

1. FUNCIONES EXPONENCIALES

1.1. Función exponencial

Hay dos tipos de funciones cuya **expresión analítica** o **fórmula** es una **potencia**:

- Si la variable independiente está en la base: $y = x^3$, se llama **función potencial**, y cuando además el exponente es un número natural es una función polinómica.
- Si la variable independiente está en el exponente: $y = 3^x$, se llama **función exponencial**.

Ejemplo:

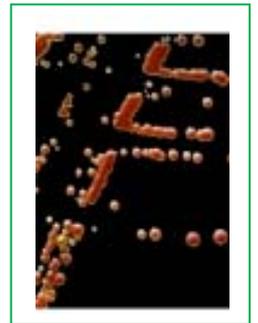
$$y = 10^x, y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, y = 2^{3x}, y = 5^{-x}.$$

Una función exponencial es aquella en la que la variable independiente está en el exponente.

En este curso estudiamos funciones exponenciales sencillas, del tipo $y = b^x$, donde la base b es un número positivo distinto de 1.

Actividades resueltas

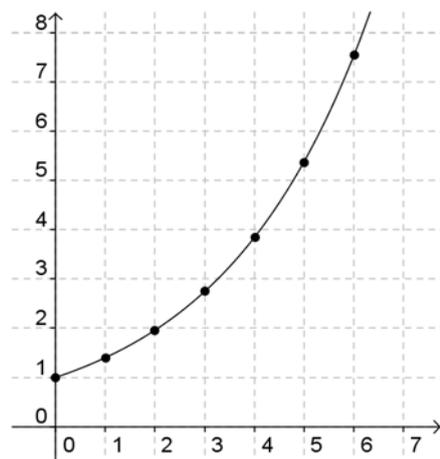
- ✚ Si la cantidad de bacterias de una determinada especie se multiplica por 1.4 cada hora, podemos escribir la siguiente fórmula para calcular el número “ y ” de bacterias que habrá al cabo de “ x ” horas (comenzando por una sola bacteria): $y = 1.4^x$.



Número de bacterias en cada hora
(Tabla de valores de la función):

Horas transcurridas (x)	Núm. bacterias (y)
0	1
1	1.4
2	1.96
3	2.74
4	3.84
5	5.38
6	7.53
...	...

Gráfica de la función



Observa que en este ejemplo no se ha dado a la “ x ” valores negativos, ya que no tiene sentido un número de horas negativo. En las funciones exponenciales en general la “ x ” sí puede tener valores negativos. Sin embargo la base b solo puede tener valores positivos. Asimismo, observarás que la variable “ y ” también resulta siempre positiva. Más adelante recogemos estas propiedades al hablar de dominio y recorrido de la función exponencial.

Actividades propuestas

1. Prueba ahora a realizar en tu cuaderno una tabla de valores y la gráfica para un caso similar, suponiendo que el número de bacterias se multiplica cada hora por 3 en lugar de por 1,4.

Observarás que los valores de “ y ” aumentan mucho más deprisa y enseguida *se salen del papel*. Mientras que los valores de “ x ” aumentan de 1 en 1 los valores de y se van multiplicando por 3. Esto se llama **crecimiento exponencial**. Si en lugar de multiplicar se trata de dividir tenemos el caso de **decrecimiento exponencial**.

2. En tu cuaderno, representa conjuntamente las gráficas de $y = x^2$ (función potencial) e $y = 2^x$ (función exponencial), con valores de “ x ” entre 0 y 6. Observa la diferencia cuantitativa entre el crecimiento potencial y el crecimiento exponencial.

