1. Vibraciones y Ondas

1.1. Movimiento armónico

1. Un muelle cuya constante de elasticidad es k está unido a una masa puntual de valor m. Separando la masa de la posición de equilibrio el sistema comienza a oscilar. Determine:
a) El valor del período de las oscilaciones T y su frecuencia angular ω.
b) Las expresiones de las energías cinética, potencial y total en función de la amplitud y de la elongación del movimiento del sistema oscilante.
Solución:
Se trata de un moviminto armnónico simple de constante elástica k y masa oscilante m.
a) La constante $k = m\omega^2 = m(\frac{2\pi}{T})^2 \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$
b) Las ecuaciones del movimiento son:
$x = A\,\mathrm{sen}(\omega t)$ y $v = A\omega\cos(\omega t) = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$
La energía cinética es:
$Ec = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2) = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2)$
La energía potencial es:
$Ep = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2}kx^2$
La energía mecánica total será la suma de la Ec y la Ep:
$Em = Ec + Ep = \frac{1}{2}kA^2$

2. Una partícula efectúa un movimiento armónico simple cuyo período es igual a 1 s. Sabiendo que en el instante t = 0 su elongación es 0,70 cm y su velocidad 4,39 cm/s, calcule:
a) La amplitud y la fase inicial.
b) La máxima aceleración de la partícula
Solución:
Se trata de un mas con fase inicial φ_0 y pulsación $\omega = 2\pi$
a) Las ecuaciones del movimiento son:
$x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0)$ y $v = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$ que sustituyendo en las condiciones iniciales... $0,70 = A\,\mathrm{sen}(\varphi_0)$ y $4,39 = A\cdot 2\pi\cos(\varphi_0)$
Dividiendo ambas expresiones se obtiene $\Rightarrow$ $\boxed{\varphi_0 = 0,78 \text{ rad y } A = 1 \text{ cm}}$
b) Para determinar la aceleración máxima se calcula:
$a_{max} = \pm A\omega^2 \Rightarrow$ $\boxed{a_{max} = \pm 39,08 \text{ m/s}^2}$

3. Un cuerpo de 200 g unido a un resorte horizontal oscila, sin rozamiento, sobre una mesa, a lo largo del eje de las X, con una frecuencia angular = 8,0 rad/s. En el instante t = 0, el alargamiento del resorte es de 4 cm respecto de la posición de equilibrio y el cuerpo lleva en ese instante una velocidad de -20 cm/s. Determine:
a) La amplitud y la fase inicial del movimiento armónico simple realizado por el cuerpo.
b) La constante elástica del resorte y la energía mecánica del sistema.
Solución:
Se trata de un mas con fase inicial φ_0 y pulsación $\omega = 8$ rad/s.
a) Las ecuaciones del movimiento son:
$x = A\,\mathrm{sen}(\omega t+\varphi_0)$ y $v = A\omega\cos(\omega t+\varphi_0)$ que sustituyendo en las condiciones iniciales... $4 = A\,\mathrm{sen}(\varphi_0)$ y $-20 = 8A\cos(\varphi_0)$
Dividiendo ambas expresiones se obtiene $\Rightarrow$ $\boxed{\varphi_0 = 1,01 \text{ rad y } A = 4,71 \text{ cm}}$
b) Para determinar la constante elástica y la energía mecánica:
$k = m\omega^2 \Rightarrow \boxed{k = 12,8 \text{ N/m}}$
$Em = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow \boxed{Em = 0,014 \text{ J}}$

4. Una masa de 2 kg está unida a un muelle horizontal cuya constante recuperadora es k =10 N/m. El muelle se comprime 5 cm desde la posición de equilibrio (x=0) y se deja en libertad. Determine:
a) La expresión de la posición de la masa en función del tiempo, x = x(t).
b) Los módulos de la velocidad y de la aceleración de la masa en un punto situado a 2 cm de la posición de equilibrio.
c) La fuerza recuperadora cuando la masa se encuentra en los extremos de la trayectoria.
d) La energía mecánica del sistema oscilante.
Nota: Considere que los desplazamientos respecto a la posición de equilibrio son positivos cuando el muelle está estirado.
Solución:
a) Es un mas de constante recuperadora k=10 N/m y masa oscilante m=2 kg. A partir de estos valores determinamos la pulsación ω.
$k = m\omega^2 \Rightarrow w = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y $\omega = \sqrt{5}$
La expresión de la posición en función del tiempo, x(t) es $x = A\,\mathrm{sen}(\omega t+\varphi_0)$. Puesto que partimos de un extremo la amplitud A=5 cm y la fase inicial $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$.

