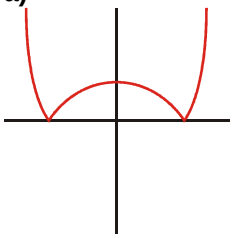
FUNCIONES ELEMENTALES

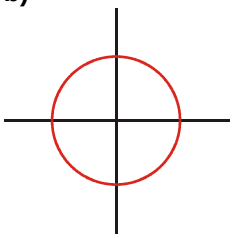
FUNCIÓN

EJERCICIO 1 : Indica cuáles de las siguientes representaciones corresponden a la gráfica de una función. Razona tu respuesta:

a)

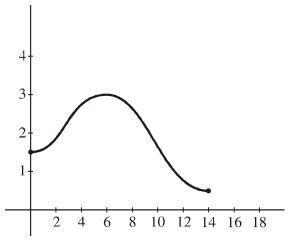


b)



Solución: En una función, a cada valor de x le corresponde, a lo sumo, un valor de y. Por tanto, a) es función, pero b) no lo es.

EJERCICIO 2 : La siguiente gráfica corresponde a la función $y = f(x)$:



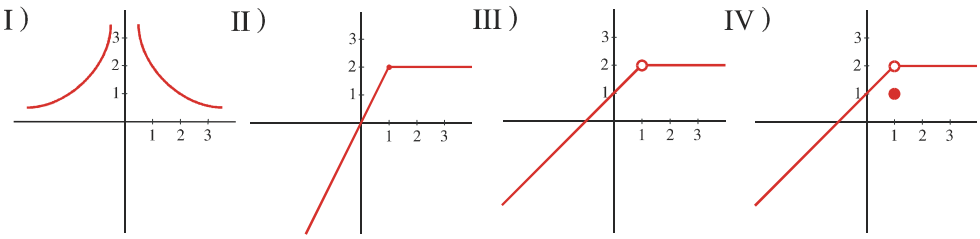
a) ¿Cuál es su dominio de definición?

b) Indica los tramos en los que la función es creciente y en los que es decreciente.

c) ¿En qué punto tiene la función su máximo?

Solución:
a) [0, 14]
b) Es creciente en [0, 6] y decreciente en [6, 14].
c) El máximo está en el punto (6, 3).

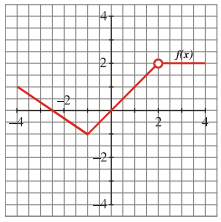
EJERCICIO 3 : Dadas las funciones:



a) Di si son continuas o no.
b) Halla la imagen de $x = 1$ para cada una de las cuatro funciones.

Solución:
a) Solo es continua la II).
b) I) $x = 1 \rightarrow y = 2$ II) $x = 1 \rightarrow y = 2$ III) $x = 1 \rightarrow y$ no está definida. IV) $x = 1 \rightarrow y = 1$

EJERCICIO 4 : Dada la gráfica:



a) Di si $f(x)$ es continua o no. Razona tu respuesta.

b) Halla $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$ y $f(3)$.

Solución:
a) No es continua, puesto que en $x = 2$ no está definida.
b) $f(-1) = -1$; $f(0) = 0$; $f(2)$ no existe; $f(3) = 2$

EJERCICIO 5 : Halla $f(-1)$, $f(0)$ y $f(2)$, siendo: $f(x)=\begin{cases} 3x^2-1 & \text{si } x\le -1 \\ x+1 & \text{si } -1<x\le 2 \\ x^2 & \text{si } x>2 \end{cases}$

Solución:

$f(-1) = 3\cdot(-1)^2 - 1 = 3\cdot 1 - 1 = 3 - 1 = 2$

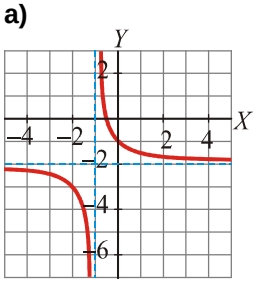
$f(0) = 0 + 1 = 1$

$f(2) = 2 + 1 = 3$

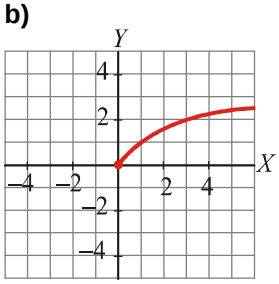
DOMINIO

EJERCICIO 6 : A partir de la gráfica de estas funciones, indica cuál es su dominio y su recorrido:

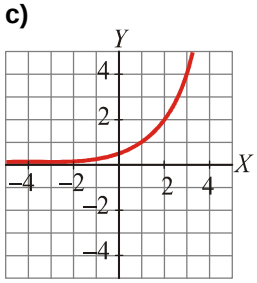
a)



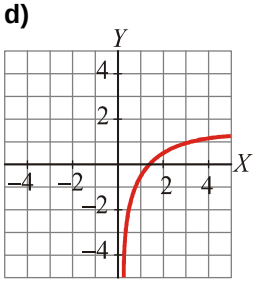
b)



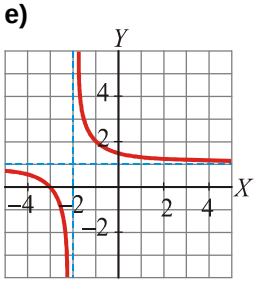
c)



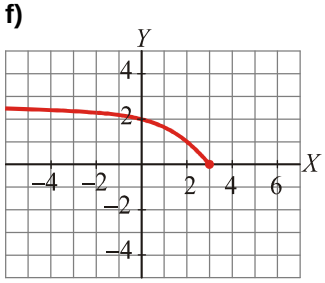
d)



e)



f)



Solución:

a) Dominio $= \mathbf{R} - \{-1\}$ Recorrido = R – {-2}

b) Dominio $= [0, +\infty)$ Recorrido = [0,∞)

c) Dominio $= \mathbf{R} - \{0\}$ Recorrido = (0,∞)

d) Dominio = (0,∞) Recorrido = R

e) Dominio = R – {-2} Recorrido = R – {1}

f) Dominio = (-∞,3] Recorrido = [0,∞)

EJERCICIO 7 : Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{1}{x^2-16}$ **b)** $y = \sqrt{1+2x}$ **c)** $y = \dfrac{x}{x^2-4}$ **d)** $y = \sqrt{2x}$ **e)** $y = \dfrac{1}{x^2+4}$

f) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ **g)** $y = \dfrac{1}{x^2-2x}$ **h)** $y = \sqrt{6+3x}$ **i)** $y = \dfrac{3}{(x-5)^2}$ **j)** $y = \sqrt{2x-4}$

k) $y = \dfrac{1}{x^2-9}$ **l)** $y = \sqrt{x-2}$ **m)** $y = \dfrac{2+x}{x^2}$ **n)** $y = \sqrt{3x-1}$ **ñ)** $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$

o) $y = \dfrac{1}{3x-x^2}$ **p)** $y = \sqrt{x^2-1}$ **q)** $y = \dfrac{2x}{(x-3)^2}$

Solución:

a) $x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm\sqrt{16} = \pm 4 \rightarrow \text{Dominio} = \mathbf{R} - \{-4, 4\}$

b) $1 + 2x \ge 0 \Rightarrow 2x \ge -1 \Rightarrow x \ge \dfrac{-1}{2} \rightarrow \text{Dominio} = \left[\dfrac{-1}{2}, +\infty\right)$

c) $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2 \rightarrow \text{Dominio} = \mathbf{R} - \{-2, 2\}$

d) $2x \ge 0 \Rightarrow x \ge 0 \rightarrow \text{Dominio} = [0, +\infty)$

e) $x^2 + 4 \ne 0$ para todo $x \in \mathbf{R} \rightarrow \text{Dominio} = \mathbf{R}$

f) $x-2>0 \;\Rightarrow\; x>2 \;\rightarrow\; \text{Dominio} = (2,+\infty)$

g) $x^2-2x=0 \;\Rightarrow\; x(x-2)=0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$ Dominio $= \mathbf{R}-\{0,\ 2\}$

h) $6+3x\geq 0 \;\Rightarrow\; 3x\geq -6 \;\Rightarrow\; x\geq -2 \;\rightarrow\; \text{Dominio} = [-2,+\infty)$

i) $(x-5)^2=0 \;\Rightarrow\; x=5 \;\rightarrow\; \text{Dominio} = \mathbf{R}-\{5\}$

j) $2x-4\geq 0 \;\Rightarrow\; 2x\geq 4 \;\Rightarrow\; x\geq 2 \;\rightarrow\; \text{Dominio}\,[2,+\infty)$

k) $x^2-9=0 \;\Rightarrow\; x^2=9 \;\Rightarrow\; x=\pm\sqrt{9}=\pm 3 \;\rightarrow\; \text{Dominio} = R-\{-3,3\}$

l) $x-2\geq 0 \;\Rightarrow\; x\geq 2 \;\rightarrow\; \text{Dominio} = [2,+\infty)$

m) $x^2=0 \;\Rightarrow\; x=0 \;\rightarrow\; \text{Dominio} = R-\{0\}$

n) $3x-1\geq 0 \;\Rightarrow\; 3x\geq 1 \;\Rightarrow\; x\geq \frac{1}{3} \;\rightarrow\; \text{Dominio} = \left[\frac{1}{3},+\infty\right)$

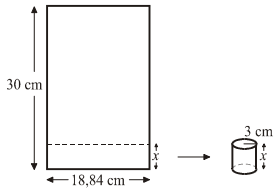
ñ) $x>0 \;\rightarrow\; \text{Dominio} = (0,+\infty)$

o) $3x-x^2=0 \;\Rightarrow\; x(3-x)=0 \;\begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases} \;\rightarrow\; \text{Dominio} = \mathbf{R}-\{0,3\}$

p) $x^2-1\geq 0 \;\rightarrow\; \text{Dominio} = (-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

q) $(x-3)^2=0 \;\Rightarrow\; x=3 \;\rightarrow\; \text{Dominio} = \mathbf{R}-\{3\}$

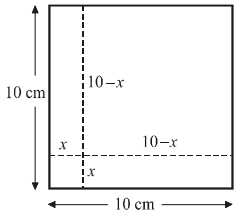
<u>EJERCICIO 8</u> : Tenemos una hoja de papel de base 18,84 cm y altura 30 cm. Si recortamos por una línea paralela a la base, a diferentes alturas, y enrollamos el papel, podemos formar cilindros de radio 3 cm y altura *x*:



El volumen del cilindro será: $V=\pi\cdot 3^2\cdot x=28{,}26\,x$
¿Cuál es el dominio de definición de esta función?

