

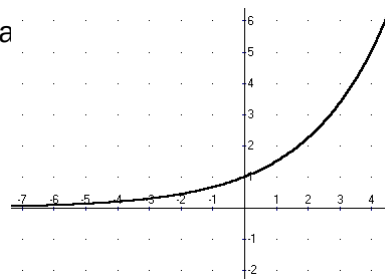
LA FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA.

Función exponencial

La función exponencial es de la forma $f(x) = a^x$, tal que $a > 0$, $a \neq 1$.
El valor a se llama base de la función exponencial.

Propiedades:

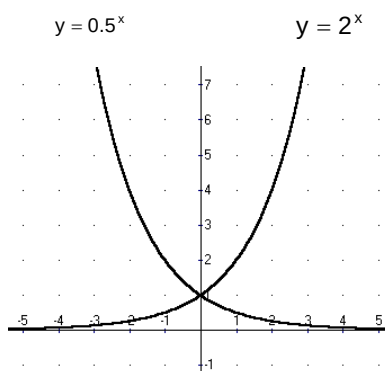
- El dominio es $\mathbb{R}$.
- El recorrido es $]0, +\infty[$
- La función es continua en $\mathbb{R}$.
- $f(0) = 1$
- Si $f(x) = f(y)$, entonces $x = y$,
es decir, si $a^x = a^y$, entonces $x = y$
- $f(x) \cdot f(y) = f(x + y)$
-



$$y = 15^x$$

Si $a > 1$ la función es creciente	Si $0 < a < 1$ la función es decreciente
$y = 2^x$	$y = 0.4^x$

- Las gráficas de las funciones $f(x) = a^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ son simétricas respecto del eje de ordenadas OY



Ejercicio 1:

Estudia y representa la función $f(x) = 4^x$.

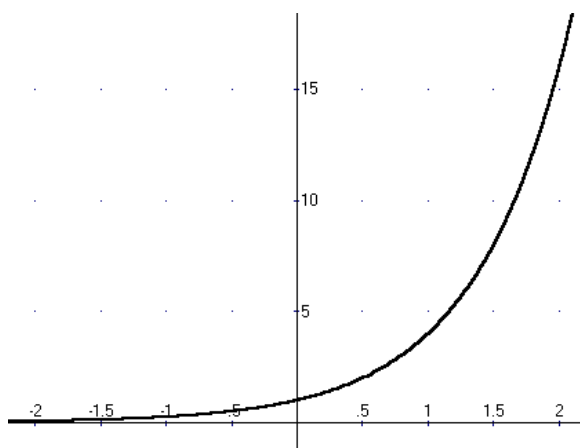
Es una función exponencial de base $a = 4$

El dominio es $\mathbb{R}$

El recorrido es $]0, +\infty[$

Es una función creciente.

La función es continua en $\mathbb{R}$



Construimos una tabla de valores de la función:

x	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5
y	0,03125	0,0625	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8	16	32

Ejercicio 2:

Resuelve la ecuación exponencial: $3^{x-1} = 729$

Intentaremos que las dos partes de la ecuación sean dos potencias de la misma base:

$$729 = 3^6$$

$$3^{x-1} = 3^6$$

Igualando los exponentes:

$$x - 1 = 6$$

La solución de la ecuación es $x = 7$

Nota: para resolver ecuaciones donde no podamos obtener a las dos partes de la igualdad potencias de la misma base, se aplicarán logaritmos. Por ejemplo $2^x = 3$

Ejercicio 3:

Resuelve la ecuación exponencial: $3^{2x} - 3^{x+1} - 3^x = 45$

Para resolver este tipo de ecuaciones utilizaremos incógnitas auxiliares:

Efectuamos el cambio $y = 3^x$

$$\text{Entonces: } 3^{2x} = (3^x)^2 = y^2, \quad 3^{x+1} = 3^x \cdot 3 = 3y$$

La ecuación inicial se transformaría en la siguiente:

$$y^2 - 3y - y = 45$$

Resolvamos la ecuación de segundo grado:

$$y^2 - 4y - 45 = 0, \quad y = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 180}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{196}}{2} = \frac{4 \pm 14}{2}, \quad y = 9, \quad y = -5$$

Deshacemos el cambio:

$$y = 3^x = 9, \text{ entonces } 3^x = 3^2, \text{ igualando exponentes, } x = 2$$

$y = 3^x = -5$, la ecuación $3^x = -5$ no tiene solución, la función exponencial siempre es positiva.

