t)$

$v = A\omega\cos(\omega t)$ o en función de $x \Rightarrow v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$

$a = -A\omega^2\,\mathrm{sen}(\omega t)$ o en función de $x \Rightarrow a = -\omega^2 x$

Se determina ω a partir de la constante elástica $k = m\omega^2$; y despejando $\omega = 20,82$ rad/s.

a) La expresión pedida de la velocidad $\Longrightarrow$ $\boxed{v = 20,82\sqrt{(5\cdot 10^{-2})^2 - x^2} \text{ m/s}}$

b) La $Ep = \displaystyle\int_0^x kx dx$ y resuelta $Ep = \frac{1}{2}kx^2$

cuando $v = 0$; $x = A$; $Ep = \frac{1}{2}kA^2 \Longrightarrow \boxed{Ep = 0,0813 \text{ J}}$

c) La velocidad es máxima cuándo $x = 0$; y la Ec es... $Ec = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2) \Longrightarrow$ $\boxed{Ec = 0,0813 \text{ J}}$

d) A partir de la expresión de la aceleración... $x = \frac{a}{\omega^2} \Rightarrow x = 0,03$ m

La energía potencial $Ep = \frac{1}{2}kx^2 \Longrightarrow \boxed{Ep = 0,0295 \text{ J}}$

La energía cinética $Ec = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2) \Longrightarrow \boxed{Ec = 0,052 \text{ J}}$

24. Una partícula que describe un movimiento armónico simple recorre una distancia de 16 cm en cada ciclo de su movimiento y su aceleración máxima es de 48 m/s^2. Calcule: a) la frecuencia y el periodo del movimiento; b) la velocidad máxima de la partícula.
Solución:
Si recorre 16 cm en cada ciclo la amplitud $A = 4$ cm
la $a_{max} = \pm\omega^2 A; \Rightarrow \omega = \pm 34,64$ rad/s
a) El periodo y la frecuencia se obtien a partir de la pulasación $T = \frac{2\pi}{\omega}$ y $f = \frac{1}{T} \Longrightarrow \boxed{T = 0,18 \text{ s y } f = 5,51 \text{ s}^{-1}}$
b) La $v_{max} = A\omega \Longrightarrow \boxed{v_{max} = 1,38 \text{ m·s}^{-1}}$

25. Un objeto de 2,5 kg está unido a un muelle horizontal y realiza un movimiento armónico simple sobre una superficie horizontal sin rozamiento con una amplitud de 5 cm y una frecuencia de 3,3 Hz. Determine: a) El periodo del movimiento y la constante elástica del muelle. b) La velocidad máxima y la aceleración máxima del objeto.
Solución:
Primero se calcula la frecuencia angular del movimiento $\omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = 20,73$ rad/s
a) El periodo es el inverso de la frecuencia $\Longrightarrow \boxed{T = 0,30 \text{ s}}$
y la constnate recuperadora $k = m\omega^2 \Longrightarrow \boxed{k = 1074,8 \text{ N/m}}$
b) La velocidad máxima $v_{max} = \pm A\omega \Longrightarrow \boxed{v_{max} = \pm 1,037 \text{ m/s}}$
y la aceleración máxima $a_{max} = \pm A\omega^2 \Longrightarrow \boxed{a_{max} = \pm 21,5 \text{ m/s}^2}$

26. Un cuerpo de masa m está suspendido de un muelle de constante elástica k. Se tira verticalmente del cuerpo desplazando éste una distancia X respecto de su posición de equilibrio, y se le deja oscilar libremente. Si en las mismas condiciones del caso anterior él desplazamiento hubiese sido 2X, deduzca la relación que existe, en ambos casos, entre: a) las velocidades máximas del cuerpo; b) las energías mecánicas del sistema oscilante.
Solución:
a) Se trata del mismo muelle luego la constante elástica k será la misma.