Solución: x puede tomar valores entre 0 y 30 cm. Por tanto, Dominio $=(0,\ 30)$.

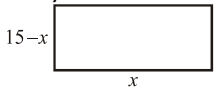
<u>EJERCICIO 9</u> : De un cuadrado de lado 10 cm se recorta una tira de *x* cm en la base y otra de la misma longitud en la altura, obteniéndose un nuevo cuadrado de lado $(10-x)$:



El área de este nuevo cuadrado será: $A=(10-x)^2$
¿Cuál es el dominio de definición de esta función?

Solución: x puede tener valores entre 0 y 10 cm. Por tanto, Dominio $=(0,\ 10)$.

<u>EJERCICIO 10</u> : Vamos a considerar todos los rectángulos de 30 cm de perímetro. Si llamamos *x* a la longitud de la base, el área será:



$A=x(15-x)$ **¿Cuál es el dominio de definición de esta función?**

Solución: x puede tomar valores entre 0 y 15 cm. Por tanto, Dominio $=(0,\ 15)$.

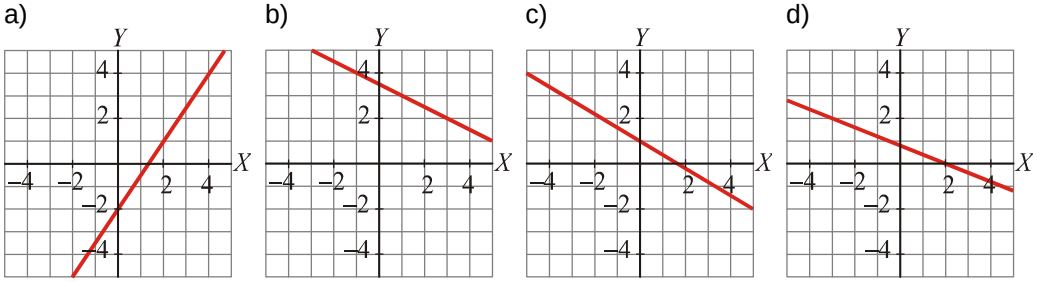
FUNCIONES LINEALES

EJERCICIO 11 : Representa gráficamente:

a) $y = \frac{3}{2}x - 2$ **b)** $y = -0{,}5x + 3{,}5$ **c)** $y = \frac{-3}{5}x + 1$ **d)** $f(x) = \frac{4 - 2x}{5}$

Solución:

a) b) c) d)



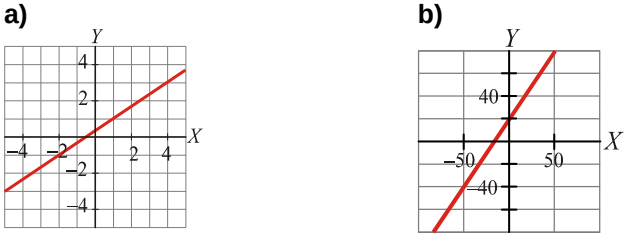
EJERCICIO 12 : Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(3, -4)$ y $(-2, 3)$.

Solución: La pendiente de la recta es: $m = \frac{3-(-4)}{-2-3} = \frac{7}{-5} = -\frac{7}{5}$

La ecuación será: $y + 4 = \frac{-7}{5}(x - 3) \Rightarrow y = \frac{-7}{5}x + \frac{1}{5}$

EJERCICIO 13 : Escribe la ecuación de las rectas cuyas gráficas son las siguientes:

a) **b)**



Solución:

a) Vemos que la recta pasa por los puntos $(1, 1)$ y $(4, 3)$. Su pendiente será : $m = \frac{3-1}{4-1} = \frac{2}{3}$

La ecuación será: $y - 1 = \frac{2}{3}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

b) Observamos que la recta pasa por los puntos $(0, 20)$ y $(50, 80)$. Su pendiente será : $m = \frac{80-20}{50-0} = \frac{60}{50} = \frac{6}{5}$

Por tanto, su ecuación es: $y = \frac{6}{5}x + 20$

EJERCICIO 14 : Halla la ecuación de la recta que pasa por $(-1, 2)$ y cuya pendiente es $-\frac{1}{3}$.

Solución:

Escribimos la ecuación punto–pendiente: $y - 2 = -\frac{1}{3}(x + 1) \Rightarrow y = \frac{-1}{3}x + \frac{5}{3}$

FUNCIONES CUADRÁTICAS

EJERCICIO 15 : Representa gráficamente las funciones:

a) $y = -x^2 + 4x - 1$ **b)** $y = (x+1)^2 - 3$ **c)** $y = -x^2 + 4$ **d)** $f(x) = -2x^2 + 4x$

Solución:

a) • Hallamos el vértice: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2 \rightarrow y = 3 \rightarrow$ Punto $(2, 3)$.

- Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow -x^2 + 4x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4}}{-2} =$

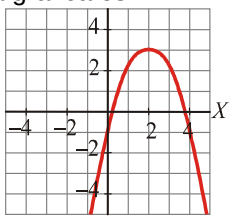
$$= \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{-2} \begin{cases} x = 0{,}27 \rightarrow \text{Punto } (0{,}27;\ 0) \\ x = 3{,}73 \rightarrow \text{Punto } (3{,}73;\ 0) \end{cases}$$

Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow$ Punto $(0, -1)$

- Tabla de valores alrededor del vértice:

X	0	1	2	3	4
Y	-1	2	3	2	-1

- La gráfica es:



b) • Hallamos el vértice: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2} = -1 \rightarrow y = -3 \rightarrow$ Punto $(-1, -3)$.

- Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2 + 2x + 1 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 2 = 0$

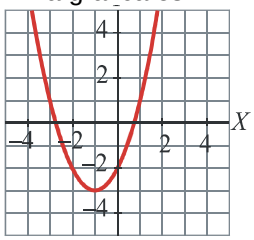
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{2} \begin{cases} x = 0{,}73 \rightarrow \text{Punto } (0{,}73;\ 0) \\ x = -2{,}73 \rightarrow \text{Punto } (-2{,}73;\ 0) \end{cases}$$

Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -2 \rightarrow$ Punto $(0, -2)$

- Hallamos algún otro punto:

X	-3	-2	-1	0	1
Y	1	-2	-3	-2	1

- La gráfica es:



c) Hallamos el vértice: $V\ x = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2} = -0 \rightarrow y = 4 \rightarrow$ Punto $(0,4)$.

- Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow -x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \rightarrow$

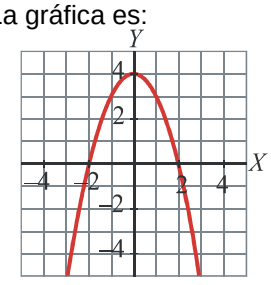
$\rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \rightarrow$ Puntos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$

Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 4 \rightarrow$ Punto $(0,4)$

- Hallamos algún otro punto:

X	-2	-1	0	1	2
Y	0	3	4	3	0

- La gráfica es:



d) • El vértice de la parábola es: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-4} = 1 \rightarrow y = 2 \rightarrow$ Punto $(1, 2)$

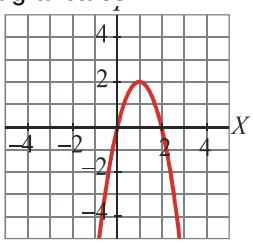
- Puntos de corte con los ejes:
  Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow -2x^2 + 4x = 0 \rightarrow x(-2x + 4) = 0$

$$\begin{cases} x = 0 & \rightarrow \text{Punto } (0, 0) \\ -2x + 4 = 0 & \rightarrow x = 2 \rightarrow \text{Punto } (2, 0) \end{cases}$$

  Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto (0,0)
- Hallamos algún otro punto:

X	-1	0	1	2	3
Y	-6	0	2	0	-6

- La gráfica es:



RECOPILACIÓN RECTAS Y PARÁBOLAS

EJERCICIO 16 :

a) Representa gráficamente: $y = -\frac{1}{2}x + 3$

b) Halla el vértice de la parábola: $y = 2x^2 - 10x + 8$

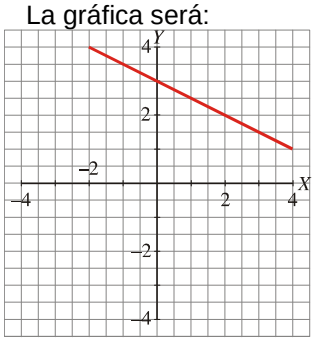
Solución:

a)

Hallamos dos puntos de la recta:

x	y
0	3
2	2

La gráfica será:



b) La abscisa del vértice es: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

La ordenada es: $y = 2\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 10\left(\frac{5}{2}\right) + 8 = \frac{-9}{2}$

El vértice es el punto $\left(\frac{5}{2}, \frac{-9}{2}\right)$.