Ejercicios propuestos:

1. Con la ayuda de la calculadora, efectúa las siguientes operaciones:

a) $2^{1/3} =$

d) $2^{-2.7} =$

g) $2^\pi =$

b) $2^{-2/5} =$

e) $2^{\sqrt{3}} =$

h) $2^{-\pi} =$

c) $2^{13} =$

f) $2^{-\sqrt{5}} =$

i) $2^{2+\sqrt{2}} =$

2. La calculadora tiene dos funciones exponenciales 10^x e^x
Con la ayuda de la calculadora, efectúa las siguientes operaciones:

a) $10^{13} =$

e) $10^{\sqrt{10}} =$

i) $e^{3/4} =$

b) $10^{-3.6} =$

f) $10^{-\sqrt{3}} =$

j) $e^{-5/3} =$

c) $10^{5/4} =$

g) $e^{2.3} =$

k) $e^{\sqrt{2}} =$

d) $10^{-7/3} =$

h) $e^{-1.6} =$

l) $e^{-\sqrt{5}} =$

3. Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2^x$

f) $p(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

b) $g(x) = 3^x$

g) $q(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

c) $h(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

h) $r(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$

d) $m(x) = 2 \cdot 5^x$

e) $n(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

4. Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $f(x) = 10^x$

e) $n(x) = -3 \cdot 10^x$

b) $g(x) = e^x$

f) $p(x) = -5 \cdot e^x$

c) $h(x) = 2 \cdot 10^x$

g) $q(x) = 0.1^x$

d) $m(x) = 5 \cdot e^x$

h) $r(x) = 100^x$

5. La mayoría de las bacterias se reproducen por bipartición, es decir, una célula madre se divide en dos células hijas. Supongamos que un tipo de bacterias necesita 1 hora para duplicarse.

Completa la tabla siguiente. Define la función y represéntala gráficamente.

x(horas)	0	1	2	3	4	5	6	x
Y(bacterias)								

6. La presión atmosférica varía según la altura con la siguiente fórmula $P(x) = 0.9^x$, donde x es la altura en kilómetros y $P(x)$ la presión atmosférica en atmósferas. Representa la función.

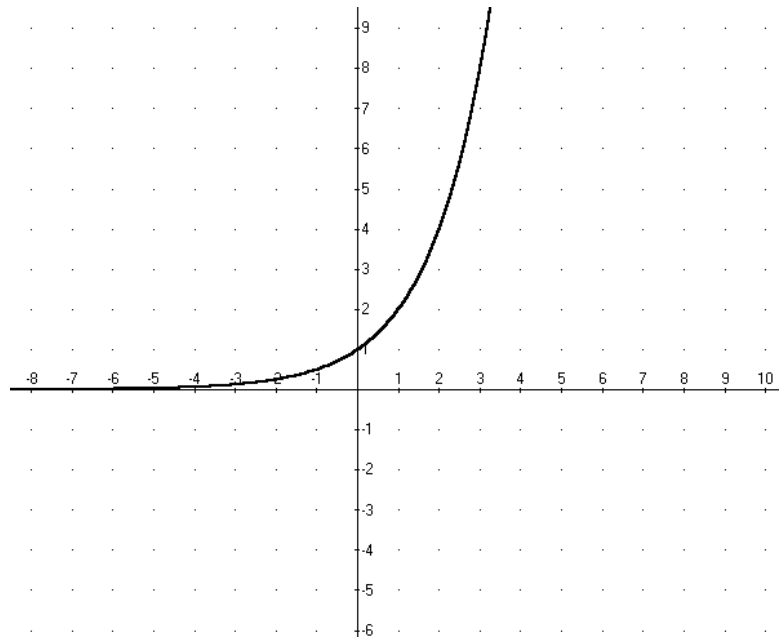
7. Dada la función $f(x) = 2^x$
Sin utilizar tablas de valores dibuja las funciones:

