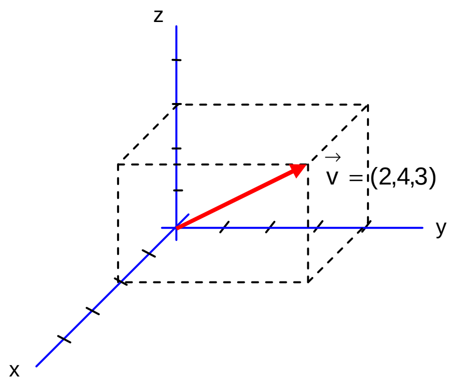
VECTORES EN EL ESPACIO



MATEMÁTICAS II   2º Bachillerato

Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas

I.E.S. "Fernando de Mena"
Socuéllamos (Ciudad Real)

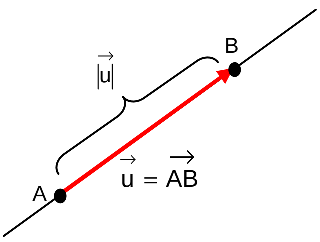
I. DEFINICIONES [1]

Magnitudes

- **Vectoriales:** Un **vector** es un segmento orientado que, para ser definido, precisa de los siguientes tres elementos:
  - **Módulo:** Indica la intensidad, y viene dado por la longitud de la flecha que representa al vector.
  - **Dirección:** Viene dada por la recta sobre la que está la flecha que representa al vector.
  - **Sentido:** Es el que apunta la flecha que representa al vector (Para una misma dirección, hay dos posibilidades).

  Ejemplos: La velocidad, la fuerza, la aceleración, etc.
- **Escalares:** Basta un número –un escalar- para ser definidas (Por ejemplo, la temperatura, masa, tiempo, densidad, la energía, etc.).

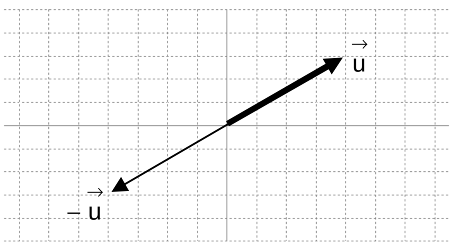
Notación:



Como vemos en el dibujo al margen, un vector se representa mediante una flecha. En concreto, se trata de un vector que va del punto A al punto B, por lo que se representa como $\overrightarrow{AB}$. En otros casos, se puede nombrar simplemente como $\vec{u}$. Nótese que el vector tiene una dirección, es decir, está construido sobre una recta. Por otra parte, su módulo, que, como hemos dicho arriba, es la longitud de la flecha, se representa como $|\vec{u}|$ o $|\overrightarrow{AB}|$, es decir, con el nombre del vector entre | |. A veces, se indica con dobles barras, esto es, $\|\overrightarrow{AB}\|$, y se suele denominar norma del vector. Nosotros utilizaremos indistintamente ambas notaciones. Finalmente, el sentido del vector es el que apunta su flecha. Por lo tanto, se define el vector nulo como $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

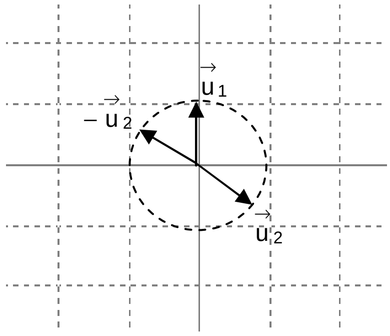
Vector nulo: Se designa como $\vec{0}$, y es aquel que tiene módulo cero. Se representa por un punto (por lo cual, no tiene mucho sentido considerar su dirección y sentido…).

Vector opuesto: Dado un vector $\vec{u}$, se define su opuesto, que se designa como $-\vec{u}$, como aquel que tiene el mismo módulo, la misma dirección, pero distinto sentido:

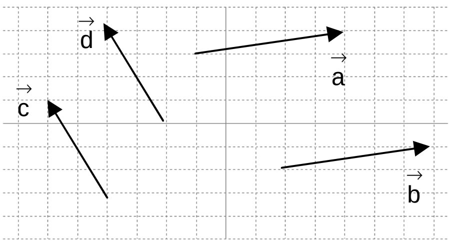


[1] Para reforzar todo lo tratado en este apartado, ver pág. 134 del libro de ed. Anaya.