La expresión de la posición en función del tiempo es: $\boxed{x = 5\,\mathrm{sen}(\sqrt{5}t - \frac{\pi}{2})\ \mathrm{cm}}$
b) Las expresiones de la velocidad y de la aceleración son:
$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$ y $a = -\omega^2 x$ que sustituyendo para x=2 se tiene...
$\boxed{v_2 = 10,25\ \mathrm{cm/s}\ \text{y}\ a_2 = -10\ \mathrm{cm}}$
c) La fuerza es proporcional y de sentido contrario al desplazamiento y el los extremos $F = \pm kA \Longrightarrow \boxed{F = \pm 0,5\ \mathrm{N}}$
d)La espresión de la energía mecánica es: $Em = \dfrac{1}{2}kA^2$ que sustituyendo valores... $\boxed{Em = 0,0125\ \mathrm{J}}$

5. Se tiene una onda armónica transversal que se propaga en una cuerda tensa. Si se reduce a la mitad su frecuencia, razone qué ocurre con: a) el periodo; b) la velocidad de propagación; c) la longitud de onda; d) la amplitud.
Solución:
a) El periodo es inverso a la frecuencia y entonces el periodo se duplica.
b) La velocidad de una onda transversal en una cuerda solo depende de la tensión de la cuerda y de su densidad lineal según la expresión $v = \sqrt{\dfrac{T}{\lambda}}$. Sin embargo en una onda estacionaria podemos disminuir a la mitad la frecuencia diminuyedo la tensión de la cuerda y entonces la velocidad disminuye a la mitad.
c) La velocidad de una onda es $v = \lambda f$ y si la frecuencia se reduce a la mitad la longitud de onda, λ se duplica.
d)La amplitud no depende de la frecuencia.

6. Una partícula de masa 3 g oscila con movimiento armónico simple de elongación en función del tiempo: $x = 0,5\cos(0,4t + 0,1)$, en unidades SI. Determine: a) La amplitud, la frecuencia, la fase inicial y la posición de la partícula en $t = 20$ s. b) Las energías cinéticas máxima y mínima de la partícula que oscila, indicando en qué posiciones se alcanzan.
Solución:
Se trata de una particula de masa m=3 g que oscila con un mas de constante recuperadora $K = m\omega^2 = 4,8 \cdot 10^{-4}$ N/m y $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = 0,0636\ \mathrm{s}^{-1}$
a) Los valores de la Amplitud, la frecuencia y la posición se deducen directamente de la expresión
$\boxed{A = 0,5\ \mathrm{m};\ f = 0,0636\ \mathrm{s}^{-1}\ \text{y}\ x_{20} = -0,122\ \mathrm{m}}$
b) El valor de la energía cinética es $Ec = \dfrac{1}{2}k(A^2 - x^2)$ y éste valor será:

- máximo cuando $x = 0$; $Ec = \frac{1}{2}kA^2 \Longrightarrow \boxed{Ec_{max} = 6 \cdot 10^{-5}\ \text{J}}$
- mínima cuando $x = A$; $Ec = \frac{1}{2}k(A^2 - A^2) \Longrightarrow \boxed{Ec_{min} = 0\ \text{J}}$