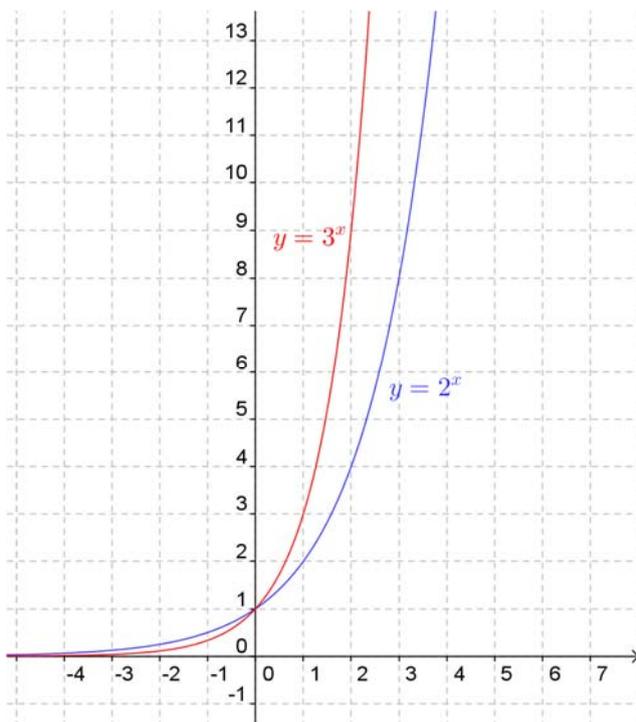
1.2. Distintas funciones exponenciales

Las gráficas de las funciones exponenciales $y = b^x$ se diferencian según el valor de la base “ b ”. Especialmente se diferencian si $0 < b < 1$ o $b > 1$.

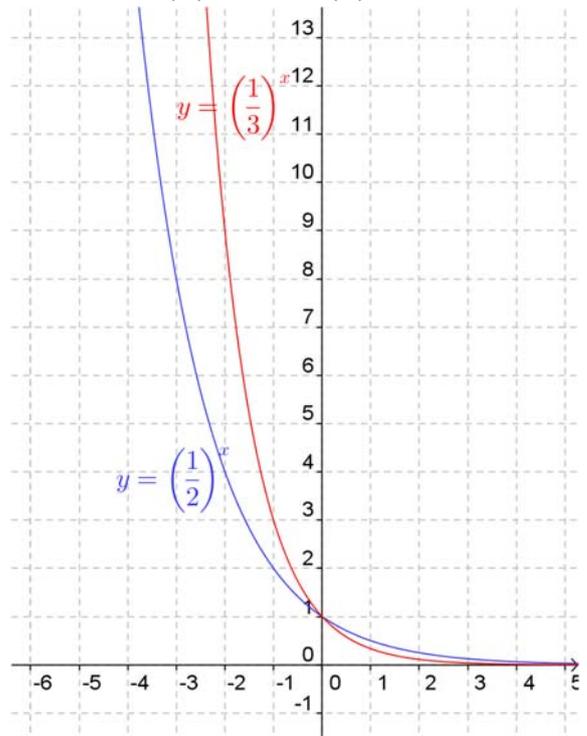
En el caso en el que $b = 1$ tenemos la función constante $y = 1$, cuya gráfica es una recta horizontal.

Veamos las gráficas de algunas funciones exponenciales, comparándolas con otras:

Funciones $y = 2^x$ e $y = 3^x$



Funciones $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



Observamos los siguientes aspectos comunes en las cuatro gráficas:

- Su **dominio** es toda la recta real. Además son continuas.
- Su **recorrido** es $(0, +\infty)$. Es decir, "y" nunca es cero ni negativo.
- Pasan todas por los puntos $(0, 1)$, $(1, b)$ y $(-1, 1/b)$.
- La gráfica de $y = a^x$ y la de $y = (1/a)^x$ son simétricas respecto del eje OY.

Y observamos también aspectos diferenciados en ambas ilustraciones:

Cuando la base es $b > 1$

Son funciones **crecientes**. Cuanto mayor es la base el crecimiento es más rápido.

Cuando $x \rightarrow -\infty$ la función tiende a 0. Por tanto presenta una **asíntota horizontal** en la parte izquierda del eje OX.

Aunque en algunos casos pueda aparentarlo, no presentan asíntota vertical, pues no se aproximan a ninguna recta.

Cuando la base es $0 < b < 1$

Son funciones **decrecientes**. Cuanto menor es la base el decrecimiento es más rápido.

Cuando $x \rightarrow +\infty$ la función tiende a 0. Por tanto presenta una **asíntota horizontal** en la parte derecha del eje OX.

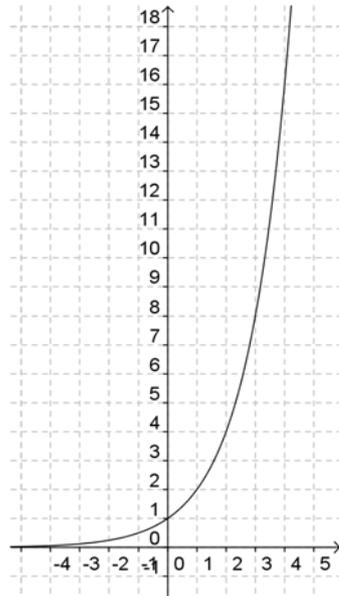
Aunque en algunos casos pueda aparentarlo, no presentan asíntota vertical, pues no se aproximan a ninguna recta.