EJERCICIO 17 :

a) Obtén la ecuación de la recta que pasa por los puntos (–2, –1) y (1, 3), y represéntala.

b) Halla los puntos de corte con los ejes de la parábola $y = -x^2 + 4x$.

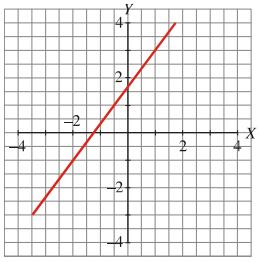
Solución:

a)

La pendiente de la recta es: $m = \frac{3-(-1)}{1-(-2)} = \frac{3+1}{1+2} = \frac{4}{3}$

La ecuación será: $y - 3 = \frac{4}{3}(x - 1) \Rightarrow \quad y = \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$

Con los dos puntos que tenemos la podemos representar:



b) Puntos de corte con los ejes:

• Con el eje *X:* $y = 0 \rightarrow 0 = -x^2 + 4x \rightarrow x(-x+4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{Punto } (0,0) \\ \text{Punto } (4,0) \end{cases}$

• Con el eje *Y:* $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto (0, 0)

Los puntos de corte con los ejes son el (0, 0) y el (4, 0)

EJERCICIO 18 :

a) Di cuál es la pendiente de cada una de estas rectas: I) $2x + y = 0$ II) $x - 2y + 1 = 0$ III) $y = 2$

b) Representa gráficamente: $y = x^2 - 3x$

Solución:

a) I) $y = -2x \rightarrow$ pendiente $= -2$

II) $y = \frac{x+1}{2} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \rightarrow$ pendiente $= \frac{1}{2}$

III) pendiente $= 0$

b)

Hallamos el vértice: $x = \frac{3}{2} \rightarrow y = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = \frac{-9}{4} \rightarrow \left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$

Puntos de corte con los ejes:

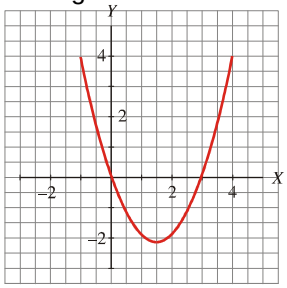
• Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto (0.0)

• Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2 - 3x = 0 \rightarrow x(x-3) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow \text{Punto } (0,0) \\ x = 3 \rightarrow \text{Punto } (3,0) \end{cases}$

Tabla de valores alrededor del vértice:

X	0	1	3/2	2	3
Y	0	-2	-9/4	-2	0

La gráfica sería:



EJERCICIO 19 :

a) Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto (–1, 3) y tiene pendiente –1.

b) Representa gráficamente: $y = -x^2 + 4$

Solución:

a) La ecuación será: $y - 3 = -1(x+1) \Rightarrow y = -x + 2$

b)

El vértice es el punto (0, 4).

Los puntos de corte con los ejes son:

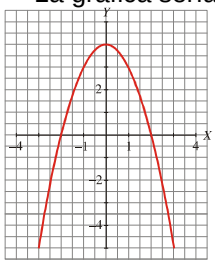
• Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 4 \rightarrow$ Punto (0, 4)

• Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow -x^2 + 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \begin{cases} x = -2 \rightarrow \text{Punto } (-2,0) \\ x = 2 \rightarrow \text{Punto } (2,0) \end{cases}$

Tabla de valores alrededor del vértice:

X	-2	-1	0	0	1
Y	0	3	4	3	0

La gráfica sería:



EJERCICIO 20 ;

a) Representa gráficamente: $2x + y - 1 = 0$

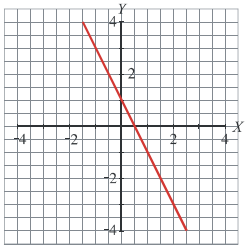
b) Halla el vértice de la parábola: $y = 2x^2 - 8x + 2$

Solución:

a) Despejamos y : $y = -2x + 1$

Hallamos dos puntos de la recta y la representamos.

x	*y*
0	1
1	–1



b) La abscisa del vértice es: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{8}{4} = 2$

La ordenada es: $y = 2 \cdot 4 - 8 \cdot 2 + 2 = 8 - 16 + 2 = -6$

El vértice es el punto (2, – 6).

FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

EJERCICIO 21 : Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = \frac{-3}{x+4}$ **b)** $y = \frac{-1}{x-3} - 2$ **c)** $y = -1 + \frac{2}{x-5}$

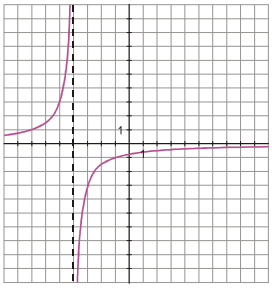
Solución:

a) Dominio de definición: R – {-4}

Tabla de valores

X	-∞	-7	-5	-4^-	-4^+	-3	-1	+∞
Y	0	1	3	+∞	-∞	-3	-1	0

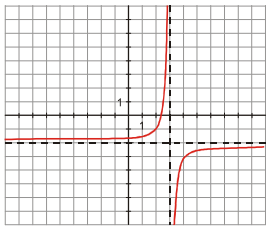
Las asíntotas son la recta $y = 0$ y la recta $x = -4$.



b) Dominio de definición: R – {3}

X	-∞	1	2	3^-	3^+	4	5	+∞
Y	-2	-1,5	-1	+∞	-∞	-3	-2,5	-2

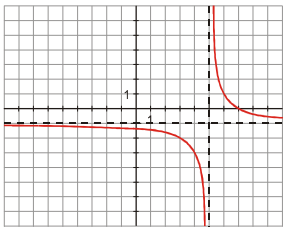
Las asíntotas son las rectas $x = 3$ e $y = -2$.



c) Dominio de definición: R – {5}

X	-∞	3	4	5^-	5^+	6	7	+∞
Y	-1	-2	-3	-∞	+∞	1	0	-1

. Las asíntotas son las rectas $x = 5$, $y = -1$.



FUNCIÓN RADICAL

EJERCICIO 22 : Representa gráficamente las siguientes funciones:

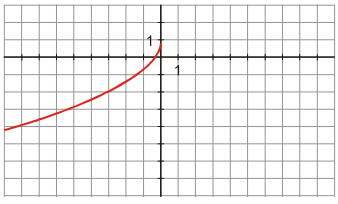
a) $y = 1 - \sqrt{-3x}$ **b)** $y = \sqrt{3x-1}$ **c)** $y = \sqrt{2x+3} - 1$

Solución:

a) Dominio de definición: (-∞,0]

Hacemos una tabla de valores:

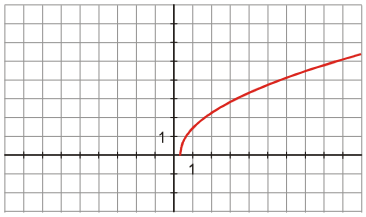
X	-∞	-3	-2	-1	0
Y	-∞	-2	-1,45	-0,73	-11



b) Dominio de definición: $\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$

Hacemos una tabla de valores:

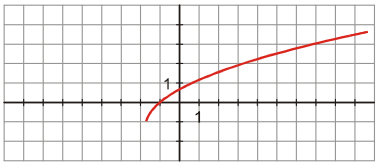
X	1/3	1	2	3	+∞
Y	0	1,41	2,24	2,83	+∞



c) Dominio de definición: $\left[-\frac{3}{2},+\infty\right)$

Tabla de valores:

X	-3/2	-1	1/2	3	+∞
Y	-1	0	1	2	+∞



FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICAS

EJERCICIO 23 : Dibuja la gráfica de las siguientes funciones:

a) $y = 2^{1-x}$ **b)** $y = \log_{1/4} x$ c) $y = 1 - \log_2 x$ **d)** $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+2}$ e) $y = 3^{x+1}$

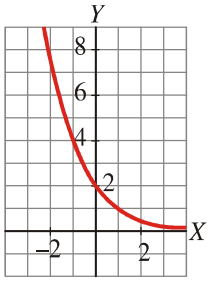
Solución:

a)

- La función está definida y es continua en **R**.
- Hacemos una tabla de valores:

X	-∞	-2	-1	0	1	2	+∞
Y	+∞	8	4	2	1	½	0

- La gráfica es:

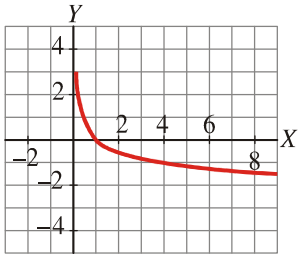


b)

- Dominio = (0, +∞)
- Hacemos una tabla de valores:

X	$\left(\frac{1}{4}\right)^{-\infty}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^{0}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^{1}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^{2}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^{+\infty}$
X	0	16	4	1	¼	1/16	+∞
Y	-∞	-2	-1	0	1	2	+∞

- La gráfica es:

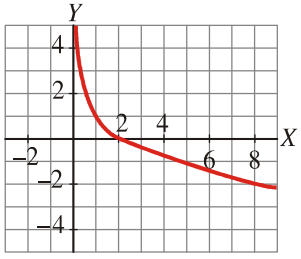


c)

- Dominio = (0, +∞)
- Hacemos una tabla de valores.

