

TRIGONOMETRÍA

1)

Calcula las razones trigonométricas de 75° y $\frac{\pi}{12}$ rad.

2)

Demuestra que $\sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos \alpha$.

3)

Desarrolla las expresiones de $\cos 3\alpha$ y de $\operatorname{tg} 3\alpha$ en función de las razones trigonométricas del ángulo α .

4)

Comprueba que $\cos 75^\circ + \cos 45^\circ = \cos 15^\circ$.

5)

Transforma las siguientes sumas en productos.

a) $\sin 55^\circ + \sin 15^\circ$ b) $\sin 75^\circ - \sin 35^\circ$ c) $\cos 125^\circ + \cos 85^\circ$ d) $\cos 220^\circ - \cos 20^\circ$

6)

Resuelve las siguientes ecuaciones y da los resultados en grados y en radianes.

a) $\sin x = 1$ c) $2 \cos x + 1 = 0$
b) $\operatorname{tg} x = 0$ d) $\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 1 = 0$

7)

Calcula la longitud del lado c de un triángulo ABC sabiendo que $a = 10$ cm, $\widehat{A} = 45^\circ$ y $\widehat{B} = 100^\circ$.

8)

Calcula la longitud del lado c de un triángulo ABC sabiendo que $a = 12$ cm, $b = 15$ cm y $\widehat{C} = 35^\circ$.

9)

Resuelve los siguientes triángulos y calcula sus áreas.

a) $\widehat{A} = 80^\circ$, $\widehat{B} = 40^\circ$, $a = 8$ dm c) $a = 10$ cm, $b = 15$ cm, $c = 20$ cm
b) $\widehat{A} = 80^\circ$, $a = 10$ m, $b = 5$ m d) $\widehat{A} = 75^\circ$, $b = 8$ mm, $c = 12$ mm

10)

Desarrolla en función de $\sin \alpha$ y $\cos \alpha$ la expresión de $\sin 3\alpha$.

11)

(TIC) Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas indicando todas sus soluciones en grados.

a) $\sin x = \frac{1}{2}$ c) $\operatorname{tg} x = 1$ e) $\cos x = \frac{1}{2}$ g) $\sin x = 0$
b) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ h) $1 + \cos x = 0$

12)

(TIC) Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas indicando todas sus soluciones en radianes.

a) $\sin 4x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\operatorname{tg} 3x = -1$ e) $\cos \frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$
b) $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\sin \frac{x}{2} = 0$ f) $\operatorname{tg} \frac{3x}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

13)

(TIC) Halla todas las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas.

a) $\sin x = \cos x$ b) $\sin 2x - \sin x = 0$ c) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$ d) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

14)

(TIC) Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas en el intervalo $[0^\circ, 360^\circ]$.

a) $\operatorname{tg} x + 4 \operatorname{cotg} x = 5$ b) $8 \cos 2x = 8 \cos x - 9$ c) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{cotg} x$ d) $2 \operatorname{sen}^2 x + \cos 2x = 4 \cos^2 x$

15)

(TIC) Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas comprendidas en el intervalo $[0, 2\pi]$.

a) $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{tg}^2 x = 0$

b) $2 \operatorname{sen} x + \sqrt{3} \operatorname{tg} x = 0$

16)

Resuelve los siguientes triángulos.

a) $b = 20$ cm, $c = 28$ cm, $\widehat{C} = 40^\circ$ c) $a = 3$ cm, $\widehat{B} = 30^\circ$, $c = 5$ cm e) $a = 30$ cm, $\widehat{B} = 30^\circ$, $\widehat{C} = 50^\circ$

b) $a = 41$ cm, $b = 9$ cm, $c = 40$ cm d) $a = 12$ cm, $b = 15$ cm, $\widehat{C} = 35^\circ$ f) $b = 25$ cm, $\widehat{B} = 55^\circ$, $C = 65^\circ$

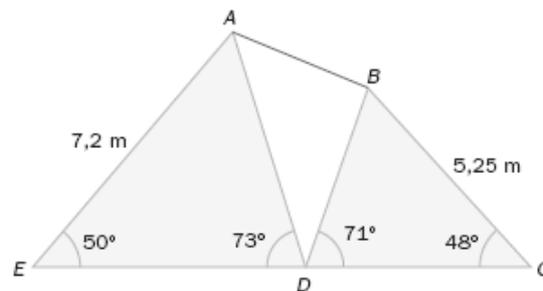
17)

Un avión vuela entre dos ciudades, A y B , que distan entre sí 75 km. Las visuales desde A y B hasta el avión forman con la horizontal ángulos de 36° y 12° de amplitud, respectivamente.

Calcula la altura a la que vuela el avión y las distancias a las que se encuentra de A y de B , suponiendo que el avión y las ciudades están sobre el mismo plano vertical.

18)

Calcula la distancia entre los puntos A y B .



19)

Calcula el área de un pentágono regular si su perímetro coincide con el de un cuadrado que tiene 144 cm^2 de área.

20)

Calcula el área del paralelogramo cuyos lados miden 10 y 15 cm, respectivamente, si uno de sus ángulos mide 35° .

21)

Decide si las siguientes medidas corresponden a las longitudes de lados de un triángulo, e indica si es acutángulo, rectángulo u obtusángulo.

a) 12, 11 y 9 cm b) 23, 14 y 8 cm c) 26, 24 y 10 cm d) 40, 30 y 20 m

22)

En una construcción, dos vigas de 10 m están soldadas por sus extremos y forman un triángulo con otra viga de 15 m. Halla los ángulos que forman entre sí.

23)

Resuelve los siguientes triángulos.

a) $a = 10$ cm, $b = 14$ cm, $c = 8$ cm

e) $a = 2,1$ cm; $b = 1,4$ cm; $c = 1,8$ cm

b) $b = 6$ cm, $c = 9$ cm, $\widehat{A} = 39^\circ 12'$

f) $a = 9$ cm, $c = 5$ cm, $\widehat{B} = 103^\circ 27'$

c) $a = 7$ cm, $\widehat{B} = 38^\circ 49'$, $\widehat{C} = 66^\circ 40'$

g) $b = 8,3$ cm; $c = 9,1$ cm; $\widehat{C} = 112^\circ 50'$

d) $a = 8$ cm, $b = 10$ cm, $\widehat{B} = 36^\circ 38'$

h) $c = 6$ cm, $\widehat{A} = 27^\circ 42'$, $\widehat{B} = 98^\circ 20'$

24)

Encuentra las soluciones para estos triángulos.

- a) $a = 12$ cm, $b = 7$ cm, $c = 6$ cm d) $b = 6$ cm; $c = 4,5$ cm; $\widehat{C} = 38^\circ 26'$
b) $a = 8$ cm, $c = 9$ cm, $\widehat{A} = 42^\circ 55'$ e) $c = 12$ cm, $\widehat{A} = 92^\circ$, $\widehat{B} = 26^\circ 28'$
c) $a = 10$ cm, $c = 9$ cm, $\widehat{A} = 72^\circ 55'$ f) $a = 11$ cm, $b = 12$ cm, $\widehat{A} = 27^\circ 36'$

25)

Resuelve las siguientes ecuaciones.