$$g(x) = 2^x + 3$$

$$h(x) = 2^x - 4$$

$$m(x) = 2^{x+2}$$

$$n(x) = 2^{x-1}$$



8. Dada la función $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

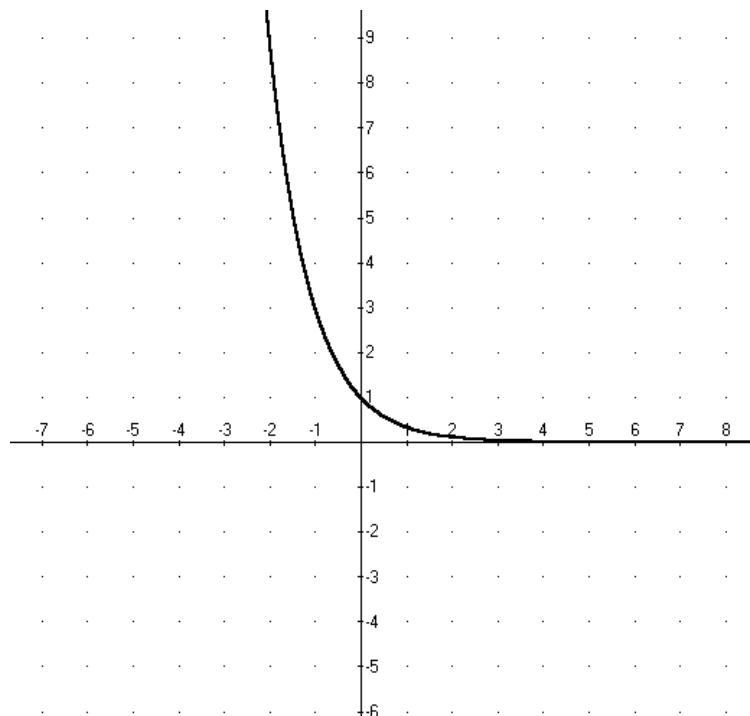
Sin utilizar tablas de valores dibuja las funciones:

$$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 4$$

$$h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3$$

$$m(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$$

$$n(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$$



9. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $7^{x+1} = 7^{3x+2}$

b) $5^{x+3} = 5$

c) $2^x = 1024$

d) $2^{3x+1} = 1$

e) $3^{5x} = 81$

f) $3^{2x-1} = \frac{1}{9}$

g) $3^x = \sqrt{3}$

h) $7^{x-1} = 49^{3x-2}$

i) $25^{2x} = 125^{x-1}$

j) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 14$

k) $7^x + 7^{x+1} + 7^{x+2} = 2793$

l) $3^{x+1} + 3^{x+2} - 3^{x+3} = -5$

m) $3 \cdot 2^x - 5 \cdot 2^{x-2} = 14$

n) $2 \cdot 3^{x+3} + 4 \cdot 3^{x+4} = 14$

o) $3^{2x} - 3^{x+1} = 54$

p) $2^{2x+2} + 2^{x+3} = 320$

q) $4^x - 2^{x+1} - 3 \cdot 2^x = 24$

r) $9^x - 5 \cdot 3^{x+2} - 7 \cdot 3^x = 2349$

La función logarítmica

Sea $a > 0$, $a \neq 1$

Definimos logaritmo base a de x y lo representamos $\log_a x$ al valor y tal que:

$a^y = x$, es decir, la operación inversa de la exponencial.