X	$2^{-\infty}$	2^{-2}	2^{-1}	2^{0}	2^{1}	2^{2}	$2^{+\infty}$
X	0	¼	½	1	2	4	+∞
Y	+∞	3	2	1	0	-1	-∞

- La gráfica será:



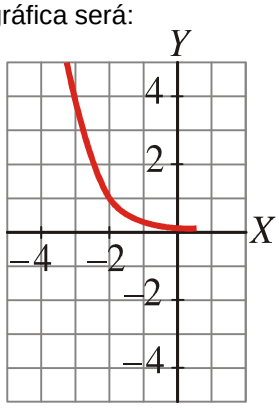
d)

• La función está definida y es continua en **R**.

• Hacemos una tabla de valores:

X	-∞	-2	-1	0	1	2	+∞
Y	+∞	1	¼	1/64	1/256	1/1024	0

• La gráfica será:



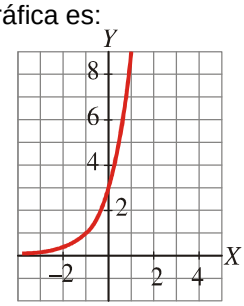
e)

• La función está definida y es continua en **R**.

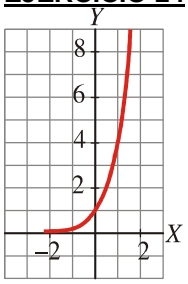
• Hacemos una tabla de valores:

X	-∞	-2	-1	0	1	2	+∞
Y	0	1/3	1	3	9	27	+∞

La gráfica es:



<u>EJERCICIO 24</u> : Consideramos la gráfica:



a) Halla la expresión analítica de la función correspondiente.
b) ¿Cuál es el dominio de dicha función?
c) Estudia la continuidad y el crecimiento.

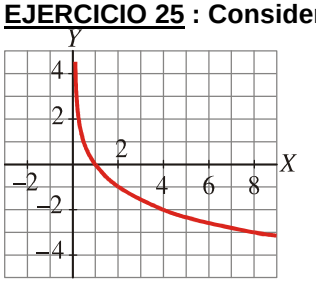
Solución:

a) Es una función exponencial de base mayor que 1, que pasa por los puntos (0, 1), (1, 4)... Su expresión analítica es $y = 4^x$.

b) Dominio = **R**

c) Es una función continua y creciente.

<u>EJERCICIO 25</u> : Considera la siguiente gráfica:



a) Escribe la expresión analítica de la función correspondiente.
b) Estudia la continuidad y el crecimiento de la función e indica cuál es su dominio de definición.

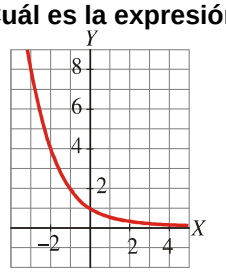
Solución:

a) Es una función logarítmica con base menor que 1, que pasa por los puntos (1, 0), (2, –1), $\left(4, -2\right), \left(\frac{1}{2}, 1\right)$... Su expresión analítica es : $y = log_{1/2} x$

b) • Es una función continua.
• Es decreciente.
• Dominio = $\left(0, +\infty\right)$

EJERCICIO 26 :

a) ¿Cuál es la expresión analítica de la función correspondiente a esta gráfica?



b) Indica cuál es el dominio de definición y estudia la continuidad y el crecimiento de la función.

Solución:

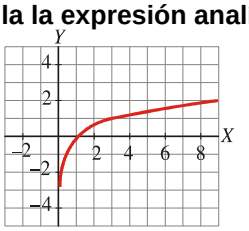
a) Es una función exponencial con base menor que 1, que pasa por los puntos (–2, 4), (–1, 2), $\left(1, \frac{1}{2}\right)$...

Su expresión analítica será: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

b) • Dominio = **R**
- Es continua.
- Es decreciente.

EJERCICIO 27 :

a) Halla la expresión analítica de la función cuya gráfica es:



b) Estudia los siguientes aspectos de la función: dominio, continuidad y crecimiento.

Solución:

a) Es una función logarítmica que pasa por los puntos (1, 0), (3, 1), (9, 2)... Su expresión analítica será:

$y = log_3 x$

b) • Dominio = $(0, +\infty)$
- Es continua.
- Es creciente.

FUNCIONES A TROZOS

EJERCICIO 28 : Representa gráficamente:

a) $y = \begin{cases} 2x^2 & \text{si} \quad x < -1 \\ 2x + 4 & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$ **b)** $y = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ 3 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$ **c)** $y = \begin{cases} (-x + 1)/2 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ -x^2 & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$

Solución:

a)

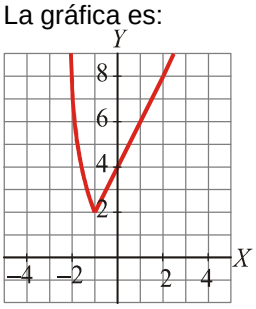
Si $x < -1$, tenemos un trozo de parábola. ($V_x = 0$)

Si $x \geq -1$, tenemos un trozo de recta.

Tabla de valores:

X	-∞	-3	-2	-1	-1	0	+∞
Y	+∞	18	8	2	2	4	+∞

La gráfica es:



La gráfica es:

b)

Si $x \le 2$, es un trozo de parábola. ($V_x = 0$)

Si $x > 2$, es un trozo de recta horizontal.

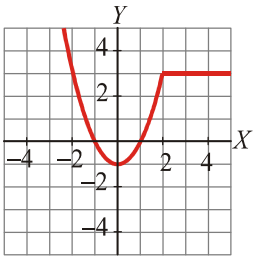


Tabla de valores:

X	-∞	-2	-1	0	1	2	2	3	+∞
Y	0	3	0	-1	0	3	3	3	+∞

c)

Si $x \le -1$, es un trozo de recta.

Si $x > -1$, es un trozo de parábola. ($V_x = 0$)

La gráfica es:

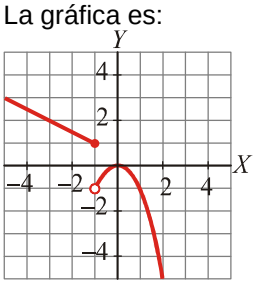


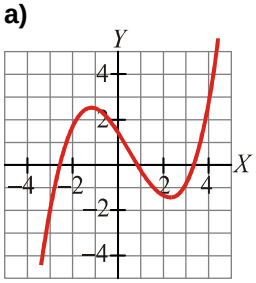
Tabla de valores:

X	-∞	-2	-1	-1	0	1	2	+∞
Y	+∞	1,5	1	-1	0	-1	-4	-∞

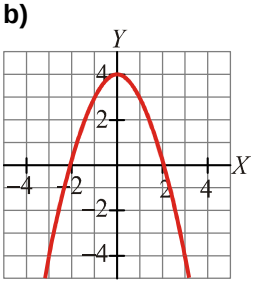
FUNCIONES CON VALOR ABSOLUTO

EJERCICIO 29 : Representa gráficamente la función y = |f(x)|, sabiendo que la gráfica de y = f(x) es la siguiente:

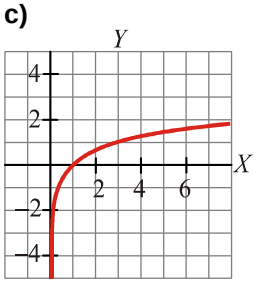
a)



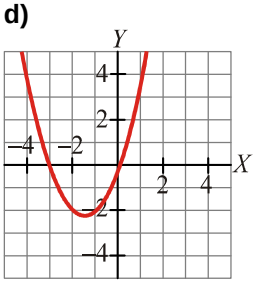
b)



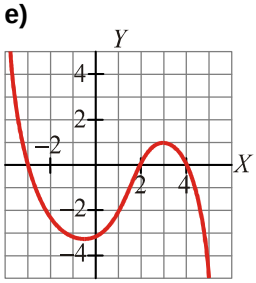
c)



d)

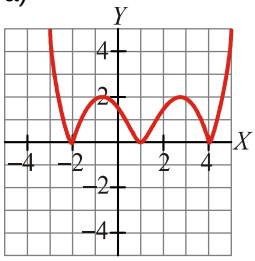


e)

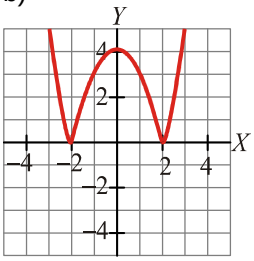


Solución:

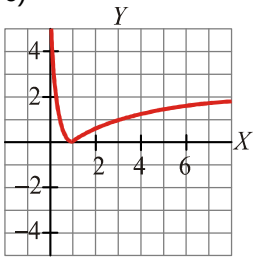
a)



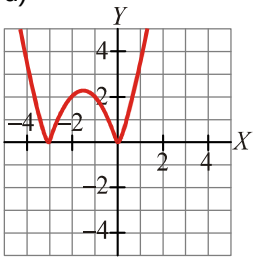
b)



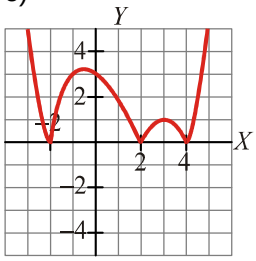
c)



d)



e)



EJERCICIO 30 : Define como funciones "a trozos":

a) $y = |2x + 4|$ **b) y = | -x + 3|** **c)** $y = \left|\frac{x+1}{2}\right|$ **d)** $y = |3x - 2|$ **e)** $y = \left|\frac{3x+1}{2}\right|$.