- a) $\cos x \operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$ f) $\operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x = 0$
b) $\cos 2x + \operatorname{sen} 2x = 1$ g) $\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} 2x = 0$
c) $\cos 2x - \operatorname{sen} 2x = 0$ h) $\frac{\operatorname{sen}(60^\circ - x)}{\cos x} = 1$
d) $\operatorname{sen} 2x + \cos x = 1$ i) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \operatorname{tg} x - 1 = 0$
e) $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 2x = 0$ j) $\operatorname{sen}(x + 30^\circ) + \cos(x + 60^\circ) = 1 + \cos 2x$

26)

7. Resuelve la ecuación $\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} x$.

27)

20. Resuelve las siguientes ecuaciones:

- a) $2\operatorname{sen} 2x = 1$ b) $3\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$
c) $3\cos \frac{x}{2} = 1,5$ d) $5\operatorname{sen} 4x = 0$

28)

Resuelve las siguientes ecuaciones:

- a) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\operatorname{sen}(45^\circ + x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

29)

22. Resuelve la ecuación: $\cos x = \operatorname{sen} 2x$

30)

24. Resuelve la ecuación: $\operatorname{tg} x = \sqrt{2} \cos x$

31)

Resuelve la ecuación: $\operatorname{tg} 2x = -\operatorname{tg} x$

32)

Resuelve la ecuación: $\operatorname{sen} 2x \cos x = 3 \operatorname{sen}^2 x$

33)

Resuelve la ecuación: $\cos 2x + 5\cos x + 3 = 0$

34)

Resuelve el triángulo ABC del que se sabe que $a = 27$ m, $c = 11$ m y $B = 63^\circ$.

35)

Resuelve el triángulo ABC del que se sabe que $a = 5$ m, $b = 8$ m y $B = 54^\circ$.

36)

Resuelve el triángulo ABC del que se sabe que $a = 10$ cm, $b = 16$ cm y $\hat{A} = 30^\circ$.

37)

Resuelve el triángulo ABC del que se conocen los siguientes datos: $a = 6$ cm, $b = 9$ cm y $c = 14$ cm.

SOLUCIONES

1)

Calcula las razones trigonométricas de 75° y $\frac{\pi}{12}$ rad.

$$\text{a) } \sin 75^\circ = \sin (30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\cos 75^\circ = \cos (30^\circ + 45^\circ) = \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\text{tg } 75^\circ = \frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{6 + 2 + 2\sqrt{12}}{4} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\text{b) } \sin \frac{\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos \frac{\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\text{tg} \left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{6 + 2 - 2\sqrt{12}}{6 - 2} = 2 - \sqrt{3}$$

2)

Demuestra que $\sin \left(\alpha + \frac{3\pi}{2} \right) = -\cos \alpha$.

$$\sin \left(\alpha + \frac{3\pi}{2} \right) = \sin \alpha \cdot \cos \frac{3\pi}{2} + \cos \alpha \cdot \sin \frac{3\pi}{2} = \cos \alpha \cdot (-1) = -\cos \alpha$$

3)

Desarrolla las expresiones de $\cos 3\alpha$ y de $\text{tg } 3\alpha$ en función de las razones trigonométricas del ángulo α .

$$\begin{aligned} \cos 3\alpha &= \cos (\alpha + 2\alpha) = \cos \alpha \cos 2\alpha - \sin \alpha \sin 2\alpha = \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - \sin \alpha \cdot 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \\ &= \cos^3 \alpha - \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha - 2\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha = \cos^3 \alpha - 3\cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{tg } 3\alpha &= \text{tg} (\alpha + 2\alpha) = \frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } 2\alpha}{1 - \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } 2\alpha} = \frac{\text{tg } \alpha + \frac{2\text{tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha}}{1 - \text{tg } \alpha \cdot \frac{2\text{tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha}} = \frac{\frac{\text{tg } \alpha - \text{tg}^3 \alpha + 2\text{tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha}}{\frac{1 - \text{tg}^2 \alpha - 2\text{tg}^2 \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha}} = \frac{3\text{tg } \alpha - \text{tg}^3 \alpha}{1 - 3\text{tg}^2 \alpha} = \\ &= \frac{\text{tg } \alpha (3 - \text{tg}^2 \alpha)}{1 - 3\text{tg}^2 \alpha} \end{aligned}$$

4)

Comprueba que $\cos 75^\circ + \cos 45^\circ = \cos 15^\circ$.

$$\cos 75^\circ + \cos 45^\circ = 2\cos \frac{75^\circ + 45^\circ}{2} = 2\cos \frac{75^\circ - 45^\circ}{2} = 2\cos 60^\circ \cos 15^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cos 15^\circ = \cos 15^\circ$$

5)

Transforma las siguientes sumas en productos.

a) $\sin 55^\circ + \sin 15^\circ$ b) $\sin 75^\circ - \sin 35^\circ$ c) $\cos 125^\circ + \cos 85^\circ$ d) $\cos 220^\circ - \cos 20^\circ$

$$\text{a) } \sin 55^\circ + \sin 15^\circ = 2\sin \frac{55^\circ + 15^\circ}{2} \cos \frac{55^\circ - 15^\circ}{2} = 2\sin 35^\circ \cos 20^\circ$$

$$\text{b) } \sin 75^\circ - \sin 35^\circ = 2\cos \frac{75^\circ + 35^\circ}{2} \sin \frac{75^\circ - 35^\circ}{2} = 2\cos 55^\circ \sin 20^\circ$$

$$\text{c) } \cos 125^\circ + \cos 85^\circ = 2\cos \frac{125^\circ + 85^\circ}{2} \cos \frac{125^\circ - 85^\circ}{2} = 2\cos 105^\circ \cos 20^\circ$$

$$\text{d) } \cos 220^\circ - \cos 20^\circ = -2\sin \frac{220^\circ + 20^\circ}{2} \sin \frac{220^\circ - 20^\circ}{2} = -2\sin 120^\circ \sin 100^\circ$$

6)

Resuelve las siguientes ecuaciones y da los resultados en grados y en radianes.

a) $\text{sen } x = 1$

c) $2 \cos x + 1 = 0$

b) $\text{tg } x = 0$

d) $\sqrt{3} \text{tg } x - 1 = 0$

a) $\text{sen } x = 1$ El seno de un ángulo vale 1 únicamente en $90^\circ, 450^\circ, 810^\circ, \text{etc.}$

Por tanto: $x = 90^\circ + 360^\circ k$ con $k \in Z$ o $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ con $k \in Z$

b) $\text{tg } x = 0$ La tangente vale 0 en los ángulos $0^\circ, 180^\circ, 360^\circ, 540^\circ, \text{etc.}$

Por tanto: $x = 180^\circ k$ con $k \in Z$ o $x = \pi k$ con $k \in Z$

c) $\cos x = -\frac{1}{2}$ El coseno es negativo para los ángulos de los cuadrantes 2.º y 3.º

Por tanto: $x = 120^\circ + 360^\circ k, x = 240^\circ + 360^\circ k$ con $k \in Z$ o $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$ con $k \in Z$

d) $\text{tg } x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ La tangente es positiva para los ángulos de los cuadrantes 1.º y 3.º

Por tanto: $x = 30^\circ + 360^\circ k, x = 210^\circ + 360^\circ k$ con $k \in Z$ o $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$ con $k \in Z$

7)

Calcula la longitud del lado c de un triángulo ABC sabiendo que $a = 10 \text{ cm}$, $\widehat{A} = 45^\circ$ y $\widehat{B} = 100^\circ$.

$$\widehat{C} = 180^\circ - 100^\circ - 45^\circ = 35^\circ \Rightarrow \frac{a}{\text{sen } \widehat{A}} = \frac{c}{\text{sen } \widehat{C}} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \text{sen } \widehat{C}}{\text{sen } \widehat{A}} = \frac{10 \cdot \text{sen } 35^\circ}{\text{sen } 45^\circ} = 8,11 \text{ cm}$$

8)