Vector unitario: Es todo vector que tenga módulo 1. Por ejemplo, los siguientes vectores son unitarios:



Vector iguales o equipolentes: **«Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son equipolentes si tienen el mismo módulo, dirección y sentido».** Se indica como $\vec{u} \sim \vec{v}$, aunque, en general, también se suele poner simplemente $\vec{u} = \vec{v}$.



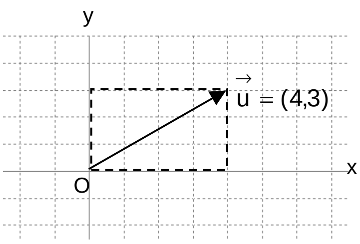
En la figura, $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son equipolentes, y lo mismo podemos decir de $\vec{c}$ y $\vec{d}$.

Puesto que, si trasladamos un vector de forma equipolente, es decir, sin variar su módulo, dirección y sentido, sigue siendo el mismo vector, se dice que los **vectores** son **libres** en el espacio. Por lo tanto, se define:

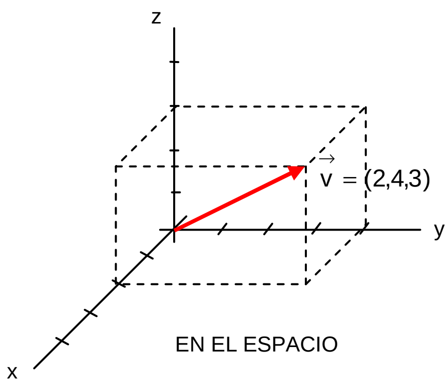
V^3 = Conjunto de todos los vectores libres del espacio.

Acabamos de hablar de vectores libres. Ahora bien, si los referimos a un punto, entonces serán vectores fijos. El punto que habitualmente se utiliza es el origen:

Coordenadas de un vector referido al origen [2]: Coinciden con las coordenadas del punto extremo del vector:



EN EL PLANO

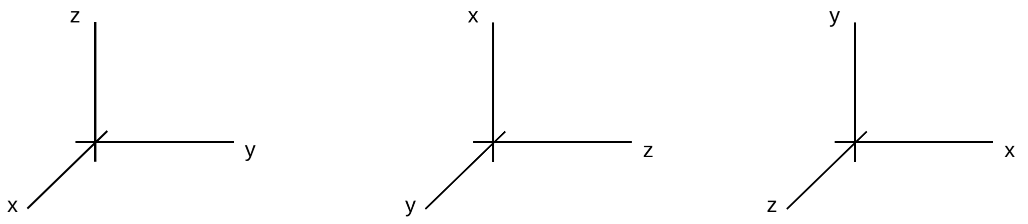


EN EL ESPACIO

---

2 Puede también verse en la pág. 154 del libro de ed. Anaya.

En el siguiente apartado vamos a ver más formalmente el porqué de esto. Solamente una última observación: la orientación del triedro x,y,z no es arbitraria; las 3 posibilidades válidas son las siguientes:



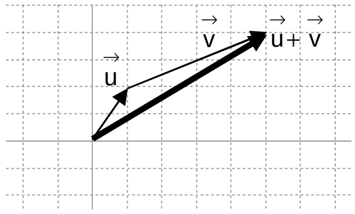
Pero la más frecuente es la primera. Veremos la explicación de esto en el apartado IV, producto vectorial.

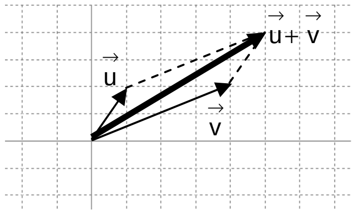
Ejercicios final tema: 1 y 2

II. OPERACIONES

II.I SUMA DE VECTORES [3]

Gráficamente: Hay dos formas posibles de sumar vectores; ambas, obviamente, conducen al mismo vector suma. Para mayor simplicidad, vamos a ver ambas en el plano, y para vectores referidos al origen:





REGLA DEL PARALELOGRAMO

Como vemos, en la 1ª forma (que se usa más en Matemáticas) se engancha el segundo vector al extremo del primero, y el vector suma de ambos será aquel que tiene su origen en el del primero y su extremo en el del último. En el caso de la regla del paralelogramo (muy utilizada en Física, para sumar fuerzas), los dos vectores se ponen con origen común, y se traza a continuación el paralelogramo que definen; el vector suma será entonces la diagonal de dicho paralelogramo que arranca del origen de ambos vectores. **Puede comprobarse analíticamente que ambas formas funcionan.**

En el espacio se procedería de manera análoga.