Solución:

a) $y = \begin{cases} -2x - 4 & \text{si} \quad x < -2 \\ 2x + 4 & \text{si} \quad x \ge -2 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} -x + 3 & \text{si} \quad x < 3 \\ x - 3 & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} -\frac{x+1}{2} & \text{si} \quad x < -1 \\ \frac{x+1}{2} & \text{si} \quad x \ge -1 \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} -3x + 2 & \text{si} \quad x < \frac{2}{3} \\ 3x - 2 & \text{si} \quad x \ge \frac{2}{3} \end{cases}$

e) $y = \begin{cases} -\frac{3x+1}{2} & \text{si} \quad x < \frac{-1}{3} \\ \frac{3x+1}{2} & \text{si} \quad x \ge \frac{-1}{3} \end{cases}$

FUNCIONES ARCOS

EJERCICIO 31 : Obtén el valor de estas expresiones en grados:

a) $y = arcsen\,\frac{1}{2}$ **b)** $y = arccos\,\frac{\sqrt{2}}{2}$ **a)** $y = arccos\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** $y = arctg\,1$

a) $y = arcsen\left(-\frac{1}{2}\right)$ **b)** $y = arccos\,1$ **a)** $y = arccos\,(-1)$ **b)** $y = arctg\left(\sqrt{3}\right)$

a) $y = arcsen\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **b)** $y = arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Solución:

a) $y = 30^\circ$ b) $y = 45^\circ$ a) $y = 30^\circ$ b) $y = 45^\circ$ a) $y = -30^\circ$

b) $y = 0^\circ$ a) $y = 180^\circ$ b) $y = 60^\circ$ a) $y = -60^\circ$ b) $y = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

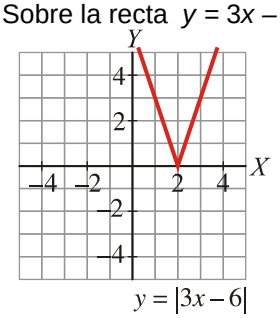
RECOPILACIÓN DE FUNCIONES

EJERCICIO 32 : Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = |3x - 6|$ **b)** $y = 2^{x-1}$

Solución:

a) Sobre la recta $y = 3x - 6$, hallamos su valor absoluto:

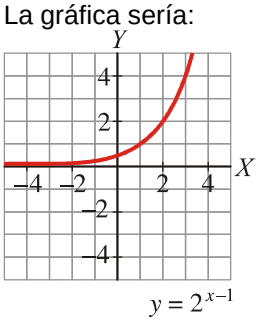


b) Dominio: D = R

Hacemos una tabla de valores:

X	-∞	-2	-1	0	1	2	+∞
Y	0	1/8	¼	½	0	1	+∞

La gráfica sería:

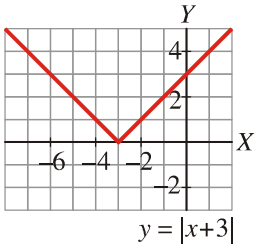


EJERCICIO 33 : Obtén la gráfica de las siguientes funciones:

a) $y = |x + 3|$ **b)** $y = -\frac{x^2}{2} + 2x - 2$

Solución:

a) Sobre la recta $y = x + 3$, hallamos su valor absoluto :



b)
- Hallamos el vértice de la parábola: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{-1} = 2 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto $(2, 0)$
- Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \to y = 0 \quad \to \quad \frac{-x^2}{2} + 2x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x + 4 = 0$

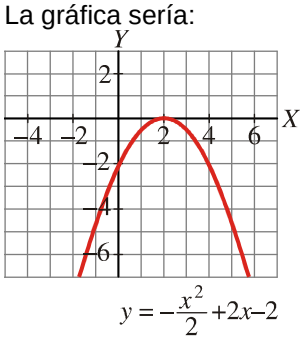
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = 2 \quad \to \quad \text{Punto } (2, 0)$$

Con el eje $Y \to x = 0 \quad \to \quad y = -2 \quad \to \quad$ Punto $(0, -2)$

- Tabla de valores alrededor del vértice:

X	-∞	0	1	2	3	4	+∞
Y	0	-2	-1/2	0	-1/2	-2	+∞

- La gráfica sería:



EJERCICIO 34 : Representa las gráficas de las funciones:

a) $y = 1 - \frac{x^2}{4}$ **b)** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$

Solución:

a) • El vértice de la parábola está en $(0, 1)$

• Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \quad \to \quad y = 0 \quad \to \quad 1 - \frac{x^2}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4 - x^2 = 0 \quad \Rightarrow x = \pm 2 \quad \to$

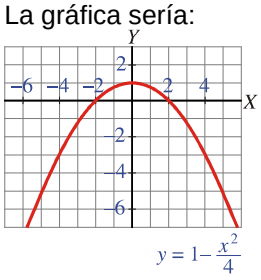
$\to \quad$ Puntos $(-2,\ 0)$ y $(2,\ 0)$

Con el eje $Y \to \quad x = 0 \quad \to \quad y = 1 \quad \to \quad$ Punto $(0, 1)$

- Tabla de valores alrededor del vértice:

X	-∞	-2	-1	0	1	2	+∞
Y	-∞	0	¾	1	¾	0	-∞

- La gráfica sería:

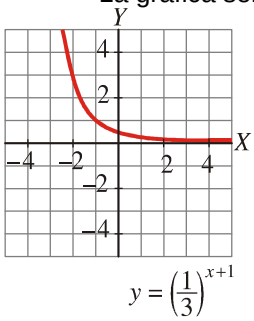


b) Dominio: D = R

• Hacemos una tabla de valores:

X	-∞	-2	-1	0	1	2	+∞
Y	+∞	3	1	1/3	1/9	1/27	+∞

- La gráfica sería:

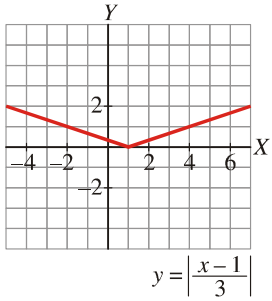


EJERCICIO 35 : Representa gráficamente:

a) $y = \left|\frac{x-1}{3}\right|$ **b)** $y = 2^{-x}$

Solución:

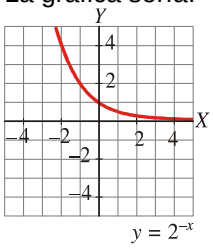
a) Sobre la recta $y = \frac{x-1}{3}$, hallamos su valor absoluto :



b) Dominio: D = R
Hacemos una tabla de valores:

X	-∞	-2	-1	0	1	2	+∞
Y	+∞	4	2	1	½	¼	0

La gráfica sería:



EJERCICIO 36 : Dibuja la gráfica de las siguientes funciones:

a) $f(x)=(x-1)^2+2$ **b)** $f(x)=3^{1-x}$

Solución:

a) • Es una parábola con vértice en (1, 2).

• Puntos de corte con los ejes:

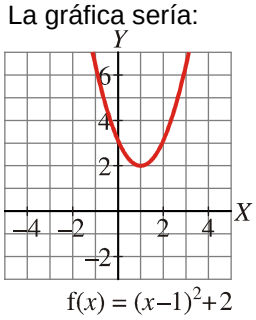
Con el eje $X \rightarrow \quad y=0 \quad \rightarrow (x-1)^2+2=0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2=-2 \quad \rightarrow$ No corta al eje X.