Calcula la longitud del lado c de un triángulo ABC sabiendo que $a = 12 \text{ cm}$, $b = 15 \text{ cm}$ y $\widehat{C} = 35^\circ$.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C} = 12^2 + 15^2 - 2 \cdot 12 \cdot 15 \cos 35^\circ = 74,105 \Rightarrow c = 8,61 \text{ cm}$$

9)

Resuelve los siguientes triángulos y calcula sus áreas.

a) $\widehat{A} = 80^\circ, \widehat{B} = 40^\circ, a = 8 \text{ dm}$

c) $a = 10 \text{ cm}, b = 15 \text{ cm}, c = 20 \text{ cm}$

b) $\widehat{A} = 80^\circ, a = 10 \text{ m}, b = 5 \text{ m}$

d) $\widehat{A} = 75^\circ, b = 8 \text{ mm}, c = 12 \text{ mm}$

a) $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 180^\circ - 40^\circ - 80^\circ = 60^\circ$

Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{a}{\text{sen } \widehat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \widehat{B}} \Rightarrow b = \frac{a \cdot \text{sen } \widehat{B}}{\text{sen } \widehat{A}} = \frac{8 \cdot \text{sen } 40^\circ}{\text{sen } 80^\circ} = 5,22 \text{ dm}$$

$$\frac{a}{\text{sen } \widehat{A}} = \frac{c}{\text{sen } \widehat{C}} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \text{sen } \widehat{C}}{\text{sen } \widehat{A}} = \frac{8 \cdot \text{sen } 60^\circ}{\text{sen } 80^\circ} = 7,04 \text{ dm}$$

$$\text{Área: } S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \text{sen } \widehat{C} = 18,1 \text{ dm}^2$$

b) Aplicando el teorema del seno:

$$\text{sen } \widehat{B} = \frac{b \text{sen } \widehat{A}}{a} = \frac{5 \text{sen } 80^\circ}{10} = 0,492 \Rightarrow \widehat{B} = 29^\circ 29'$$

$$\widehat{C} = 180^\circ - 80^\circ - 29^\circ 29' = 70^\circ 31'$$

Por el teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C} = 10^2 + 5^2 - 2 \cdot 10 \cdot 5 \cdot \cos 70^\circ 31' = 91,65 \Rightarrow c = 9,57 \text{ m}$$

$$\text{Área: } S = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \text{sen } \widehat{B} = 23,56 \text{ m}^2$$

c) Por el teorema del coseno:

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{225 + 400 - 100}{600} = 0,875 \Rightarrow \hat{A} = 28^\circ 57'$$

$$\cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{100 + 400 - 225}{400} = 0,6875 \Rightarrow \hat{B} = 46^\circ 34'$$

$$\cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{100 + 225 - 400}{300} = -0,25 \Rightarrow \hat{C} = 104^\circ 29'$$

$$\text{Área: } S = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \hat{B} = 72,6 \text{ cm}^2$$

d) Por el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} = 8^2 + 12^2 - 2 \cdot 8 \cdot 12 \cdot \cos 75^\circ = 158,31 \Rightarrow a = 12,58 \text{ mm}$$

Aplicando el teorema del seno:

$$\sin \hat{B} = \frac{b \sin \hat{A}}{a} = \frac{8 \sin 75^\circ}{12,58} = 0,614 \Rightarrow \hat{B} = 37,88^\circ = 37^\circ 52' 45''$$

$$\hat{C} = 180^\circ - 75^\circ - 37,88^\circ = 67,12^\circ = 67^\circ 7' 12''$$

$$\text{Área: } S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \hat{A} = 46,36 \text{ mm}^2$$

10)

Desarrolla en función de $\sin \alpha$ y $\cos \alpha$ la expresión de $\sin 3\alpha$.

$$\begin{aligned} \sin 3\alpha &= \sin (\alpha + 2\alpha) = \sin \alpha \cdot \cos 2\alpha + \cos \alpha \cdot \sin 2\alpha = \\ &= \sin \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + \cos \alpha (2\sin \alpha \cos \alpha) = \\ &= \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha + 2\sin \alpha \cos^2 \alpha = 3\sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha \end{aligned}$$

11)

(TIC) Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas indicando todas sus soluciones en grados.

a) $\sin x = \frac{1}{2}$	c) $\operatorname{tg} x = 1$	e) $\cos x = \frac{1}{2}$	g) $\sin x = 0$
b) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	d) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	f) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	h) $1 + \cos x = 0$

a) $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + 360^\circ k \\ x = 150^\circ + 360^\circ k \end{cases}$	d) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 225^\circ + 360^\circ k \\ x = 315^\circ + 360^\circ k \end{cases}$	f) $\sin x = 0 \Rightarrow x = 180^\circ k$
---	--	---

b) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + 360^\circ k \\ x = 330^\circ + 360^\circ k \end{cases}$	e) $\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 120^\circ + 360^\circ k \\ x = 240^\circ + 360^\circ k \end{cases}$	g) $1 - \cos x = 0 \Rightarrow x = 360^\circ k$
--	---	---

c) $\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 45^\circ + 360^\circ k \\ x = 225^\circ + 360^\circ k \end{cases}$	f) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 150^\circ + 360^\circ k \\ x = 330^\circ + 360^\circ k \end{cases}$
--	---

12)

(TIC) Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas indicando todas sus soluciones en radianes.

a) $\sin 4x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	c) $\operatorname{tg} 3x = -1$	e) $\cos \frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$
b) $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$	d) $\sin \frac{x}{2} = 0$	f) $\operatorname{tg} \frac{3x}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

a) $\sin 4x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} 4x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k \\ 4x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{2} \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} \end{cases}$	d) $\sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = \pi k \Rightarrow x = 2\pi k$
--	--

b) $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ 2x = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \pi k \\ x = \frac{7\pi}{8} + \pi k \end{cases}$	e) $\cos \frac{x}{3} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \\ \frac{x}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\pi + 6\pi k \\ x = 4\pi + 6\pi k \end{cases}$
---	--

$$c) \operatorname{tg} 3x = -1 \Rightarrow \begin{cases} 3x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \\ 3x = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3} \\ x = \frac{7\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} \end{cases} \quad f) \operatorname{tg} \frac{3x}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3x}{4} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \\ \frac{3x}{4} = \frac{11\pi}{6} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{10\pi}{9} + \frac{8\pi k}{3} \\ x = \frac{22\pi}{9} + \frac{8\pi k}{3} \end{cases}$$

13)

(TIC) Halla todas las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas.

a) $\operatorname{sen} x = \cos x$ b) $\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x = 0$ c) $\operatorname{sen} x - \sqrt{3} \cos x = 0$ d) $\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2}$

a) $\operatorname{sen} x = \cos x \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 45^\circ + 360^\circ k \\ x = 225^\circ + 360^\circ k \end{cases}$

b) $\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow 2 \operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x (2 \cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = 180^\circ k \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 60^\circ + 360^\circ k \\ x = 300^\circ + 360^\circ k \end{cases} \end{cases}$

c) $\operatorname{sen} x - \sqrt{3} \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 60^\circ + 360^\circ k \\ x = 240^\circ + 360^\circ k \end{cases}$

d) $\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2} \Rightarrow \operatorname{sen} x + \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} = \sqrt{2} \Rightarrow 1 - \operatorname{sen}^2 x = 2 + \operatorname{sen}^2 x - 2\sqrt{2} \operatorname{sen} x \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2 \operatorname{sen}^2 x - 2\sqrt{2} \operatorname{sen} x + 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = 45^\circ + 360^\circ k$

14)

(TIC) Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas en el intervalo $[0^\circ, 360^\circ]$.