Actividades resueltas

✚ Representa gráficamente las siguientes funciones exponenciales $y = 2^x$ e $y = 2^{-x}$.

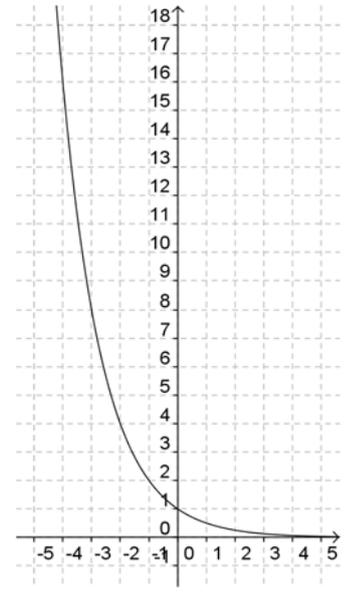
Función $y = 2^x$

x	y
...	...
-5	1/32
-4	1/16
-3	1/8
-2	1/4
-1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
...	...



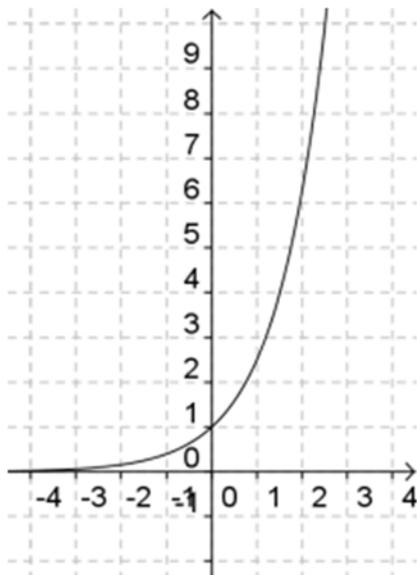
Función $y = 2^{-x}$

x	y
...	...
-5	32
-4	16
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	1/2
2	1/4
3	1/8
4	1/16
5	1/32
6	1/64
...	...

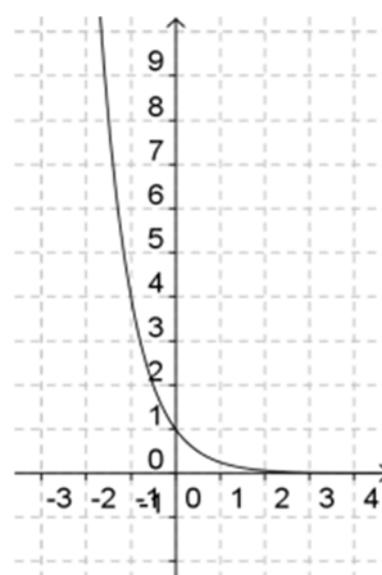


✚ Identifica las funciones correspondientes con las siguientes gráficas:

a)



b)



Solución:

Ambas son funciones exponenciales porque pasan por el punto $(0, 1)$ y tienen por un lado como asíntota horizontal el eje OX, mientras que por el otro lado tienden a $+\infty$.

La función (a) es $y = 2.5^x$ porque pasa por el punto $(1, 2.5)$.

La función (b) es $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ porque pasa por el punto $(-1, 4)$.

✚ Representa la función $y = 3^{-x}$

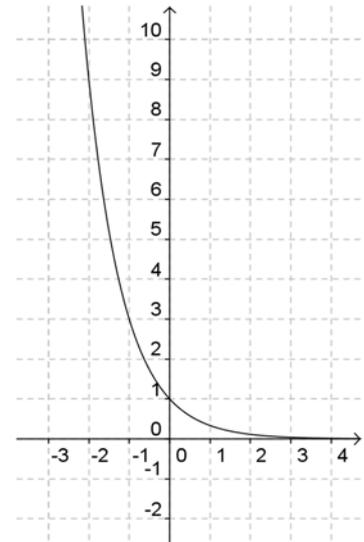
Solución:

Por tener exponente negativo es:

$$y = 3^{-x} \Rightarrow y = \left(\frac{1}{3}\right)^x.$$

Por tanto su gráfica es la del margen.