Con el eje $Y \rightarrow \quad x=0 \quad \rightarrow \quad y=3 \quad \rightarrow$ Punto $(0, 3)$

• Tabla de valores alrededor del vértice:

X	-∞	-1	0	1	2	3	+∞
Y	+∞	6	3	2	3	6	+∞

• La gráfica sería:

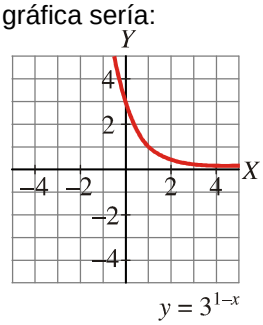


b) Dominio: D = R

• Hacemos una tabla de valores:

X	-∞	-2	-1	0	1	2	+∞
Y	+∞	27	9	3	1	1/3	0

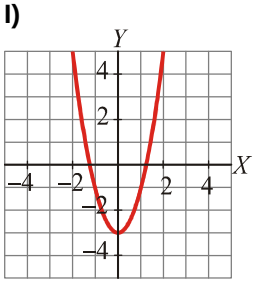
• La gráfica sería:



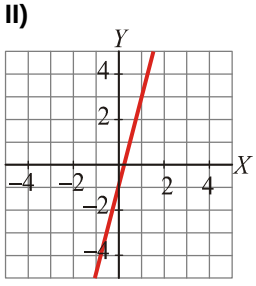
EJERCICIO 37 : Asocia cada una de estas gráficas con su correspondiente ecuación:

a) $y=\frac{2}{3}x$ **b)** $y=2x^2-3$ **c)** $y=3{,}5x-0{,}75$ **d)** $y=-x^2+4$

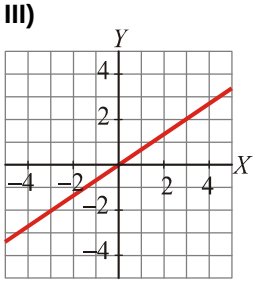
I)



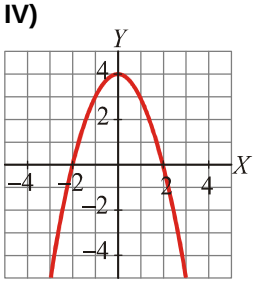
II)



III)



IV)

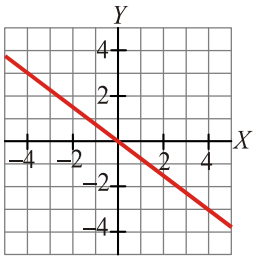
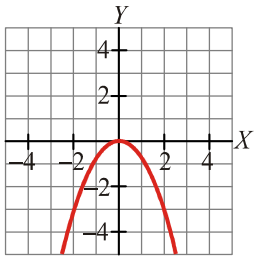
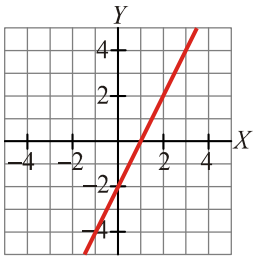
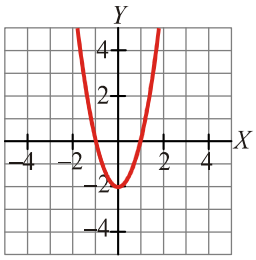


Solución: a) III b) I c) II d) IV

EJERCICIO 38 : Asocia a cada una de estas gráficas una de las siguientes expresiones analíticas:

a) $y=\frac{-3x^2}{4}$ **b)** $y=\frac{-3x}{4}$ **c)** $y=2x^2-2$ **d)** $y=2x-2$

I) **II)** **III)** **IV)**

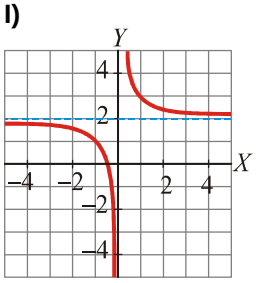





Solución: a) II b) I c) IV d) III

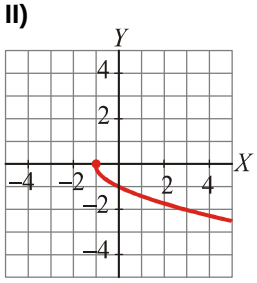
EJERCICIO 39 : Asocia a cada una de estas gráficas su ecuación:

a) $y = \dfrac{1}{x-4}$ **b)** $y = \sqrt{2x}$ **c)** $y = \dfrac{1}{x} + 2$ **d)** $y = -\sqrt{x+1}$

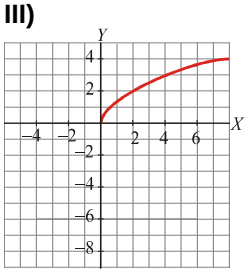
I)



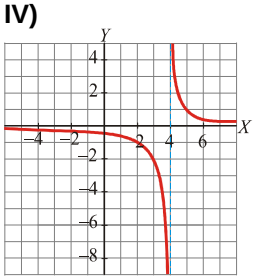
II)



III)



IV)

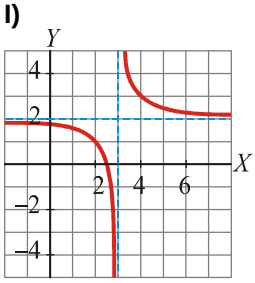


Solución: a) IV b) III c) I d) II

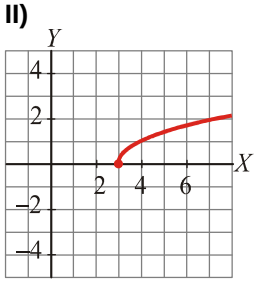
EJERCICIO 40 : Asocia cada gráfica con su correspondiente ecuación:

a) $y = \dfrac{1}{x} - 3$ **b)** $y = \sqrt{x-3}$ **c)** $y = \dfrac{1}{x-3} + 2$ **d)** $y = \sqrt{x+3}$

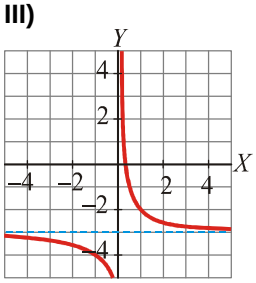
I)



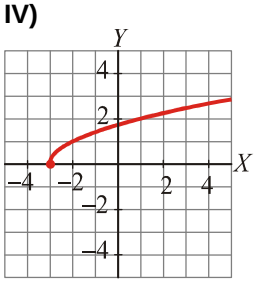
II)



III)



IV)

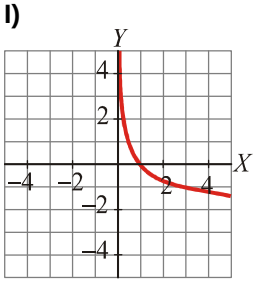


Solución: a) III b)II c) I d) IV

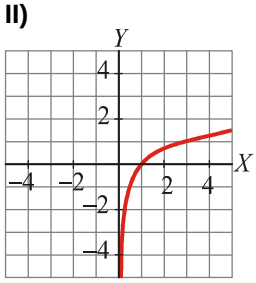
EJERCICIO 41 : Asocia cada una de las siguientes gráficas con su expresión analítica:

a) $y = 3^x$ **b)** $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ **c)** $y = \log_3 x$ **d)** $y = \log_{1/3} x$

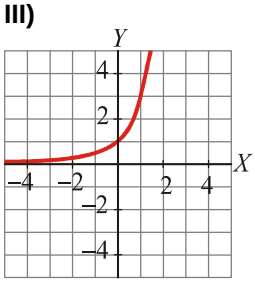
I)



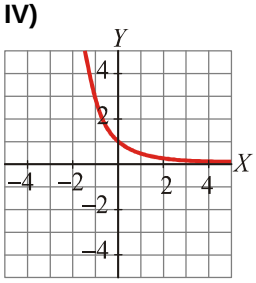
II)



III)



IV)

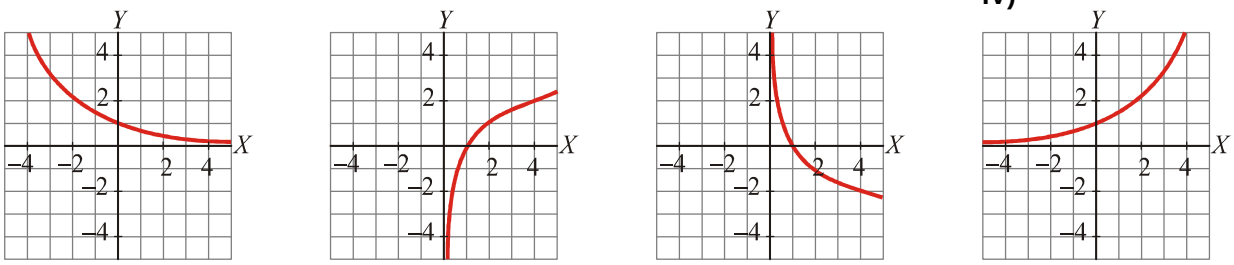


Solución: a) III b) IV c) II d) I

EJERCICIO 42 : Asocia a cada gráfica su ecuación:

a) $y = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$ **b)** $y = \left(\dfrac{3}{2}\right)^x$ **c)** $y = log_2 x$ **d)** $y = log_{1/2} x$

I) **II)** **III)** **IV)**



Solución: a) I b) IV c) II d) III

PROBLEMAS

EJERCICIO 43 : En algunos países se utiliza un sistema de medición de la temperatura distinto a los grados centígrados que son los grados Farenheit. Sabiendo que 10 °C = 50 °F y que 60 °C = 140 °F, obtén la ecuación que nos permita traducir temperaturas de °C a °F.

Solución:

Llamamos x a la temperatura en grados centígrados e y a la temperatura en grados Farenheit. La función que buscamos pasa por los puntos (10, 50) y (60, 140). Será una recta con pendiente:

$$m = \frac{140-50}{60-10} = \frac{90}{50} = \frac{9}{5}$$

La ecuación es: $y - 50 = \frac{9}{5}(x-10) \Rightarrow y = \frac{9}{5}x + 32$

EJERCICIO 44 : En un contrato de alquiler de una casa figura que el coste subirá un 2% cada año. Si el primer año se pagan 7200 euros (en 12 recibos mensuales):

a) ¿Cuánto se pagará dentro de 1 año? ¿Y dentro de 2 años?