a) $\operatorname{tg} x + 4 \cot g x = 5$ b) $8 \cos 2x = 8 \cos x - 9$ c) $\operatorname{tg} 2x = \cot g x$ d) $2 \operatorname{sen}^2 x + \cos 2x = 4 \cos^2 x$

a) $\operatorname{tg} x + 4 \cot g x = 5 \Rightarrow \operatorname{tg} x + \frac{4}{\operatorname{tg} x} = 5 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x + 4 = 5 \operatorname{tg} x \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x - 5 \operatorname{tg} x + 4 = 0 \Rightarrow$

$$\operatorname{tg} x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 4 \Rightarrow x = 75^\circ 58' \quad x = 255^\circ 58' \\ \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = 45^\circ \quad x = 225^\circ \end{cases}$$

b) $8 \cos 2x = 8 \cos x - 9 \Rightarrow 8 \cos^2 x - 8 \operatorname{sen}^2 x - 8 \cos x + 9 = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 8 \cos^2 x - 8 + 8 \cos^2 x - 8 \cos x + 9 = 0 \Rightarrow 16 \cos^2 x - 8 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{32} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = 75^\circ 31' ; x = 284^\circ 29'$$

c) $\operatorname{tg} 2x = \cot g x \Rightarrow \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \Rightarrow \frac{2 \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 1 \Rightarrow 2 \operatorname{tg}^2 x = 1 - \operatorname{tg}^2 x \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 30^\circ, x = 210^\circ \\ x = 150^\circ, x = 330^\circ \end{cases}$

d) $2 \operatorname{sen}^2 x + \cos 2x = 4 \cos^2 x \Rightarrow 2 \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 4 \cos^2 x \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 4 \cos^2 x \Rightarrow 1 = 4 \cos^2 x \Rightarrow$
 $\Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 60^\circ, x = 300^\circ \\ x = 120^\circ, x = 240^\circ \end{cases}$

15)

(TIC) Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas comprendidas en el intervalo $[0, 2\pi]$.

a) $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{tg}^2 x = 0$

b) $2 \operatorname{sen} x + \sqrt{3} \operatorname{tg} x = 0$

c) $\cos 2x - \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 2x - \cos x$

a) $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{tg}^2 x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x \left(1 + \frac{1}{\cos^2 x}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pi, x = 2\pi \\ 1 + \frac{1}{\cos^2 x} = 0 \text{ no aporta soluciones} \end{cases}$

b) $2 \operatorname{sen} x + \sqrt{3} \operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow 2 \operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{\cos x}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pi, x = 2\pi \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6}, x = \frac{7\pi}{6} \end{cases}$

16)

Resuelve los siguientes triángulos.

- a) $b = 20$ cm, $c = 28$ cm, $\widehat{C} = 40^\circ$ c) $a = 3$ cm, $\widehat{B} = 30^\circ$, $c = 5$ cm e) $a = 30$ cm, $\widehat{B} = 30^\circ$, $\widehat{C} = 50^\circ$
 b) $a = 41$ cm, $b = 9$ cm, $c = 40$ cm d) $a = 12$ cm, $b = 15$ cm, $\widehat{C} = 35^\circ$ f) $b = 25$ cm, $\widehat{B} = 55^\circ$, $\widehat{C} = 65^\circ$

$$a) \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} \Rightarrow \sin \widehat{B} = \frac{b \cdot \sin \widehat{C}}{c} = \frac{20 \cdot \sin 40^\circ}{28} = 0,459 \Rightarrow \widehat{B} = 27^\circ 20', \widehat{A} = 112^\circ 40'$$

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} \Rightarrow a = \frac{c \cdot \sin \widehat{A}}{\sin \widehat{C}} = \frac{28 \cdot \sin 112^\circ 40'}{\sin 40^\circ} = 40,2 \text{ cm}$$

$$b) \cos \widehat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{81 + 1600 - 1681}{720} = 0 \Rightarrow \widehat{A} = 90^\circ$$

$$\cos \widehat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1681 + 1600 - 81}{3280} = 0,9756 \Rightarrow \widehat{B} = 12^\circ 41'$$

$$\frac{\cos \widehat{C}}{2ab} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{738} = \frac{1681 + 81 - 1600}{738} = 0,2195 \Rightarrow \widehat{A} = 77^\circ 19'$$

$$c) b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \widehat{B} = 9 + 25 - 30 \cos 30 = 8,0192 \Rightarrow b = 2,8318 \text{ cm}$$

$$\frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} \Rightarrow \sin \widehat{C} = \frac{c \cdot \sin \widehat{B}}{b} = \frac{5 \cdot \sin 30^\circ}{2,8318} = 0,8828 \Rightarrow \text{Dos soluciones } \begin{cases} \widehat{C} = 61^\circ 59', \widehat{A} = 88^\circ 1' \\ \widehat{C} = 118^\circ 1', \widehat{A} = 31^\circ 59' \end{cases}$$

$$d) c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C} = 144 + 225 - 360 \cos 35^\circ = 74,1053 \Rightarrow c = 8,6084 \text{ cm}$$

$$\frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} \Rightarrow \sin \widehat{B} = \frac{b \cdot \sin \widehat{C}}{c} = \frac{15 \cdot \sin 35^\circ}{8,6084} = 0,999 \Rightarrow \text{Dos soluciones } \begin{cases} \widehat{C} = 88^\circ 5', \widehat{A} = 56^\circ 55' \\ \widehat{C} = 91^\circ 54', \widehat{A} = 53^\circ 6' \end{cases}$$

$$e) \widehat{A} = 180^\circ - 30^\circ - 50^\circ = 100^\circ$$

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \sin \widehat{C}}{\sin \widehat{A}} = \frac{30 \cdot \sin 50^\circ}{\sin 100^\circ} = 23,34 \text{ cm}$$

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} \Rightarrow b = \frac{a \cdot \sin \widehat{B}}{\sin \widehat{A}} = \frac{30 \cdot \sin 30^\circ}{\sin 100^\circ} = 15,23 \text{ cm}$$

$$f) \widehat{A} = 180^\circ - 55^\circ - 65^\circ = 60^\circ$$

$$\frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{a}{\sin \widehat{C}} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \sin \widehat{C}}{\sin \widehat{B}} = \frac{25 \cdot \sin 65^\circ}{\sin 55^\circ} = 27,66$$

$$\frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{a}{\sin \widehat{A}} \Rightarrow a = \frac{b \cdot \sin \widehat{A}}{\sin \widehat{B}} = \frac{25 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 55^\circ} = 26,43 \text{ cm}$$

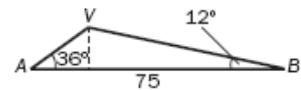
17)

Un avión vuela entre dos ciudades, A y B, que distan entre sí 75 km. Las visuales desde A y B hasta el avión forman con la horizontal ángulos de 36° y 12° de amplitud, respectivamente.