Ejercicio 4:

Calcula $\log_2 8$, $\log_3 \left(\frac{1}{81} \right)$, $\log_7 \sqrt[3]{49}$

$\log_2 8 = y$, $2^y = 8$, $2^y = 2^3$, por tanto, $y = 3$. Entonces, $\log_2 8 = 3$

$\log_3 \left(\frac{1}{81} \right) = y$, $3^y = \frac{1}{81}$, $3^y = 3^{-4}$, por tanto, $y = -4$. Entonces $\log_3 \left(\frac{1}{81} \right) = -4$

$\log_7 \sqrt[3]{49} = y$, $7^y = \sqrt[3]{49}$, $7^y = 7^{2/3}$, por tanto, $y = \frac{2}{3}$. Entonces $\log_7 \sqrt[3]{49} = \frac{2}{3}$

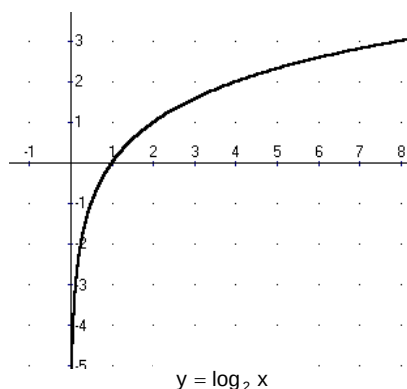
Función logarítmica:

A la función $f(x) = \log_a x$, tal que $a > 0$, $a \neq 1$

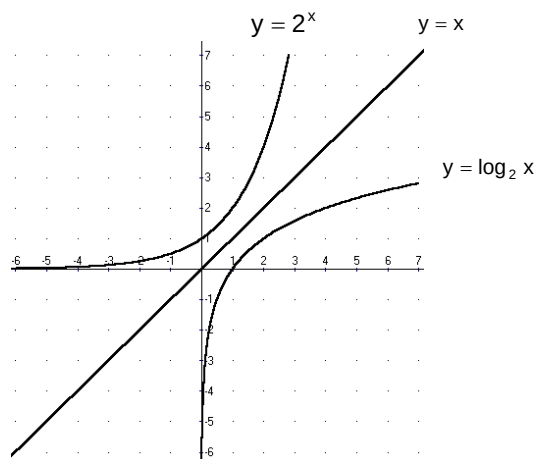
Se llama función logarítmica

Propiedades del logaritmos y la función logarítmica

- El dominio de la función logarítmica es $]0, +\infty]$
- El recorrido de la función logarítmica es $\mathbb{R}$.
- La función es continua en $]0, +\infty]$
- Si $\log_a x = \log_a y$, entonces, $x = y$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a^p = p$
- $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

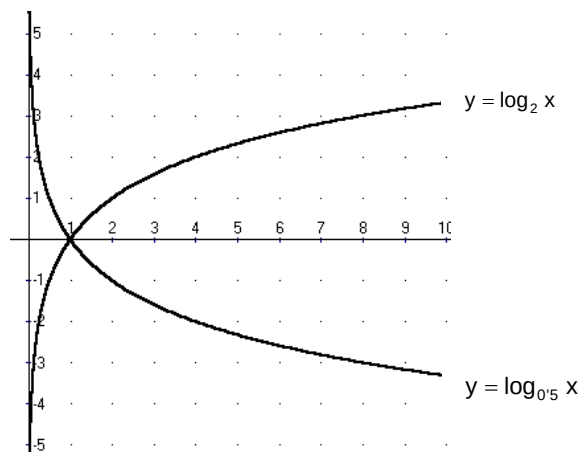


- $\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a x^p = p \cdot \log_a x$
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$
- La función $f(x) = \log_a x$, y la función $g(x) = a^x$ son inversas, por tanto son simétricas respecto de la recta $y = x$



Si $a > 1$ la función es creciente	Si $0 < a < 1$ la función es decreciente
$y = \log_{1.5} x$	$y = \log_{0.5} x$

- Las funciones $f(x) = \log_a x$, $g(x) = \log_{1/a} x$ son simétricas respecto del eje de abscisas OX



Uso de la calculadora.

La calculadora tiene dos funciones logarítmicas:

$\log$ que son los logaritmos decimales o de base 10. Escribiremos $\log x = \log_{10} x$

$\ln$ que son los logaritmos neperianos o de base e. Escribiremos $\ln x = \log_e x$

Calcula: $\log 25$, $\ln 3$

Con calculadoras antiguas:

Para calcular $\log 25$

25	log	1.397940009
----	-----	-------------

Para calcular $\ln 3$

3	ln	1.098612289
---	----	-------------

Con calculadoras modernas:

Para calcular $\log 25$

log	25	=	1.397940009
-----	----	---	-------------

Para calcular $\ln 3$

ln	3	=	1.098612289
----	---	---	-------------

Ejercicio 5:

Con la ayuda de la calculadora efectúa las siguientes operaciones:

$\log_2 3$, $\log_3 2$.