7. Un bloque de 50 g, conectado a un muelle de constante elástica 35 N/m, oscila en una superficie horizontal sin rozamiento con una amplitud de 4 cm. Cuando el bloque se encuentra a 1 cm de su posición de equilibrio, calcule:
a) La fuerza ejercida sobre el bloque.
b) La aceleración del bloque.
c) La energía potencial elástica del sistema.
d) La velocidad del bloque.
Solución:
El bloque oscila con un mas y nos dan la masa, $m = 0,05$ kg, la constante elástica, $k = 35$ N/m, y la amplitud, $A = 0,04$ m.
$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega = 26,46$ rad/s y se pide:
a) La $F_{0,01} = \pm kx \Longrightarrow \boxed{F_{0,01} = \pm 3,5 \cdot 10^{-1}\ \text{N}}$
b) La $a_{0,01} = \pm\omega^2 x \Longrightarrow \boxed{a_{0,01} = \pm 7\ \text{m/s}^2}$
c) La $Ep_{0,01} = \frac{1}{2}kx^2 \Longrightarrow \boxed{Ep_{0,01} = 1,75 \cdot 10^{-3}\ \text{J}}$
d) La $v_{0,01} = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} \Longrightarrow \boxed{v_{0,01} = \pm 1,025\ \text{m/s}}$

8. a) Al colgar una masa en el extremo de un muelle en posición vertical, éste se desplaza 5 cm; ¿de qué magnitudes del sistema depende la relación entre dicho desplazamiento y la aceleración de la gravedad? b) Calcule el periodo de oscilación del sistema muelle-masa anterior si se deja oscilar en posición horizontal (sin rozamiento). Dato: aceleración de la gravedad g = 9,81 m/s^2.
Solución:
a) Cuando colgamos un cuerpo de masa m de un muelle éste experimenta un alargamiento que debe cumplir la ley de Hoooke $F = k\triangle x$; por otra parte la única fuerza que actúa es el peso y podemos escribir $\ldots mg = k\triangle x$. De aquí se desprende que la relación entre el desplazamiento y la aceleración de la gravedad solo depende de la masa y la constante elástica del muelle, porque: $\boxed{\frac{\triangle x}{g} = \frac{m}{k}}$
b) El valor de la constante elástica, $k = \frac{mg}{\triangle x}$.

Por otra parte $k = m\omega^2$ y despejando el periodo, $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ y sustituyendo el valor de k, tenemos que el periodo es:

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{\dfrac{mg}{\triangle x}}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\triangle x}{g}} \Rightarrow \boxed{T = 0,45 \text{ s}}$

9. Una partícula de masa 100 g realiza un movimiento armónico simple de amplitud 3 m y cuya aceleración viene dada por la expresión $a = -9\pi^2 x$ en unidades SI. Sabiendo que se ha empezado a contar el tiempo cuando la aceleración adquiere su valor absoluto máximo en los desplazamientos positivos, determine:
a) El periodo y la constante recuperadora del sistema.
b) La expresión matemática del desplazamiento en función del tiempo $x = x(t)$.
c) Los valores absolutos de la velocidad y de la aceleración cuando el desplazamiento es la mitad del máximo.
d) Las energías cinética y potencial en el punto donde tiene velocidad máxima.
Solución:

a) Nos dan la expresión de la aceleración: $a = -9\pi^2 x$ que comparándola con la ecuación de la aceleracion de un mas: $a = -\omega^2 x$ nos permite determinar directamente ω, T, y k.

$\boxed{\omega = 3\pi \text{ rad/s}; \; T = \frac{2}{3} \text{ s y } k = 0,9\pi^2 \text{ N/m}}$

b) Para determinar la ecuación $x(t)$, necesitamos saber primero la fase inicial φ_0. En el origen $t = 0$, $x = A$, $v = 0$ y $a = a_{max}$

$x = 3\,\text{sen}(3\pi t + \varphi_0)$ que para $t = 0$ se tiene $3 = 3\,\text{sen}(\varphi_0)$ y se obtiene un valor de $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$ y la expresión $x(t)$ queda $\boxed{x = 3\,\text{sen}(3\pi t + \dfrac{\pi}{2})}$

c) Las expresiones de la velocidad y la acelración en función de x son:

$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} \Longrightarrow \boxed{v_{3/2} = 24,5 \text{ m/s}}$