Calcula la altura a la que vuela el avión y las distancias a las que se encuentra de A y de B, suponiendo que el avión y las ciudades están sobre el mismo plano vertical.

$$\frac{VB}{\sin 36^\circ} = \frac{75}{\sin 132^\circ} \Rightarrow VB \approx 59 \text{ km}$$

$$\frac{VA}{\sin 12^\circ} = \frac{75}{\sin 132^\circ} \Rightarrow VA \approx 21 \text{ km} \quad h = VB \sin 12 \approx 12,3 \text{ km}$$



18)

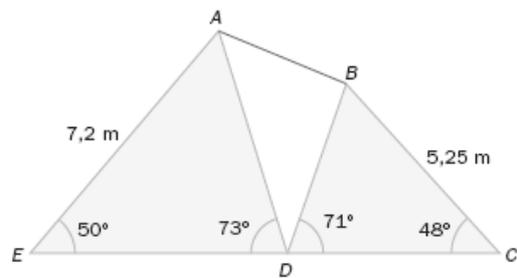
Calcula la distancia entre los puntos A y B.

$$\frac{AD}{\sin 50^\circ} = \frac{7,2}{\sin 73^\circ} \Rightarrow AD = 5,77$$

$$\frac{BD}{\sin 48^\circ} = \frac{9,25}{\sin 71^\circ} \Rightarrow BD = 7,27$$

$$AB^2 = 5,77^2 + 7,27^2 - 2 \cdot 5,77 \cdot 7,27 \cos(180^\circ - 73^\circ - 71^\circ) = 18,27$$

$$AB = 4,27 \text{ m}$$

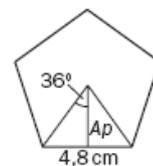


19)

Calcula el área de un pentágono regular si su perímetro coincide con el de un cuadrado que tiene 144 cm² de área.

El lado del cuadrado mide $\sqrt{144} = 12$ cm. El perímetro del pentágono 48 cm. Cada lado del pentágono mide 9,6 cm.

$$\operatorname{tg} 36^\circ = \frac{4,8}{A_p} \Rightarrow A_p = \frac{4,8}{\operatorname{tg} 36^\circ} \approx 6,6 \text{ cm} \Rightarrow A_{\text{pentágono}} = \frac{\text{perímetro} \times A_p}{2} = \frac{48 \cdot 6,6}{2} \approx 158,56 \text{ cm}^2$$



20)

Calcula el área del paralelogramo cuyos lados miden 10 y 15 cm, respectivamente, si uno de sus ángulos mide 35°.

El paralelogramo se puede dividir en dos triángulos iguales.

$$S_r = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 15 \cdot \operatorname{sen} 35^\circ \quad S_p = 10 \cdot 15 \cdot \operatorname{sen} 35^\circ = 86,04 \text{ cm}^2$$



21)

Decide si las siguientes medidas corresponden a las longitudes de lados de un triángulo, e indica si es acutángulo, rectángulo u obtusángulo.

- a) 12, 11 y 9 cm b) 23, 14 y 8 cm c) 26, 24 y 10 cm d) 40, 30 y 20 m

a) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} \rightarrow 12^2 = 11^2 + 9^2 - 2 \cdot 11 \cdot 9 \cdot \cos \hat{A}$
 $\rightarrow \cos \hat{A} = 0,2929 \rightarrow \hat{A} = 72^\circ 57' 59,7'' \rightarrow$ El triángulo es acutángulo.

b) Las medidas no forman un triángulo, ya que la suma de los lados menores es menor que el lado mayor.

c) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} \rightarrow 26^2 = 24^2 + 10^2 - 2 \cdot 24 \cdot 10 \cdot \cos \hat{A}$
 $\rightarrow \cos \hat{A} = 0 \rightarrow \hat{A} = 90^\circ \rightarrow$ El triángulo es rectángulo.

d) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} \rightarrow 40^2 = 30^2 + 20^2 - 2 \cdot 30 \cdot 20 \cdot \cos \hat{A}$
 $\rightarrow \cos \hat{A} = -0,25 \rightarrow \hat{A} = 104^\circ 28' 39'' \rightarrow$ El triángulo es obtusángulo.

22)

En una construcción, dos vigas de 10 m están soldadas por sus extremos y forman un triángulo con otra viga de 15 m. Halla los ángulos que forman entre sí.

Llamamos $a = 15$ m, $b = 10$ m y $c = 10$ m.

Utilizamos el teorema del coseno para obtener dos de sus ángulos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} \rightarrow 15^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos \hat{A}$$

$$\hat{A} = 97^\circ 10' 50,7''$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B} \rightarrow 10^2 = 15^2 + 10^2 - 2 \cdot 15 \cdot 10 \cdot \cos \hat{B}$$

$$\hat{B} = 41^\circ 24' 34,6''$$

Usamos la propiedad de que la suma de los ángulos de un triángulo mide 180°, para calcular el tercer ángulo:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 97^\circ 10' 50,7'' + 41^\circ 24' 34,6'' + \hat{C} = 180^\circ \rightarrow \hat{C} = 41^\circ 24' 34,6''$$

23)

Resuelve los siguientes triángulos.

a) $a = 10 \text{ cm}, b = 14 \text{ cm}, c = 8 \text{ cm}$

e) $a = 2,1 \text{ cm}; b = 1,4 \text{ cm}; c = 1,8 \text{ cm}$

b) $b = 6 \text{ cm}, c = 9 \text{ cm}, \hat{A} = 39^\circ 12'$

f) $a = 9 \text{ cm}, c = 5 \text{ cm}, \hat{B} = 103^\circ 27'$

c) $a = 7 \text{ cm}, \hat{B} = 38^\circ 49', \hat{C} = 66^\circ 40'$

g) $b = 8,3 \text{ cm}; c = 9,1 \text{ cm}; \hat{C} = 112^\circ 50'$

d) $a = 8 \text{ cm}, b = 10 \text{ cm}, \hat{B} = 36^\circ 38'$

h) $c = 6 \text{ cm}, \hat{A} = 27^\circ 42', \hat{B} = 98^\circ 20'$

a) Aplicamos el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} \rightarrow \cos \hat{A} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = \frac{-100 + 196 + 64}{2 \cdot 14 \cdot 8} = 0,7143$$

$$\hat{A} = 44^\circ 24' 55,1''$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B} \rightarrow \cos \hat{B} = \frac{-b^2 + a^2 + c^2}{2ac} = \frac{-196 + 100 + 64}{2 \cdot 10 \cdot 8} = -0,2$$

$$\hat{B} = 101^\circ 32' 13''$$

$$\hat{C} = 180^\circ - 44^\circ 24' 55,1'' - 101^\circ 32' 13'' = 34^\circ 2' 51,85''$$

b) Aplicamos el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} \rightarrow a^2 = 6^2 + 9^2 - 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \cos 39^\circ 12' \rightarrow a = 5,77 \text{ cm}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B} \rightarrow \cos \hat{B} = \frac{-b^2 + a^2 + c^2}{2ac} = \frac{-36 + 33,3 + 81}{2 \cdot 5,77 \cdot 9} = 0,7534$$

$$\hat{B} = 41^\circ 4' 14,51'' \rightarrow \hat{C} = 180^\circ - 39^\circ 12' - 41^\circ 4' 14,51'' = 99^\circ 43' 45,49''$$

c) $\hat{A} = 180^\circ - 38^\circ 49' - 66^\circ 40' = 74^\circ 31'$

Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} \rightarrow \frac{b}{\text{sen } 38^\circ 49'} = \frac{7}{\text{sen } 74^\circ 31'} \rightarrow b = 4,55 \text{ cm}$$

$$\frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} \rightarrow \frac{c}{\text{sen } 66^\circ 40'} = \frac{7}{\text{sen } 74^\circ 31'} \rightarrow c = 6,67 \text{ cm}$$

d) Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} \rightarrow \frac{10}{\text{sen } 36^\circ 38'} = \frac{8}{\text{sen } \hat{A}} \rightarrow \text{sen } \hat{A} = 0,4774$$

$$\hat{A} = 28^\circ 30' 45,7''$$

$$\hat{C} = 180^\circ - 36^\circ 38' - 28^\circ 30' 45,7'' = 114^\circ 51' 14,3''$$

$$\frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} \rightarrow \frac{c}{\text{sen } 114^\circ 51' 14,3''} = \frac{8}{\text{sen } 28^\circ 30' 45,7''} \rightarrow c = 15,21 \text{ cm}$$

e) Aplicamos el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} \rightarrow \cos \hat{A} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = \frac{-4,41 + 1,96 + 3,24}{2 \cdot 1,4 \cdot 1,8} = 0,1567$$

$$\hat{A} = 80^\circ 58' 54,9''$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B} \rightarrow \cos \hat{B} = \frac{-b^2 + a^2 + c^2}{2ac} = \frac{-1,96 + 4,41 + 3,24}{2 \cdot 2,1 \cdot 1,8} = 0,7606$$

$$\hat{B} = 40^\circ 29' 4,08''$$

$$\hat{C} = 180^\circ - 40^\circ 29' 4,08'' = 58^\circ 32' 1,02''$$

f) Aplicamos el teorema del coseno:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B} \rightarrow b = \sqrt{81 + 25 - 90 \cdot \cos 103^\circ 27'} = 11,27 \text{ cm}$$

Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} \rightarrow \frac{11,27}{\text{sen } 103^\circ 27'} = \frac{9}{\text{sen } \hat{A}} \rightarrow \text{sen } \hat{A} = 0,7767$$

$$\hat{A} = 50^\circ 57' 26,6'' \rightarrow \hat{C} = 180^\circ - 50^\circ 57' 26,6'' - 103^\circ 27' = 25^\circ 35' 33,4''$$

g) Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} \rightarrow \frac{9,1}{\text{sen } 112^\circ 50'} = \frac{8,3}{\text{sen } \hat{B}} \rightarrow \text{sen } \hat{B} = 0,8406$$

$$\hat{B} = 57^\circ 12' 18,2'' \rightarrow \hat{A} = 180^\circ - 112^\circ 50' - 57^\circ 12' 18,2'' = 9^\circ 57' 41,8''$$

$$a = \frac{9,1 \cdot \text{sen } 91^\circ 57' 41,8''}{\text{sen } 112^\circ 50'} = 1,71 \text{ cm}$$

h) $\hat{C} = 180^\circ - 27^\circ 42' - 98^\circ 20' = 53^\circ 58'$

Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} \rightarrow \frac{6}{\text{sen } 53^\circ 58'} = \frac{a}{\text{sen } 27^\circ 42'} \rightarrow a = 3,45 \text{ cm}$$

$$\frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} \rightarrow \frac{6}{\text{sen } 53^\circ 58'} = \frac{b}{\text{sen } 98^\circ 20'} \rightarrow b = 7,34 \text{ cm}$$

24)

Encuentra las soluciones para estos triángulos.

a) $a = 12 \text{ cm}, b = 7 \text{ cm}, c = 6 \text{ cm}$ d) $b = 6 \text{ cm}; c = 4,5 \text{ cm}; \hat{C} = 38^\circ 26'$

b) $a = 8 \text{ cm}, c = 9 \text{ cm}, \hat{A} = 42^\circ 55'$ e) $c = 12 \text{ cm}, \hat{A} = 92^\circ, \hat{B} = 26^\circ 28'$

c) $a = 10 \text{ cm}, c = 9 \text{ cm}, \hat{A} = 72^\circ 55'$ f) $a = 11 \text{ cm}, b = 12 \text{ cm}, \hat{A} = 27^\circ 36'$

a) Aplicamos el teorema del coseno:

$$\cos \hat{A} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = \frac{-144 + 49 + 36}{2 \cdot 7 \cdot 6} = -0,7024$$

$$\hat{A} = 134^\circ 37' 6''$$

$$\cos \hat{B} = \frac{-b^2 + a^2 + c^2}{2ac} = \frac{-49 + 144 + 36}{2 \cdot 12 \cdot 6} = 0,9097$$

$$\hat{B} = 24^\circ 31' 58,8''$$

$$\hat{C} = 180^\circ - 24^\circ 31' 58,8'' - 134^\circ 37' 6'' = 20^\circ 50' 55,2''$$

b) Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} \rightarrow \frac{9}{\text{sen } \hat{C}} = \frac{8}{\text{sen } 42^\circ 55'} \rightarrow \text{sen } \hat{C} = 0,7661$$

$$\hat{C} = 50^\circ 2'' \quad \hat{B} = 180^\circ - 42^\circ 55' - 50^\circ 2'' = 87^\circ 4' 58''$$

$$\frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} \rightarrow \frac{b}{\text{sen } 87^\circ 4' 58''} = \frac{8}{\text{sen } 42^\circ 55'} \rightarrow b = 11,73 \text{ cm}$$

c) Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} \rightarrow \frac{9}{\text{sen } \hat{C}} = \frac{10}{\text{sen } 72^\circ 55'} \rightarrow \text{sen } \hat{C} = 0,8603$$

$$\hat{C} = 59^\circ 20' 57,2'' \quad \hat{B} = 180^\circ - 59^\circ 20' 57,2'' - 72^\circ 55' = 47^\circ 44' 2,76''$$

$$\frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} \rightarrow \frac{b}{\text{sen } 47^\circ 44' 2,76''} = \frac{10}{\text{sen } 72^\circ 55'} \rightarrow b = 7,74 \text{ cm}$$

d) Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{c}{\widehat{\text{sen}} \widehat{C}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen}} \widehat{B}} \rightarrow \frac{4,5}{\widehat{\text{sen}} 38^\circ 26'} = \frac{6}{\widehat{\text{sen}} \widehat{B}} \rightarrow \widehat{\text{sen}} \widehat{B} = 0,8288$$

$$\widehat{B} = 55^\circ 58' 34,2''$$

$$\widehat{A} = 180^\circ - 55^\circ 58' 34,2'' - 38^\circ 26' = 85^\circ 35' 25,8''$$

$$\frac{c}{\widehat{\text{sen}} \widehat{C}} = \frac{a}{\widehat{\text{sen}} \widehat{A}} \rightarrow \frac{4,5}{\widehat{\text{sen}} 38^\circ 26'} = \frac{a}{\widehat{\text{sen}} 85^\circ 35' 25,8''} \rightarrow a = 7,22 \text{ cm}$$

e) $\widehat{C} = 180^\circ - 92^\circ - 26^\circ 28' = 61^\circ 32'$

Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{c}{\widehat{\text{sen}} \widehat{C}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen}} \widehat{B}} \rightarrow \frac{12}{\widehat{\text{sen}} 61^\circ 32'} = \frac{b}{\widehat{\text{sen}} 26^\circ 28'} \rightarrow b = 6,08 \text{ cm}$$

$$\frac{c}{\widehat{\text{sen}} \widehat{C}} = \frac{a}{\widehat{\text{sen}} \widehat{A}} \rightarrow \frac{12}{\widehat{\text{sen}} 61^\circ 32'} = \frac{a}{\widehat{\text{sen}} 92^\circ} \rightarrow a = 13,64 \text{ cm}$$

f) Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{b}{\widehat{\text{sen}} \widehat{B}} = \frac{a}{\widehat{\text{sen}} \widehat{A}} \rightarrow \frac{12}{\widehat{\text{sen}} \widehat{B}} = \frac{11}{\widehat{\text{sen}} 27^\circ 36'} \rightarrow \widehat{\text{sen}} \widehat{B} = 0,5054$$

$$\widehat{B} = 30^\circ 21' 31,8''$$

$$\widehat{C} = 180^\circ - 30^\circ 21' 31,8'' - 27^\circ 36' = 122^\circ 2' 28,2''$$

$$\frac{c}{\widehat{\text{sen}} \widehat{C}} = \frac{a}{\widehat{\text{sen}} \widehat{A}} \rightarrow \frac{c}{\widehat{\text{sen}} 122^\circ 2' 28,2''} = \frac{11}{\widehat{\text{sen}} 27^\circ 36'} \rightarrow c = 20,13 \text{ cm}$$