Analíticamente:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(u_x,u_y,u_z)\\ \vec{v}=(v_x,v_y,v_z)\end{array}\right\}\quad \vec{u}+\vec{v}=(u_x+v_x,u_y+v_y,u_z+v_z)$$

Propiedades: CONMUTATIVA: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

ASOCIATIVA: $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$

[3] Ver pág. 135 del libro de ed. Anaya.

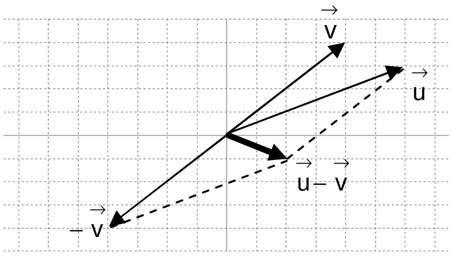
ELEMENTO NEUTRO: $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$

ELEMENTO OPUESTO: $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$

(Todas estas propiedades son de inmediata demostración, tanto analítica como gráficamente).

II.II RESTA DE VECTORES [4]

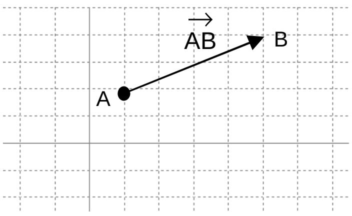
Gráficamente: Para restar dos vectores, sumamos al primero el opuesto del segundo, es decir, $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$. De las dos formas, vamos a utilizar, por ejemplo, la regla del paralelogramo:



Analíticamente, se restan las componentes.

De la resta de vectores pueden deducirse dos fórmulas importantes muy utilizadas:

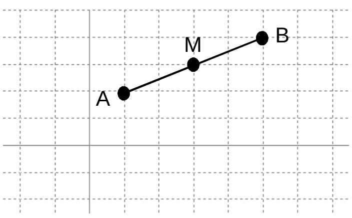
Coordenadas del vector que une dos puntos: Se obtienen restando las componentes del punto extremo menos el punto origen del vector:



$$\boxed{\overrightarrow{AB}=B-A} \qquad (1)$$

(Ver demostración en pág. 155 del libro de ed. Anaya).

Coordenadas del punto medio de un segmento: Dado un segmento de extremos A y B, las coordenadas de su punto medio serán la semisuma de dichos extremos.



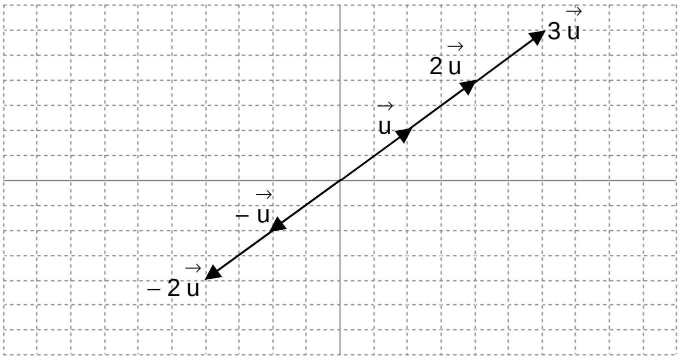
$$\boxed{M=\frac{A+B}{2}} \qquad (2)$$

(Ver demostración en pág. 155 del libro de ed. Anaya).

II.III PRODUCTO POR UN ESCALAR [5]

Gráficamente: Veámoslo con un ejemplo. Si queremos hacer $3\vec{u}$, lo que haremos es $\vec{u}+\vec{u}+\vec{u}$, es decir, aplicamos la suma de vectores. Si lo que queremos construir es $-2\vec{u}$, haremos $-2\vec{u}=(-\vec{u})+(-\vec{u})$:

[4] Ver pág. 135 del libro de ed. Anaya.
[5] Ver pág. 134 del libro de ed. Anaya.