Observa que pasa por los puntos $(-1, 3)$, $(0, 1)$ y $(1, 1/3)$.



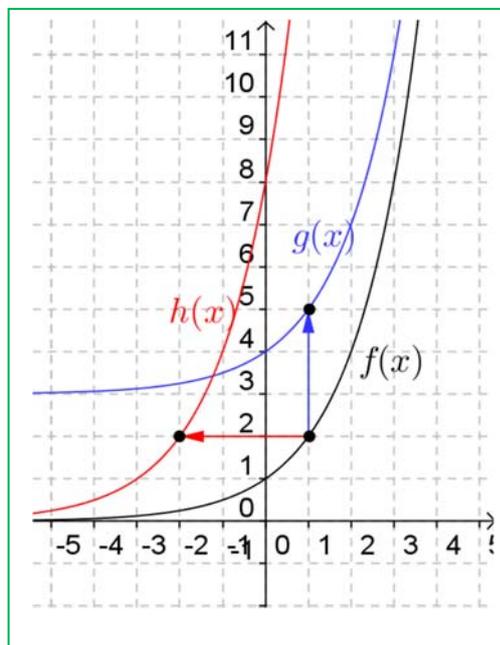
✚ Conociendo la gráfica de la función $f(x) = 2^x$, que se ha visto anteriormente, y sin calcular valores, dibuja las gráficas de las funciones $g(x) = 2^x + 3$ y $h(x) = 2^{x+3}$.

Solución:

La función $g(x)$ es la función $f(x)$ desplazada hacia arriba 3 unidades.

La función $h(x)$ es la función $f(x)$ desplazada hacia la izquierda 3 unidades.

Por tanto sus gráficas son estas, representadas en diferente color:



1.3. El número e . La función e^x

El número e tiene una gran importancia en Matemáticas, comparable incluso al número π aunque su comprensión no es tan elemental y tan popular. Para comprender su importancia hay que acceder a contenidos de cursos superiores. Es un número irracional.

El número e se define como el límite cuando n tiende a infinito de la siguiente sucesión:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Su valor aproximado es $e = 2.71828182846\dots$

Se trata de un número irracional (aunque al verlo puede parecer periódico).

Con la ayuda de la calculadora se puede comprobar cómo los valores de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ se acercan cada vez más al valor $e = 2.71828182846\dots$ a medida que aumenta el valor de n .

Este número aparece en las ecuaciones de crecimiento de poblaciones, desintegración de sustancias radiactivas, intereses bancarios, etc.

También se puede obtener directamente el valor de e con la calculadora (siempre como aproximación decimal, puesto que es un número irracional). Normalmente hay una tecla con la etiqueta e pero puedes usar también la tecla etiquetada e^x . Para ello tendrás que calcular el valor de e^1 .

La función $y = e^x$ comparte las características descritas más arriba para funciones exponenciales de base mayor que 1.

Actividades propuestas

- Utilizando la calculadora, en tu cuaderno haz una tabla de valores y representa en tu cuaderno las funciones $y = e^x$, $y = e^{-x}$.
- Una persona ha ingresado una cantidad de 5 000 euros a interés del 3 % en un banco, de modo que cada año su capital se multiplica por 1.03; a) Escribe en tu cuaderno una tabla de valores con el dinero que tendrá esta persona al cabo de 1, 2, 3, 4, 5 y 10 años; b) Indica la fórmula de la función que expresa el capital en función del número de años; c) Representa en tu cuaderno gráficamente dicha función. Piensa bien qué unidades deberás utilizar en los ejes.
- Un determinado antibiótico hace que la cantidad de ciertas bacterias se multiplique por $2/3$ cada hora. Si la cantidad a las 7 de la mañana es de 50 millones de bacterias, (a) haz una tabla calculando el número de bacterias que hay cada hora, desde las 2 de la mañana a las 12 de mediodía (observa que tienes que calcular también "hacia atrás"), y (b) representa gráficamente estos datos.
- Representa en tu cuaderno las siguientes funciones y explica la relación entre sus gráficas:
a) $y = 2^x$ b) $y = 2^{x+1}$ c) $y = 2^{x-1}$.
- Conociendo la gráfica de la función $f(x) = 2^x$, que se ha visto más arriba, y sin calcular tabla de valores, dibuja en tu cuaderno las gráficas de las funciones $g(x) = 2^x - 3$ y $h(x) = 2^{x-3}$.