25)

Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\cos x \operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$

f) $\operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x = 0$

b) $\cos 2x + \operatorname{sen} 2x = 1$

g) $\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} 2x = 0$

c) $\cos 2x - \operatorname{sen} 2x = 0$

h) $\frac{\operatorname{sen}(60^\circ - x)}{\cos x} = 1$

d) $\operatorname{sen} 2x + \cos x = 1$

i) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \operatorname{tg} x - 1 = 0$

e) $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 2x = 0$

j) $\operatorname{sen}(x + 30^\circ) + \cos(x + 60^\circ) = 1 + \cos 2x$

a) $\cos x \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 30^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x_2 = 150^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$

b) $\cos 2x + \operatorname{sen} 2x = 1 \rightarrow \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x$
 $\rightarrow -2 \operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x = 0 \rightarrow 2 \operatorname{sen} x (-\operatorname{sen} x + \cos x) = 0$

$$\operatorname{sen} x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x_2 = 180^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

$$\operatorname{sen} x = \cos x \rightarrow \begin{cases} x_1 = 45^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x_2 = 225^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

c) $\cos 2x - \operatorname{sen} 2x = 0 \rightarrow \cos 2x = \operatorname{sen} 2x \rightarrow \begin{cases} x_1 = 22,5^\circ + 180^\circ \cdot k \\ x_2 = 112,5^\circ + 180^\circ \cdot k \end{cases}$

$$d) \operatorname{sen} 2x + \cos x = (2 \operatorname{sen} x + 1) \cos x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 90^\circ + 360^\circ \cdot k & x_3 = 210^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x_2 = 270^\circ + 360^\circ \cdot k & x_4 = 330^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases}$$

$$e) \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 2x = 0 \rightarrow 2 \operatorname{sen} 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0^\circ + 180^\circ \cdot k \\ x_2 = 90^\circ + 180^\circ \cdot k \end{cases}$$

$$f) \operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x \left(\frac{1}{\cos x} + 1 \right) = 0$$

$$\operatorname{sen} x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x_2 = 180^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

$$\frac{1}{\cos x} + 1 = 0 \rightarrow x_3 = 180^\circ + 360^\circ \cdot k$$

$$g) \operatorname{tg} x - \operatorname{sen} 2x = 0 \rightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x(1 - 2 \cos^2 x) = 0$$

$$\operatorname{sen} x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x_2 = 180^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

$$1 - 2 \cos^2 x = 0 \rightarrow \cos x = \sqrt{\frac{1}{2}} \rightarrow x_3 = 45^\circ + 360^\circ \cdot k$$

$$h) \frac{\operatorname{sen}(60^\circ - x)}{\cos x} = 1 \rightarrow \frac{\sqrt{3} \cos x - \operatorname{sen} x}{2 \cos x} = 1 \rightarrow \sqrt{3} - \operatorname{tg} x = 2$$

$$\rightarrow \operatorname{tg} x = -0,2679 \rightarrow x = 345^\circ + 360^\circ \cdot k$$

$$i) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) + \operatorname{tg} x - 1 = 0 \rightarrow \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x - 1 = 0$$

$$\rightarrow \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0 \rightarrow \operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x - 1) = 0$$

$$\operatorname{tg} x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x_2 = 180^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} x - 1 = 0 \rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 45^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x_2 = 225^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

$$j) \operatorname{sen}(x + 30^\circ) + \cos(x + 60^\circ) = 1 + \cos 2x$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{3} \operatorname{sen} x}{2} + \frac{\cos x}{2} + \frac{\cos x}{2} - \frac{\sqrt{3} \operatorname{sen} x}{2} =$$

$$= \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \rightarrow \cos x = 2 \cos^2 x \rightarrow \cos x(2 \cos x - 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 90^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x_2 = 270^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

$$2 \cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 60^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x_2 = 300^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

26)

Resuelve la ecuación $\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} x$.

$$\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} x \Leftrightarrow 2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} x \Leftrightarrow \operatorname{sen} x(2 \cos x - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \\ 2 \cos x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0^\circ + k \cdot 180^\circ \\ x = 60^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x = 300^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases}$$

Las soluciones del primer giro son 0° , 60° , 180° y 300° .

27)

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2\operatorname{sen} 2x = 1$

b) $3\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$

c) $3\cos \frac{x}{2} = 1,5$

d) $5\operatorname{sen} 4x = 0$

a) $2\operatorname{sen} 2x = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$2x = \begin{cases} 30^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 150^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{cases} 15^\circ + k \cdot 180^\circ \\ 75^\circ + k \cdot 180^\circ \end{cases}$$

Las soluciones del primer giro son: $15^\circ, 75^\circ, 195^\circ$ y 255° .

b) $3\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} 2x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k \cdot \pi}{2}$

las soluciones del primer giro son $\frac{\pi}{12}$ (para $k = 0$), $\frac{7\pi}{12}$ (para $k = 1$), $\frac{13\pi}{12}$ (para $k = 2$) y $\frac{19\pi}{12}$ (para $k = 3$).

c) $3\cos \frac{x}{2} = 1,5 \Leftrightarrow \cos \frac{x}{2} = \frac{1,5}{3} = 0,5 \Rightarrow \frac{x}{2} = \begin{cases} 60^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 300^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \Rightarrow$

$$x = \begin{cases} 120^\circ + k \cdot 720^\circ \\ 600^\circ + k \cdot 720^\circ \end{cases} \Rightarrow$$

Las soluciones del primer giro de la variable son: 120° y 600° .

d) $5 \operatorname{sen} 4x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} 4x = 0 \Rightarrow 4x = 0 + k \cdot \pi \Leftrightarrow x = 0 + k \cdot \frac{\pi}{4}$.

Las soluciones del primer giro son:

$$0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}.$$

28)

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\operatorname{sen}(45^\circ + x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

a) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x + \frac{\pi}{6} = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \\ \frac{11\pi}{6} + k \cdot 2\pi \end{cases}$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} k \cdot 2\pi \\ \frac{10\pi}{6} + k \cdot 2\pi = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

Las soluciones del primer giro: 0 y $\frac{5\pi}{3}$ rad

b) $\operatorname{sen}(45^\circ + x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 45^\circ + x = \begin{cases} 225^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 315^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases}$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} 180^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 270^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases}$$

Las soluciones del primer giro son 180° y 270° .

29)

22. Resuelve la ecuación: $\cos x = \operatorname{sen} 2x$

$$\cos x = \sin 2x \Leftrightarrow \cos x = 2 \sin x \cos x \Leftrightarrow \cos x (1 - 2 \sin x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 1 - 2 \sin x = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ \\ x = 30^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x = 150^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Las soluciones del primer giro son 90° , 270° , 30° y 150° .

30)

Resuelve la ecuación: $\operatorname{tg} x = \sqrt{2} \cos x$

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{2} \cos x \Leftrightarrow \sin x = \sqrt{2} \cos^2 x \Leftrightarrow \sin x = \sqrt{2} (1 - \sin^2 x)$$

que da lugar a la ecuación de segundo grado en $\sin x$, $\sqrt{2} \sin^2 x + \sin x - \sqrt{2} = 0$ cuyas soluciones son

$$\sin x = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\sqrt{2} \text{ (imposible)} \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} 45^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 135^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases}$$

Las soluciones del primer giro son 45° y 135° .