En resumen: Se define el vector $k\,\vec{u}$ como aquel que tiene MÓDULO: $\|k\,\vec{u}\| = |k|\cdot\|\vec{u}\|$

DIRECCIÓN: la de $\vec{u}$

SENTIDO: $\begin{cases}\text{el de } \vec{u}\text{, si } k>0\\ \text{opuesto, si } k<0\end{cases}$

Todo esto puede comprobarse que concuerda analíticamente:

Analíticamente: $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z) \rightarrow k\,\vec{u} = (k\,u_x, k\,u_y, k\,u_z)$

Propiedades: ASOCIATIVA: $\lambda(\mu\,\vec{u}) = (\lambda\,\mu)\,\vec{u}$

DISTRIBUTIVA respecto a la suma de vectores: $\lambda(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\,\vec{u} + \lambda\,\vec{v}$

DISTRIBUTIVA respecto a la suma de escalares: $(\lambda+\mu)\,\vec{u} = \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{u}$

ELEMENTO NEUTRO: $1\cdot\vec{u} = \vec{u}$

(Todas estas propiedades son de inmediata demostración, tanto analítica como gráficamente).

II.IV COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES [6]

Se dice que el vector $\vec{x}$ es combinación lineal de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\ldots$ si se puede expresar como

$$\vec{x} = \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v} + \eta\,\vec{w} + \ldots \qquad \text{donde } \lambda, \mu, \eta \in \Re$$

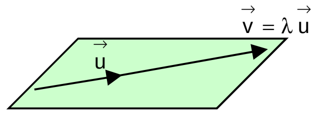
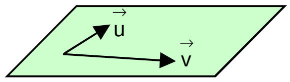
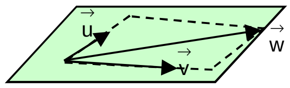
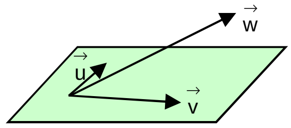
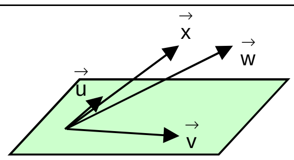
Observaciones:

1º) Alguno de los λ, μ, η … pueden ser 0

2º) Recordar: **«Un conjunto de vectores es linealmente dependiente si alguno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los restantes; en caso contrario, son linealmente independientes».**

Veamos, en la siguiente tabla resumen, todas las posibilidades de dependencia lineal en función del número de vectores y de su posición:

[6] Ver págs. 136 y 137 del libro de ed. Anaya.

Nº VECTORES	POSICIÓN	PLANO V^2	ESPACIO V^3	¿DEPENDENCIA LINEAL?
2	Alineados:			**I. d** ($\vec{u}$ y $\vec{v}$ proporcionales)
	No alineados:			**I .i.** ($\vec{u}$ y $\vec{v}$ son base de V^2)
3	Coplanarios:			**I. d.** ($\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son comb. lin.)
	No coplanarios:			**I . i.** ($\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son base de V^3)
≥ 4				**I. d.** ($\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ y $\vec{x}$ son comb. lin.)

3º) Definición: «$\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ forman una **base** de V^3 si cualquier $\vec{x}$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores de la base, es decir,

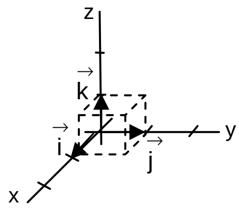
$$\exists\, \lambda, \mu, \eta \in \Re \;/\; \vec{x} = \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v} + \eta\,\vec{w} \quad »$$

«Se dice entonces que λ, μ y η son las **coordenadas** de $\vec{x}$ en la base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ »

4º) Como vimos en el 4º caso del cuadro anterior, **«En V^3 tres vectores cualesquiera no coplanarios**[7] **forman una base».**

En particular, consideremos los vectores

$$\vec{i} = (1,0,0)$$
$$\vec{j} = (0,1,0)$$
$$\vec{k} = (0,0,1)$$



que son perpendiculares entre sí, y unitarios. Pues bien, $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ es una base ortonormal de V^3.

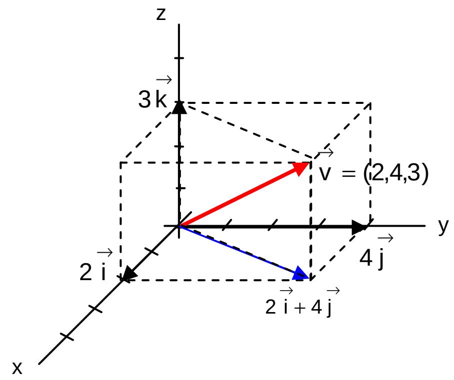
Definición: «Base ortonormal de V^3 son tres vectores perpendiculares entre sí y unitarios».