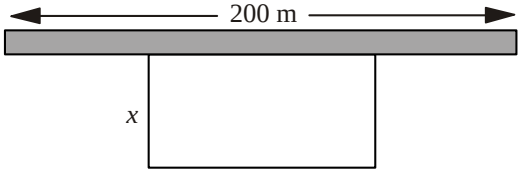
b) Obtén la función que nos dé el coste anual al cabo de x años.

Solución:

a) Dentro de 1 año se pagarán $7200 \cdot 1{,}02 = 7344$ euros.
Dentro de 2 años se pagarán $7200 \cdot 1{,}02^2 = 7490{,}88$ euros.

b) Dentro de x años se pagarán: $y = 7200 \cdot 1{,}02^x$ euros.

EJERCICIO 45 : Con 200 metros de valla queremos acotar un recinto rectangular aprovechando una pared:

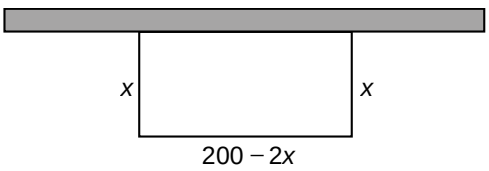


a) Llama x a uno de los lados de la valla. ¿Cuánto valen los otros dos lados?

b) Construye la función que nos da el área del recinto.

Solución:

a)



b) Área $= x(200 - 2x) = 200x - 2x^2$

EJERCICIO 46 : Una barra de hierro dulce de 30 cm de larga a 0 °C se calienta, y su dilatación viene dada por una función lineal $l = a + bt$, donde l es la longitud (en cm) y t es la temperatura (en °C).

a) Halla la expresión analítica de l, sabiendo que $l(1)=30{,}0005$ cm y que $l(3)=30{,}0015$ cm.

b) Representa gráficamente la función obtenida.

Solución:

a) $\left.\begin{array}{l} l(1)=30{,}0005 \;\Rightarrow\; a+b=30{,}0005 \\ l(3)=30{,}0015 \;\Rightarrow\; a+3b=30{,}0015 \end{array}\right\}$

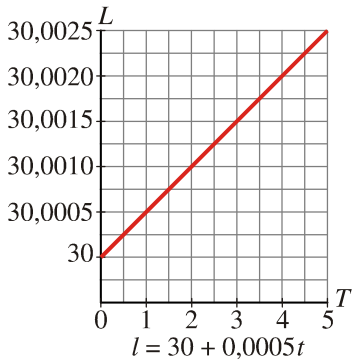
Restando a la segunda ecuación la primera, queda:

$2b=0{,}0010 \;\Rightarrow\; b=0{,}0005 \;\rightarrow$

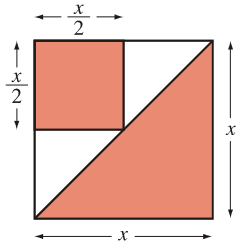
$a=30{,}0005-b=30{,}0005-0{,}0005=30$

Por tanto: $l=30+0{,}0005t$

b)



<u>EJERCICIO 47</u> : En un cuadrado de lado *x* cm, consideramos el área de la parte que está coloreada:



a) Halla la ecuación que nos da el valor de dicha área, *y*, en función del lado del cuadrado, *x*.
b) Representa gráficamente la función obtenida.

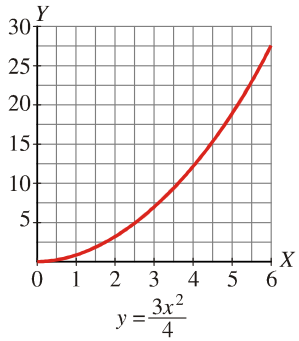
Solución:

a) El área del triángulo es $\frac{x^2}{2}$.

El área del cuadradito es $\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^2}{4}$.

Por tanto, el área total será: $y=\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{4}=\frac{3x^2}{4}$

b)



<u>EJERCICI 48</u> : Un tendero tiene 20 kg de manzanas que hoy venderá a 40 céntimos de euro/kg. Cada día que pasa se estropeará 1 kg y el precio aumentará 10 céntimos de euro/kg.
a) Escribe la ecuación que nos da el beneficio obtenido en la venta, *y*, en función de los días que pasan hasta que vende las manzanas, *x*.
b) Representa la función obtenida, considerando que *x* puede tomar cualquier valor $x \geq 0$,

Solución:

a) Si pasan *x* días:

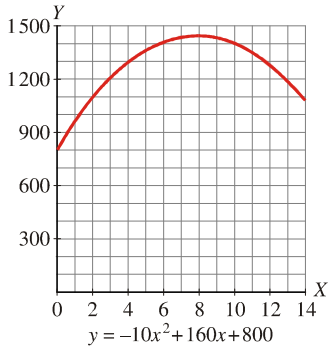
Tendrá (20−*x*) kg y los venderá a (40+10*x*) céntimos de euro cada uno.

Por tanto, obtendrá un beneficio de:

$y=(20-x)(40+10x)=800+200x-40x-10x^2$

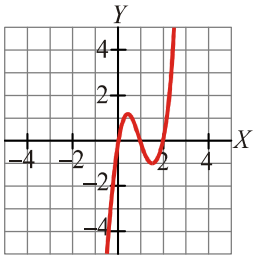
$y=-10x^2+160x+800$

b)



TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES

EJERCICIO 49 : La siguiente gráfica corresponde a la función $y = f(x)$



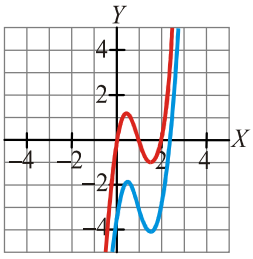
A partir de ella, representa:

a) $y = f(x) - 3$

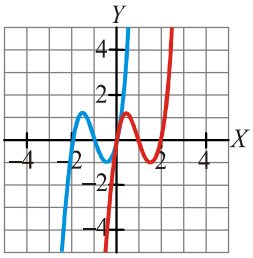
b) $y = f(x + 2)$

Solución:

a)

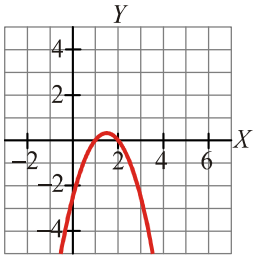


b)



(La gráfica de *f(x)* no es necesario incluirla. La añadimos para que se aprecie más claramente la transformación).

EJERCICIO 50 : A partir de la gráfica de $y = f(x)$



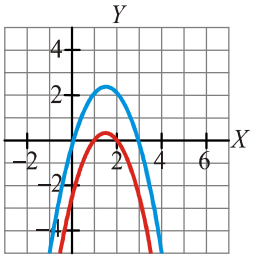
construye las gráficas de:

a) $y = f(x) + 2$

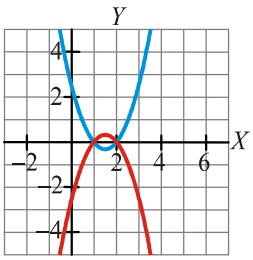
b) $y = -f(x)$

Solución:

a)

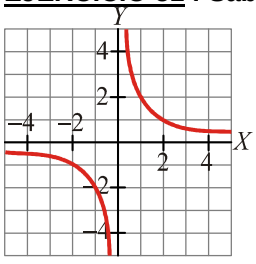


b)



(La gráfica de *f(x)* no es necesario incluirla. La añadimos para que se aprecie más claramente la transformación).

EJERCICIO 51 : Sabiendo que la gráfica de *y = f(x)* es la siguiente:



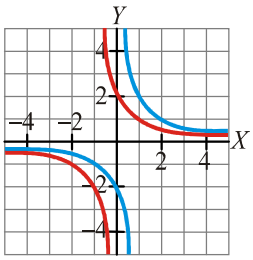
construye, a partir de ella, las gráficas de:

a) $y = f(x - 1)$

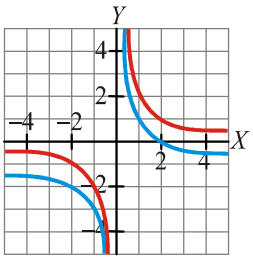
b) $y = f(x) - 1$

Solución:

a)

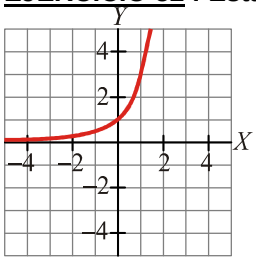


b)



(La gráfica de *f(x)* no es necesario incluirla. La añadimos para que se aprecie más claramente la transformación).

EJERCICIO 52 : Esta es la gráfica de la función *y = f(x)*.



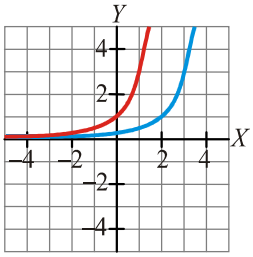
Representa, a partir de ella, las funciones:

a) $f(x-2)$

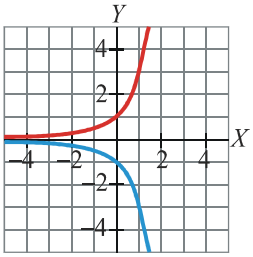
b) $y=-f(x)$

Solución:

a)

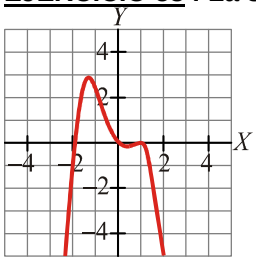


b)



(La gráfica de *f(x)* no es necesario incluirla. La añadimos para que se aprecie más claramente la transformación).