32)

Resuelve la ecuación: $\sin 2x \cos x = 3 \sin^2 x$

$$\sin 2x \cos x = 3 \sin^2 x \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x \cdot \cos x = 3 \sin^2 x \Leftrightarrow 2 \sin x \cos^2 x = 3 \sin^2 x \Leftrightarrow 2 \sin x (1 - \sin^2 x) = 3 \sin^2 x \Leftrightarrow 2 \sin x - 2 \sin^3 x - 3 \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin x (2 - 2 \sin^2 x - 3 \sin x) = 0.$$

- Si $\sin x = 0 \Rightarrow x = 0^\circ + k \cdot 180^\circ$.
- Si $2 - 2 \sin^2 x - 3 \sin x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$ que es una ecuación de 2º grado cuyas soluciones son

$$\sin x \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -2 \end{cases}. \text{ La solución } \sin x = -2 \text{ no es posible. Si}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \begin{cases} 30^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 150^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Las soluciones del primer giro son 0° , 180° , 30° y 150° .

34)

Resuelve el triángulo ABC del que se sabe que $a = 27$ m, $c = 11$ m y $B = 63^\circ$.

Por el teorema del coseno es $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 27^2 + 11^2 - 2 \cdot 27 \cdot 11 \cdot \cos 63^\circ \approx 580,33 \Rightarrow b = 24,09$ m.

De los dos ángulos que faltan por determinar, el menor es C por ser el opuesto al lado menor. Lo calculamos por el teorema del seno:

$$\frac{11}{\sin 63^\circ} = \frac{24,09}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{11 \cdot \sin 63^\circ}{24,09} \text{ Por tanto } C = 24^\circ 0' 26''$$

(un ángulo y su suplementario tienen el mismo seno. Así, C puede ser $24^\circ 0' 26''$ o su suplementario, $180^\circ - 24^\circ 0' 26'' = 155^\circ 59' 34''$. Pero como $c < b$ también ha de ser $C < B$, es decir $24^\circ 0' 26''$).

Además $155^\circ 59' 34'' + 63^\circ > 180^\circ$

$$\text{Por último } \hat{A} = 180^\circ - (B + C) = 180^\circ - (63^\circ + 24^\circ 0' 26'') = 92^\circ 59' 34''.$$

31)

25. Resuelve la ecuación: $\operatorname{tg} 2x = -\operatorname{tg} x$

$$\operatorname{tg} 2x = -\operatorname{tg} x \Leftrightarrow \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} - \operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x (\operatorname{tg}^2 x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 0 \\ \operatorname{tg}^2 x - 3 = 0 \end{cases}$$

- Si $\operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow x = 0^\circ + k \cdot 180^\circ$
- Si $\operatorname{tg}^2 x - 3 = 0$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} x = \pm \sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } \operatorname{tg} x = +\sqrt{3} \Rightarrow x = 60^\circ + k \cdot 180^\circ \\ \text{Si } \operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \Rightarrow x = 120^\circ + k \cdot 180^\circ \end{cases}$$

Las soluciones del primer giro son: 0° , 180° , 60° , 240° , 120° y 300° .

33)

Resuelve la ecuación: $\cos 2x + 5 \cos x + 3 = 0$

$$\cos 2x + 5 \cos x + 3 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x + 5 \cos x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 x + 5 \cos x + 2 = 0, \text{ ecuación de segundo grado en } \cos x,$$

$$\text{cuya solución es } \cos x = \begin{cases} -1/2 \\ -2 \text{ (imposible)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \arccos(-1/2) = \begin{cases} 120^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 240^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \Rightarrow (k \in \mathbb{Z})$$

Las soluciones del primer giro son 120° y 240° .

35)

Resuelve el triángulo ABC del que se sabe que $a = 5$ m, $b = 8$ m y $B = 54^\circ$.

Por el teorema del seno

$$\frac{5}{\sin A} = \frac{8}{\sin 54^\circ} \Rightarrow \sin A = \frac{5 \cdot \sin 54^\circ}{8} = 0,505635621.$$

De los dos ángulos que tienen este seno ($30^\circ 22' 25''$ y su suplementario, $149^\circ 37' 35''$) elegimos el menor, pues al ser $a < b$, será también $A < B$. Por tanto $A = 30^\circ 22' 25''$.

$$\text{El tercer ángulo vale } C = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (30^\circ 22' 25'' + 54^\circ) = 95^\circ 37' 35''.$$

El lado c se calcula por el teorema del seno:

$$c = \frac{b \cdot \sin C}{\sin B} = \frac{8 \cdot \sin 95^\circ 37' 35''}{\sin 54^\circ} \approx 9,84 \text{ m.}$$

36)

Resuelve el triángulo ABC del que se sabe que $a = 10$ cm, $b = 16$ cm y $\hat{A} = 30^\circ$.

Por el teorema del seno:

$$\frac{10}{\sin 30^\circ} = \frac{16}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{16 \cdot \sin 30^\circ}{10} = 0,8. \text{ El ángulo } B \text{ puede ser } 53^\circ 7' 48'' \text{ o su suplementario, } 126^\circ 52' 12''. \text{ Las dos soluciones son posibles, pues al ser } a < b, \text{ la condición que tienen que cumplir es que } \hat{A} < B. \text{ Hay por tanto dos soluciones:}$$

de ser $53^\circ 7' 48''$ o su suplementario, $126^\circ 52' 12''$. Las dos soluciones son posibles, pues al ser $a < b$, la condición que tienen que cumplir es que $\hat{A} < B$. Hay por tanto dos soluciones:

Solución 1

$$B_1 = 53^\circ 7' 48''$$

$$C_1 = 180^\circ - (\hat{A} + B_1) = 180^\circ - (30^\circ + 53^\circ 7' 48'') = 96^\circ 52' 12''.$$

$$\frac{10}{\sin 30^\circ} = \frac{c_1}{\sin 96^\circ 52' 12''} \Rightarrow$$

$$c_1 = \frac{10 \cdot \sin 96^\circ 52' 12''}{\sin 30^\circ} \approx 19,86 \text{ cm.}$$

Solución 2

$$B_2 = 126^\circ 52' 12''$$

$$C_2 = 180^\circ - (\hat{A} + B_2) = 180^\circ - (30^\circ + 126^\circ 52' 12'') = 23^\circ 7' 48''.$$

$$\frac{10}{\sin 30^\circ} = \frac{c_2}{\sin 23^\circ 7' 48''} \Rightarrow$$

$$c_2 = \frac{10 \cdot \sin 23^\circ 7' 48''}{\sin 30^\circ} \approx 7,86 \text{ cm.}$$

37)

Resuelve el triángulo ABC del que se conocen los siguientes datos: $a = 6$ cm, $b = 9$ cm y $c = 14$ cm.

Por el teorema del coseno $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Leftrightarrow$

$$6^2 = 9^2 + 14^2 - 2 \cdot 9 \cdot 14 \cdot \cos A \Rightarrow$$

$$\cos A = \frac{241}{252} = 0,956349206, \text{ luego } \hat{A} = 16^\circ 59' 29''.$$

Análogamente calculamos el ángulo B :

$$9^2 = 6^2 + 14^2 - 2 \cdot 6 \cdot 14 \cdot \cos B \Rightarrow$$

$$\cos B = \frac{151}{168} = 0,898809523, \text{ luego } B = 25^\circ 59' 53''.$$

Por último, $C = 180^\circ - (\hat{A} + B) = 137^\circ 0' 38''.$