$a = -9\pi^2 x \Longrightarrow \boxed{a_{3/2} = 133,24 \text{ m/s}^2}$

d) En el punto de máxima velocidad la Ec = Em y la Ep=0. $Ec = \dfrac{1}{2}kA^2$

$\Longrightarrow \boxed{Ec_{max} = 40 \text{ J y } Ep = 0 \text{ J}}$

10. Se tienen dos muelles de constantes elásticas k_1 y k_2 en cuyos extremos se disponen dos masas m_1 y m_2 respectivamente, y tal que $m_1 < m_2$. Al oscilar, las fuerzas que actúan sobre cada una de estas masas en función de la elongación aparecen representadas en la figura-1.
a) ¿Cuál es el muelle de mayor constante elástica?
b) ¿Cuál de estas masas tendrá mayor período de oscilación?

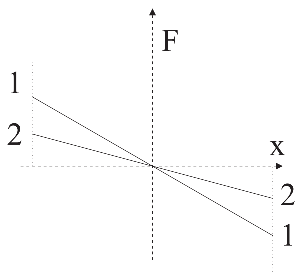

Figura 1: Ejercicio 10

Solución:
a) La gáfica representa la F en función de x, por tanto la pendiente es $-k$, y el primer muelle tendrá mayor contante elástica porque tiene mayor pendiente negativa, $k_1 > k_2$.

b) La constante elástica $k = m\omega^2 = m\dfrac{4\pi^2}{T^2}$ y cuanto mayor sea k menor sera el periodo T, entonces $T_1 < T_2$.

11. a) Determine la constante elástica k de un muelle, sabiendo que si se le aplica una fuerza de 0,75 N éste se alarga 2,5 cm respecto a su posición de equilibrio.
Unido al muelle anterior un cuerpo de masa 1,5 kg se constituye un sistema elástico que se deja oscilar libremente sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Sabiendo que en $t = 0$ el cuerpo se encuentra en la posición de máximo desplazamiento, $x = 30$ cm, respecto a su posición de equilibrio, determine: b) La expresión matemática del desplazamiento del cuerpo en función del tiempo. c) La velocidad y la aceleración máximas del cuerpo. d) Las energías cinética y potencial cuando el cuerpo se encuentra a 15 cm de la posición de equilibrio.
Solución:
a) Una $F = 0,75$ N produce un alargamiento $\triangle x = 2,5$ cm, entonces la constante elástica $k = \dfrac{F}{\triangle x} \Longrightarrow \boxed{k = 30\text{ N}}$
b) Dado que $k = m\omega^2$ entonces $\omega = \sqrt{20}$
La ecuación del mas es: $x = 0,3\,\text{sen}(\sqrt{2}t + \varphi_0)$ y sabiendo que cuando $t = 0$, $x = 0,3$ se tiene $0,3 = 0,3\,\text{sen}(\varphi_0)$ de donde $\varphi_0 = \pi/2$ y ya tenemos la expresión del desplazamiento en función del tiempo:$\Longrightarrow \boxed{x = 0,3\,\text{sen}(\sqrt{20}t + \frac{\pi}{2})}$
c) Las expresiones de la velocidad y la aceleración máximas son:

$v_{max} = \pm A\omega \Longrightarrow \boxed{v_{max} = \pm 1,34 \text{ m/s}}$
$a_{max} = \pm A\omega^2 \Longrightarrow \boxed{a_{max} = \pm 6 \text{ m/s}^2}$
d) Las expresiones de la Energía cinética y de la energía potencial son:
$Ec = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2) \Longrightarrow \boxed{Ec_{x=0,15} = 1,01 \text{ J}}$
$Ep = \frac{1}{2}kx^2 \Longrightarrow \boxed{Ep_{x=0,15} = 0,34 \text{ J}}$