[7] Y no proporcionales, naturalmente…

Nótese, por lo tanto, que $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ no es la única base ortonormal de V^3, pero sí la más simple, y por eso se denomina base canónica de V^3.

Definición: **«Una base ortogonal de V^3 está formada por tres vectores perpendiculares entre sí».**

Veamos, con un ejemplo, cuál es la ventaja de utilizar la base canónica en V^3:



En la figura, podemos expresar $\vec{v}$ como combinación lineal de $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$:

$$\vec{v}=(2\vec{i}+4\vec{j})+3\vec{k}=[(2,0,0)+(0,4,0)]+(0,0,3)=(2,4,3)$$

Nótese que 2, 4 y 3 son las coordenadas de $\vec{v}$ en la base $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$. En otra base tendría distintas coordenadas.

Ejercicios final tema: 3 a 9

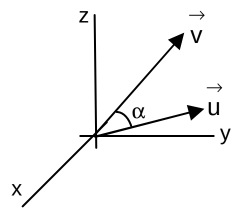
Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 149 y ss.: 1 a 6, 21, 28, 29, 32 y 37 (vectores); pág. 154: 1; pág. 176: 1 (ptos. en el espacio); pág. 156: 2 y 3; pág. 176: 4, 5 y 6 (pto. medio)

III. PRODUCTO ESCALAR [8]

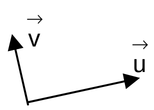
Vamos a definir el producto escalar de dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, que se designa como $\vec{u}\cdot\vec{v}$, y cuyo resultado es un escalar:

Definición: **«El producto escalar de dos vectores es igual al producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman»**:

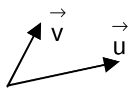
$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos\alpha} \qquad (3)$$



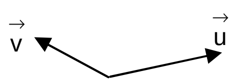
Consecuencias: **1)** $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$ (**Condición de perpendicularidad**)



2) $\vec{u}\cdot\vec{v}>0 \Leftrightarrow \alpha<90º$



3) $\vec{u}\cdot\vec{v}<0 \Leftrightarrow 90º<\alpha\le 180º$



[8] Ver págs. 138 y 139 del libro de ed. Anaya.

Expresión analítica [9]**:** $\boxed{\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(u_x,u_y,u_z)\\ \vec{v}=(v_x,v_y,v_z)\end{array}\right\}\quad \vec{u}\cdot\vec{v}=u_xv_x+u_yv_y+u_zv_z}$ (4)

Propiedades: CONMUTATIVA: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

ASOCIATIVA MIXTA: $\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})=(\lambda\,\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(\lambda\,\vec{v})$

DISTRIBUTIVA: $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

(Todas estas propiedades son de inmediata demostración[10], tanto analítica como gráficamente).

Una observación sobre notación: Es muy importante, a la hora de simbolizar el producto escalar de dos vectores, no olvidar el $\cdot$ entre ambos: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$. Ahora bien, si de lo que se trata es de multiplicar un escalar por un vector, para distinguir es recomendable no indicar el producto con un $\cdot$: $\lambda\,\vec{u}$

Aplicaciones del producto escalar [11]**:**

1º) Módulo de un vector: Consideremos el producto escalar de un vector $\vec{u}$ consigo mismo:

$$\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{u}\|\cdot\cos 0º=\|\vec{u}\|^2$$

Despejamos $\|\vec{u}\|$:

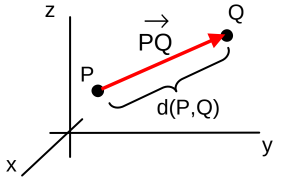
$$\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$$

Si las componentes del vector son $\vec{u}=(x,y,z)$, nos queda:

$$\boxed{\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad (5)$$

Consecuencias:

a) Distancia entre dos puntos[12]**:** Supongamos dos puntos en el espacio, $P(x_1,y_1,z_1)$ y $Q(x_2,y_2,z_2)$, cuya distancia de separación, d(P,Q), queremos conocer. Es obvio que dicha distancia (ver dibujo) coincidirá con el $\|\overrightarrow{PQ}\|$:



$$\overrightarrow{PQ}=Q-P=(x_2,y_2,z_2)-(x_1,y_1,z_1)=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

$$\Rightarrow\ \|\overrightarrow{PQ}\|=\boxed{d(P,Q)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}} \qquad (6)$$

9 Ver en la pág. 139 del libro de ed. Anaya la demostración de que esta fórmula y la definición gráfica coinciden.

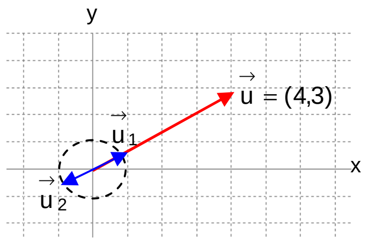
10 Nos remitimos, para ello, a la pág. 139 del libro de ed. Anaya.