EJERCICIO 53 : La siguiente gráfica es la de *y = f(x)*.



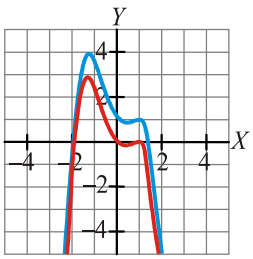
Representa, a partir de ella, las funciones:

a) $y=f(x)+1$

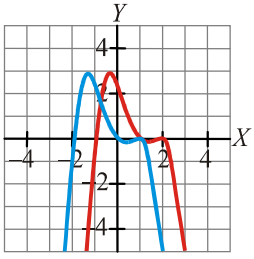
b) $y=f(x+1)$

Solución:

a)



b)



(La gráfica de *f(x)* no es necesario incluirla. La añadimos para que se aprecie más claramente la transformación).

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

EJERCICIO 54 : Dadas las siguientes funciones : $f(x)=\frac{-3x+2}{4}$ y $g(x)=x^2+1$, halla :

a) $(f\circ g)(x)$ **b)** $(g\circ g)(x)$

Solución:

a) $(f\circ g)(x)=f[g(x)]=f\left[x^2+1\right]=\frac{-3\left(x^2+1\right)+2}{4}=\frac{-3x^2-3+2}{4}=\frac{-3x^2-1}{4}$

b) $(g\circ g)(x)=g[g(x)]=g\left[x^2+1\right]=\left(x^2+1\right)^2+1=x^4+2x^2+1+1=x^4+2x^2+2$

EJERCICIO 55 : Las funciones *f* y *g* están definidas por $f(x)=\frac{x^2}{3}$ y $g(x)=x+1$. Calcula :

a) $(f\circ g)(x)$ **b)** $(g\circ g\circ f)(x)$

Solución:

a) $(f\circ g)(x)=f[g(x)]=f[x+1]=\frac{(x+1)^2}{3}=\frac{x^2+2x+1}{3}$

b) $(g\circ g\circ f)(x)=g[g[f(x)]]=g\left[g\left(\frac{x^2}{3}\right)\right]=g\left(\frac{x^2}{3}+1\right)=\frac{x^2}{3}+1+1=\frac{x^2}{3}+2$

EJERCICIO 56 : Sabiendo que: $f(x)=3x^2$ y $g(x)=\frac{1}{x+2}$ Explica cómo se pueden obtener por composición, a partir de ellas, las siguientes funciones: $p(x)=\frac{3}{(x+2)^2}$ $q(x)=\frac{1}{3x^2+2}$

Solución: $p(x)=(f\circ g)(x)$ $q(x)=(g\circ f)(x)$

EJERCICIO 57 : Explica cómo se pueden obtener por composición las funciones *p(x)* y *q(x)* a partir de *f(x)* y *g(x)*, siendo: $f(x)=2x-3$, $g(x)=\sqrt{x-2}$, $p(x)=2\sqrt{x-2}-3$ y $q(x)=\sqrt{2x-5}$

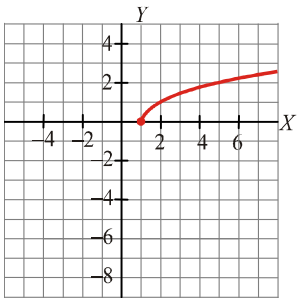
Solución: $p(x)=(f\circ g)(x)$ $q(x)=(g\circ f)(x)$

EJERCICIO 58 : Las funciones *f* y *g* están definidas por: $f(x)=\frac{x-1}{3}$ y $g(x)=\sqrt{x}$. Explica cómo, a partir de ellas, por composición, podemos obtener: $p(x)=\sqrt{\frac{x-1}{3}}$ y $q(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{3}$

Solución: $p(x)=(g\circ f)(x)$ $q(x)=(f\circ g)(x)$

INVERSA DE UNA FUNCIÓN

EJERCICIO 59 : Esta es la gráfica de la función *y = f (x):*



a) Calcula $f^{-1}(0)$ y $f^{-1}(2)$.

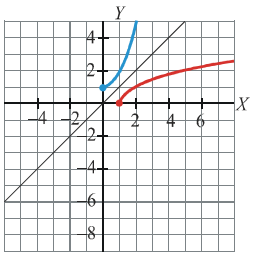
b) Representa en los mismos ejes $f^{-1}(x)$ a partir de la gráfica de $f(x)$.

Solución:

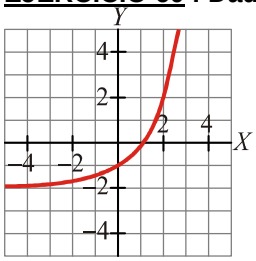
a) $f^{-1}(0)=1$ porque $f(1)=0$

$f^{-1}(2)=5$ porque $f(5)=2$

b)



EJERCICIO 60 : Dada la gráfica de la función *y = f (x)*:



a) Calcula $f^{-1}(-1)$ y $f^{-1}(0)$.

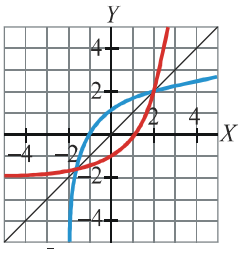
b) Representa gráficamente en los mismos ejes $f^{-1}(x)$, a partir de la gráfica de $f(x)$.

Solución:

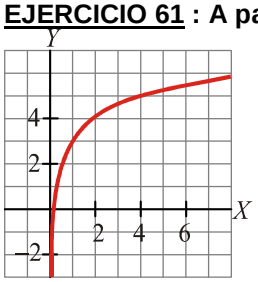
a) $f^{-1}(-1)=0$ porque $f(0)=-1$

$f^{-1}(0)=1$ porque $f(1)=0$

b)



EJERCICIO 61 : A partir de la gráfica de *y = f (x):*



a) Calcula $f^{-1}(3)$ y $f^{-1}(5)$.

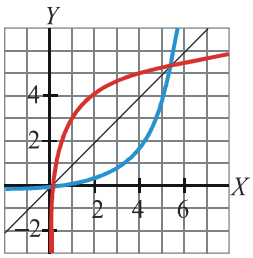
b) Representa, en los mismos ejes, $f^{-1}(x)$.

Solución:

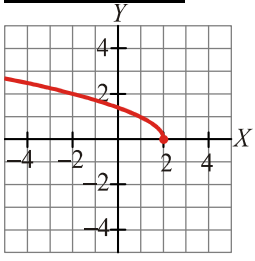
a) $f^{-1}(3)=1$ porque $f(1)=3$

$f^{-1}(5)=4$ porque $f(4)=5$

b)



EJERCICIO 62 : Esta gráfica corresponde a la función *y = f (x)*:



A partir de ella:

a) Calcula $f^{-1}(2)$ y $f^{-1}(0)$.

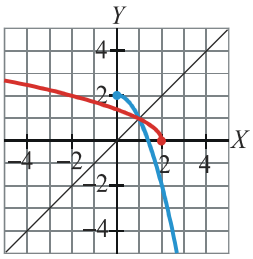
b) Representa, en los mismos ejes, la función $f^{-1}(x)$.

Solución:

a) $f^{-1}(2) = -2$ porque $f(-2) = 2$

$f^{-1}(0) = 2$ porque $f(2) = 0$

b)



EJERCICIO 63 : Halla la función inversa de:

a) $f(x) = \dfrac{2x-1}{3}$ **b)** $f(x) = \dfrac{2-3x}{4}$ **c)** $f(x) = \dfrac{-x+3}{2}$ **d)** $f(x) = \dfrac{-2x-1}{5}$ **e)** $f(x) = \dfrac{-2+7x}{3}$

Solución:

a) Cambiamos x por y, y despejamos la y :

$$x = \frac{2y-1}{3} \Rightarrow 3x = 2y-1 \Rightarrow 3x+1 = 2y \Rightarrow \frac{3x+1}{2} = y \Rightarrow \text{Por tanto: } f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{2}$$

b) Cambiamos x por y y despejamos la y :

$$x = \frac{2-3y}{4} \Rightarrow 4x = 2-3y \Rightarrow 3y = 2-4x \Rightarrow y = \frac{2-4x}{3} \Rightarrow \text{Por tanto: } f^{-1}(x) = \frac{2-4x}{3}$$

c) Cambiamos x por y, y despejamos la y :

$$x = \frac{-y+3}{2} \Rightarrow 2x = -y+3 \Rightarrow y = 3-2x \Rightarrow \text{Por tanto: } f^{-1}(x) = 3-2x$$

d) Cambiamos x por y, y despejamos la y :

$$x = \frac{-2y-1}{5} \Rightarrow 5x = -2y-1 \Rightarrow 2y = -5x-1 \Rightarrow y = \frac{-5x-1}{2} \Rightarrow \text{Por tanto: } f^{-1}(x) = \frac{-5x-1}{2}$$

e) Cambiamos x por y y despejamos la y :

$$x = \frac{-2+7y}{3} \Rightarrow 3x = -2+7y \Rightarrow 3x+2 = 7y \Rightarrow \frac{3x+2}{7} = y \Rightarrow \text{Por tanto: } f^{-1}(x) = \frac{3x+2}{7}$$