12. Una masa puntual de valor 150 g unida a un muelle horizontal de constante elástica $k = 65$ N·m^{-1} constituye un oscilador armónico simple. Si la amplitud del movimiento es de 5 cm, determine:
a) La expresión de la velocidad de oscilación de la masa en función de la elongación.
b) La energía potencial elástica del sistema cuando la velocidad de oscilación es nula.
c) La energía cinética del sistema cuando la velocidad de oscilación es máxima.
d) La energía cinética y la energía potencial elástica del sistema cuando el módulo de la aceleración de la masa es igual a 13 m·s^{-2}.
Solución:
Las ecuaciones del movimiento armónico simple en función del tiempo y de la posición son en ausencia de fase inicial φ_0:
$x = A\operatorname{sen}(\omega t)$
$v = A\omega\cos(\omega t)$ o en función de $x \Rightarrow v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$
$a = -A\omega^2\operatorname{sen}(\omega t)$ o en función de $x \Rightarrow a = -\omega^2 x$
Se determina ω a partir de la constante elástica $k = m\omega^2$; y despejando $\omega = 20,82$ rad/s.
a) La expresión pedida de la velocidad $\Longrightarrow \boxed{v = 20,82\sqrt{(5\cdot 10^{-2})^2 - x^2} \text{ m/s}}$
b) La $Ep = \int_0^x kxdx$ y resuelta $Ep = \frac{1}{2}kx^2$
cuando $v = 0$; $x = A$; $Ep = \frac{1}{2}kA^2 \Longrightarrow \boxed{Ep = 0,0813 \text{ J}}$
c) La velocidad es máxima cuándo $x = 0$; y la Ec es... $Ec = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2) \Longrightarrow$
$\boxed{Ec = 0,0813 \text{ J}}$
d) A partir de la expresión de la aceleración... $x = \frac{a}{\omega^2} \Rightarrow x = 0,03$ m
La energía potencial $Ep = \frac{1}{2}kx^2 \Longrightarrow \boxed{Ep = 0,0295 \text{ J}}$
La energía cinética $Ec = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2) \Longrightarrow \boxed{Ec = 0,052 \text{ J}}$

13. Una partícula que describe un movimiento armónico simple

recorre una distancia de 16 cm en cada ciclo de su movimiento y su aceleración máxima es de 48 m/s^2. Calcule: a) la frecuencia y el periodo del movimiento; b) la velocidad máxima de la partícula.
Solución:
Si recorre 16 cm en cada ciclo la amplitud $A = 4$ cm
la $a_{max} = \pm\omega^2 A; \Rightarrow \omega = \pm 34,64$ rad/s
a) El periodo y la frecuencia se obtien a partir de la pulasación $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ y $f = \dfrac{1}{T} \Longrightarrow \boxed{T = 0,18 \text{ s y } f = 5,51 \text{ s}^{-1}}$
b) La $v_{max} = A\omega \Longrightarrow \boxed{v_{max} = 1,38 \text{ m·s}^{-1}}$

14. Un objeto de 2,5 kg está unido a un muelle horizontal y realiza un movimiento armónico simple sobre una superficie horizontal sin rozamiento con una amplitud de 5 cm y una frecuencia de 3,3 Hz. Determine: a) El periodo del movimiento y la constante elástica del muelle. b) La velocidad máxima y la aceleración máxima del objeto.
Solución:
Primero se calcula la frecuencia angular del movimiento $\omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = 20,73$ rad/s
a) El periodo es el inverso de la frecuencia $\Longrightarrow \boxed{T = 0,30 \text{ s}}$
y la constnate recuperadora $k = m\omega^2 \Longrightarrow \boxed{k = 1074,8 \text{ N/m}}$
b) La velocidad máxima $v_{max} = \pm A\omega \Longrightarrow \boxed{v_{max} = \pm 1,037 \text{ m/s}}$
y la aceleración máxima $a_{max} = \pm A\omega^2 \Longrightarrow \boxed{a_{max} = \pm 21,5 \text{ m/s}^2}$

15. Un cuerpo de masa m está suspendido de un muelle de constante elástica k. Se tira verticalmente del cuerpo desplazando éste una distancia X respecto de su posición de equilibrio, y se le deja oscilar libremente. Si en las mismas condiciones del caso anterior él desplazamiento hubiese sido 2X, deduzca la relación que existe, en ambos casos, entre: a) las velocidades máximas del cuerpo; b) las energías mecánicas del sistema oscilante.
Solución:
a) Se trata del mismo muelle luego la constante elástica k será la misma.