11 Ver pág. 138 del libro de ed. Anaya.

12 Pág. 188 del libro de ed. Anaya.

b) ¿Cómo obtener un vector con la misma dirección que uno dado, pero unitario? [13]:

Supongamos que nos dan un vector $\vec{u}$, y queremos obtener un vector con su misma dirección, pero unitario. La respuesta, viendo el dibujo (lo hemos indicado en el plano, para una mejor visualización; pero en el espacio sería análogo), es obvia: habrá que dividirlo por su módulo; es decir, se tratará del vector $\vec{u}/\|\vec{u}\|$

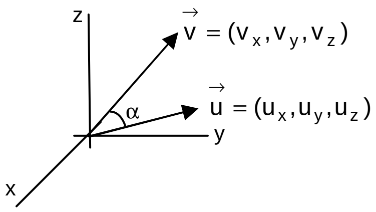


La demostración es también evidente:

- Si $\vec{u}$ lo dividimos por un número, como es $\|\vec{u}\|$, obtendremos un vector <u>con la misma dirección</u> (y sentido).
- $\vec{u}/\|\vec{u}\|$ es <u>unitario</u>, ya que su módulo es: $\left\| \vec{u}/\|\vec{u}\| \right\| = \dfrac{1}{\|\vec{u}\|}\cdot\|\vec{u}\| = 1$ (C.Q.D.)

Observación: En realidad, habría otro vector con la misma dirección que $\vec{u}$ y unitario, pero de sentido contrario; se trataría del vector opuesto a $\vec{u}/\|\vec{u}\|$ (El $\vec{u}_2$ del dibujo).

2º) Ángulo entre dos vectores: Se obtiene fácilmente, sin más que despejar en $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos\alpha$



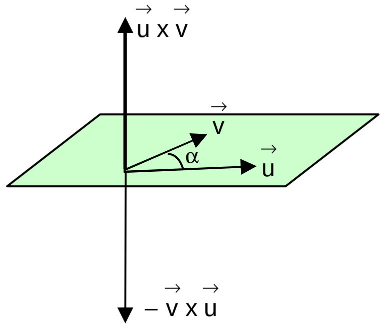
$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}} = \frac{u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z}{\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}\,\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}} \qquad (7)$$

Ejercicios final tema: 10 a 21
Ejercicios PAEG: 4B jun 2008
Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 139: 1; pág. 149 y ss.: 7, 8, 10, 11, 12, 24 a 27, 30, 34, 35, 36, 38 y 39; pág. 204: 5 y 7

[13] Pág. 134 del libro de ed. Anaya.

IV. PRODUCTO VECTORIAL [14]

Vamos a definir el producto vectorial de dos vectores, $\vec{u} \times \vec{v}$, cuyo resultado es un vector:



Definición: El producto vectorial de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es igual a otro vector, denominado $\vec{u} \times \vec{v}$, que tiene:

MÓDULO: $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \operatorname{sen}\alpha$

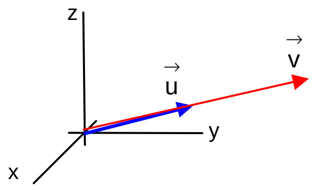
DIRECCIÓN: $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}$ y $\vec{v}$

SENTIDO: el del avance de un sacacorchos al llevar $\vec{u}$ a $\vec{v}$

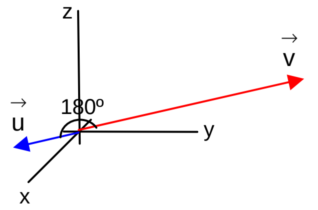
Observación: El producto escalar $\vec{u} \times \vec{v}$ valdrá cero en alguno de los siguientes casos:

1) Cuando alguno de los dos vectores sea el vector $\vec{0}$ (caso trivial), ya que, en tal caso, su módulo sería 0.