$$\left\{\begin{array}{lllll} v_{max_1} & = & A_1\omega_1 & = & x\sqrt{\dfrac{k}{m}} \\ & & & & \\ v_{max_2} & = & A_2\omega_2 & = & 2x\sqrt{\dfrac{k}{m}} \end{array}\right. \Rightarrow \; v_{max_2} \; = \; 2v_{max_1}$$

b) igualmente comaparando las energías mecánicas

$$\left\{\begin{array}{lllll} E_{m_1} & = & \dfrac{1}{2}kA_1^2 & = & \dfrac{1}{2}kx^2 \\ & & & & \\ E_{m_2} & = & \dfrac{1}{2}kA_2^2 & = & \dfrac{1}{2}k(2x)^2 \end{array}\right. \Rightarrow \; E_{m_2} \; = \; 4E_{m_1}$$

27. Una partícula de 5 g de masa se mueve con un movimiento armónico simple de 6 cm de amplitud a lo largo del eje X. En el instante inicial ($t = 0$) su elongación es de 3 cm y el sentido del desplazamiento hacia el extremo positivo. Un segundo más tarde su elongación es de 6 cm por primera vez. Determine:
a) La fase inicial y la frecuencia del movimiento.
b) La función matemática que representa la elongación en función del tiempo, $x = x(t)$.
c) Los valores máximos de la velocidad y de la aceleración de la partícula, así como las posiciones donde los alcanza.
d) La fuerza que actúa sobre la partícula en $t = 1$ s y su energía mecánica.
Solución:

a) Se sustituyen valores en la ecuacón del mas para $t = 0$ s y $t = 1$ s.

$3 = 6\,\mathrm{sen}(\varphi_0) \Longrightarrow \boxed{\varphi_0 = \dfrac{\pi}{6}\ \mathrm{rad}}$

$6 = 6\,\mathrm{sen}(\omega \cdot 1 + \dfrac{\pi}{6}) \Rightarrow \omega = \dfrac{\pi}{3}$ rad; $T = 6$ s y $\boxed{f = \dfrac{1}{6}\ \mathrm{s}^{-1}}$

b) La ecuación del mas es: $\boxed{x = 6\,\mathrm{sen}(\dfrac{\pi}{3}t + \dfrac{\pi}{6})\ \mathrm{cm}}$

c) Las expresiones de la velocidad y aceleración máximas son:

$v_{max} = \pm A\omega \Longrightarrow \boxed{v_{max} = \pm 2\pi\ \mathrm{cm{\cdot}s^{-1}}\ \text{en } x = 0}$

$a_{max} = \pm A\omega^2 \Longrightarrow \boxed{a_{max} = \pm\dfrac{2\pi^2}{3}\ \mathrm{cm{\cdot}s^{-2}}\ \text{en } x = A}$

d) La fuerza que actúa sobre la partícula en $t = 1$ s, es $F = -kx = -m\omega^2 x$ y sustituyendo valores... $\boxed{F_{x=0{,}01} = 3{,}29 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{N}}$

Y la energía mecánica $Em = \dfrac{1}{2}kA^2 \Rightarrow \boxed{E_m = 9{,}87 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{J}}$

28. Una partícula oscila con movimiento armónico simple según

el eje Y en tomo al origen de coordenadas, originando una onda transversal que se propaga en el sentido positivo del eje X con una velocidad de 20 m/s, una amplitud de 0,02 m y una frecuencia de 10 Hz. Determine:
a) El periodo y la longitud de onda.
b) La expresión matemática de la onda, si en $t = 0$ la partícula situada en el origen de coordenadas está en la posición de máxima elongación positiva.
Solución:
a) El perido $T = \dfrac{1}{f} \Longrightarrow \boxed{T = 0,1 \text{ s}}$; La velocidad $v = \lambda \cdot f \Longrightarrow \boxed{\lambda = 2 \text{ m}}$
b) La ecuaión es: $x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$ Para $t = 0$; $x = A \Rightarrow A = A \operatorname{sen}(\varphi_0)$ de donde... $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$ rad y $\boxed{x(t) = 0,02 \operatorname{sen}(20\pi t + \frac{\pi}{2})}$