$$\left\{\begin{array}{lllll} v_{max_1} & = & A_1\omega_1 & = & x\sqrt{\dfrac{k}{m}} \\ \\ v_{max_2} & = & A_2\omega_2 & = & 2x\sqrt{\dfrac{k}{m}} \end{array}\right. \Rightarrow v_{max_2} = 2v_{max_1}$$

b) igualmente comaparando las energías mecánicas

$$\left\{\begin{array}{lllll} E_{m_1} & = & \frac{1}{2}kA_1^2 & = & \frac{1}{2}kx^2 \\ E_{m_2} & = & \frac{1}{2}kA_2^2 & = & \frac{1}{2}k(2x)^2 \end{array}\right. \Rightarrow E_{m_2} = 4E_{m_1}$$

16. Una partícula de 5 g de masa se mueve con un movimiento armónico simple de 6 cm de amplitud a lo largo del eje X. En el instante inicial ($t = 0$) su elongación es de 3 cm y el sentido del desplazamiento hacia el extremo positivo. Un segundo más tarde su elongación es de 6 cm por primera vez. Determine:
a) La fase inicial y la frecuencia del movimiento.
b) La función matemática que representa la elongación en función del tiempo, $x = x(t)$.
c) Los valores máximos de la velocidad y de la aceleración de la partícula, así como las posiciones donde los alcanza.
d) La fuerza que actúa sobre la partícula en $t = 1$ s y su energía mecánica.
Solución:

a) Se sustituyen valores en la ecuacón del mas para $t = 0$ s y $t = 1$ s.

$3 = 6\,\text{sen}(\varphi_0) \Longrightarrow \boxed{\varphi_0 = \frac{\pi}{6}\text{ rad}}$

$6 = 6\,\text{sen}(\omega \cdot 1 + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{3}$ rad; $T = 6$ s y $\boxed{f = \frac{1}{6}\text{ s}^{-1}}$

b) La ecuación del mas es: $\boxed{x = 6\,\text{sen}(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6})\text{ cm}}$

c) Las expresiones de la velocidad y aceleración máximas son:

$v_{max} = \pm A\omega \Longrightarrow \boxed{v_{max} = \pm 2\pi\text{ cm·s}^{-1}\text{ en } x = 0}$

$a_{max} = \pm A\omega^2 \Longrightarrow \boxed{a_{max} = \pm\frac{2\pi^2}{3}\text{ cm·s}^{-2}\text{ en } x = A}$

d) La fuerza que actúa sobre la partícula en $t = 1$ s, es $F = -kx = -m\omega^2 x$ y sustituyendo valores... $\boxed{F_{x=0{,}01} = 3,29 \cdot 10^{-4}\text{ N}}$

Y la energía mecánica $Em = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow \boxed{E_m = 9,87 \cdot 10^{-6}\text{ J}}$

17. Una partícula oscila con movimiento armónico simple según el eje Y en tomo al origen de coordenadas, originando una onda transversal que se propaga en el sentido positivo del eje X con una velocidad de 20 m/s, una amplitud de 0,02 m y una frecuencia de 10 Hz. Determine:
a) El periodo y la longitud de onda.
b) La expresión matemática de la onda, si en $t = 0$ la partícula situada en el origen de coordenadas está en la posición de máxima

elongación positiva.
Solución:
a) El perido $T = \dfrac{1}{f} \Longrightarrow \boxed{T = 0,1\text{ s}}$; La velocidad $v = \lambda \cdot f \Longrightarrow \boxed{\lambda = 2\text{ m}}$
b) La ecuaión es: $x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0)$ Para $t = 0$; $x = A \Rightarrow A = A\,\mathrm{sen}(\varphi_0)$ de donde... $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$ rad y $\boxed{x(t) = 0,02\,\mathrm{sen}(20\pi t + \frac{\pi}{2})}$