Las calculadoras sólo tienen logaritmos decimales y neperianos. Para poder calcular logaritmos de otras bases efectuaremos el cambio de base:

$$\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{0'4771}{0'3010} = 1'5850$$

$$\log_3 2 = \frac{\ln 2}{\ln 3} = \frac{0'6931}{1'0986} = 0'6309$$

Ejercicio 6:

Estudia y representa la función $y = \log_2 x$

Es una función logarítmica de base 2.

El dominio de la función logarítmica es $]0, +\infty]$

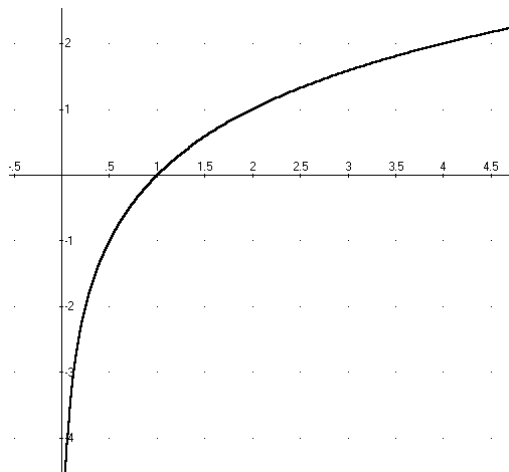
El recorrido de la función logarítmica es $\mathbb{R}$.

La función es continua en $]0, +\infty]$

Es una función creciente.

Con la ayuda de la calculadora construimos una tabla de valores:

x	0'25	0'5	1	1'5	2	2'5	3	3'5	4	4'5
y	-2	-1	0	0'58	1	1'32	1'58	1'81	2	2'17



Ejercicio 7:

Resuelve la ecuación exponencial $2^x = 5$

5 no se puede poner como potencia de base 2, entonces calcularemos logaritmos decimales en las dos partes de la igualdad:

$$\log 2^x = \log 5$$

Apliquemos la propiedad del logaritmo de una potencia:

$$x \cdot \log 2 = \log 5$$

Despejamos la incógnita x

$$x = \frac{\log 5}{\log 2}, \text{ con ayuda de la calculadora podemos aproximar el resultado: } x = \frac{\log 5}{\log 2} \approx 2'3219$$

Ejercicios propuestos:

10. Sin utilizar calculadora efectúa las siguientes operaciones:

a) $\log_2 4 =$

b) $\log_9 729 =$

c) $\log 1000 =$

d) $\log_3 1 =$

e) $\log_{25} 5 =$

f) $\log_{16} 2 =$

g) $\log_2 \left(\frac{1}{8} \right) =$

h) $\log_5 \left(\frac{1}{125} \right) =$

i) $\log_3 \left(\frac{1}{3} \right) =$

j) $\log 0'001 =$

k) $\log_{1/3} \left(\frac{1}{243} \right) =$

l) $\log_3 \sqrt{27} =$

m) $\log_4 \sqrt{2} =$

n) $\log_5 \sqrt[4]{125} =$

11. Con la ayuda de la calculadora efectúa las operaciones del ejercicio anterior:

12. Representa las funciones siguientes:

a) $f(x) = \log x$

b) $g(x) = \ln x$

c) $h(x) = \log_{1'5} x$

d) $m(x) = \log_4 x$

e) $n(x) = \log_{0'5} x$

f) $p(x) = \log_{0'2} x$

13. Dada la función $f(x) = \log_2 x$

Sin utilizar tablas de valores dibuja las funciones:

$g(x) = 3 + \log_2 x$

$h(x) = -1 + \log_2 x$

$m(x) = \log_2 (x + 2)$

$f(x) = \log_2 (x - 4)$