2) Si ambos vectores tienen la misma dirección, es decir, son paralelos, o lo que es lo mismo, sus componentes son proporcionales, pues en ese caso, $\operatorname{sen}\alpha = 0$. Hay dos posibilidades:



MISMO SENTIDO



SENTIDO OPUESTO

Expresión analítica [15]:

$$\boxed{\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}} \qquad (8)$$

Propiedades: ANTICONMUTATIVA: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

No verifica la asociativa: $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$

ASOCIATIVA MIXTA: $\lambda(\vec{u} \times \vec{v}) = \lambda\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times \lambda\vec{v}$

DISTRIBUTIVA respecto a la suma: $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

(Todas estas propiedades son de inmediata demostración[16], tanto analítica –es decir, mediante las propiedades de los determinantes- como gráficamente).

---

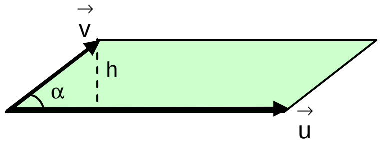
[14] Ver pág. 142 del libro de ed. Anaya.

[15] Ver en la pág. 143 del libro de ed. Anaya la complicada demostración de esta fórmula.

[16] Nos remitimos, para ello, al libro de ed. Anaya.

Interpretación geométrica: **«El módulo del producto vectorial de dos vectores es igual al área del paralelogramo que determinan».**

Dem:



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{\|\vec{v}\|} \Rightarrow h = \|\vec{v}\|\cdot\operatorname{sen}\alpha$$

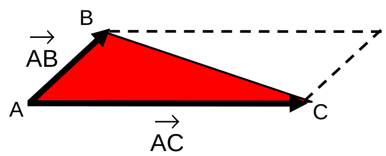
Multiplicamos ambos miembros por $\|\vec{u}\|$:

$$\underbrace{h\cdot\|\vec{u}\|} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\operatorname{sen}\alpha = \|\vec{u}\times\vec{v}\| \qquad \text{(C.Q.D.)}$$

Base x Altura = Área del paralelogramo

Consecuencia: Área del triángulo [17]

«El área de un triángulo es igual al semimódulo del producto vectorial de dos vectores cualesquiera que lo definan»:



$$\boxed{S_{ABC} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|} \qquad (9)$$

Ejercicios final tema: 22 a 33
Ejercicios PAEG: 4B jun 2005, 4A jun 2008
Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 141: 1, 2, 3; pág. 144: 1, 2, 3; pág. 149 y ss.: 13 a 16, 22, 23 y 33 (prod. vectorial); pág. 195: 1; pág. 205: 23 (área triángulo)

V. PRODUCTO MIXTO [18]

Vamos a definir un último producto vectorial, en este caso de tres vectores, $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, llamado producto mixto, cuyo resultado es un escalar:

Definición: Se define el producto mixto de tres vectores, $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, que se designa como $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$, al número que resulta de la siguiente operación:

$$\boxed{[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})} \qquad (10)$$

[17] Ver pág. 194 del libro de ed. Anaya.
[18] Ver pág. 145 del libro de ed. Anaya.

Expresión analítica: En la práctica, para su cálculo, lo más cómodo no es utilizar la definición anterior, sino el siguiente determinante:

$$\boxed{[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}} \qquad (11)$$

Dem:

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\vec{u}\cdot\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}=\vec{u}\cdot\left(\begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix}\vec{k}\right)=$$

$$=(u_x,u_y,u_z)\cdot\left(\begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix},-\begin{vmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{vmatrix},\begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix}\right)=u_x\begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix}-u_y\begin{vmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{vmatrix}+u_z\begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

(C.Q.D.)

Observaciones: El producto mixto $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ valdrá cero en alguno de los siguientes casos:

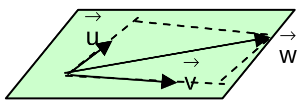
1) Cuando al menos uno de los vectores sea el vector $\vec{0}$ (caso trivial), ya que, en tal caso, habría al menos una fila de 0 en el determinante.

2) Si al menos dos vectores son iguales o proporcionales –es decir, tienen la misma dirección-, pues entonces tendríamos dos filas del determinante iguales o proporcionales.

3) Si los tres vectores son combinación lineal, es decir, linealmente dependientes –ya que. en ese caso, sabemos que el determinante lógicamente valdría cero-. Ahora bien, como vimos en la tabla resumen de la pág. 6, ello significa que los tres vectores son coplanarios. Por consiguiente:

Condición de coplanariedad (dependencia lineal):

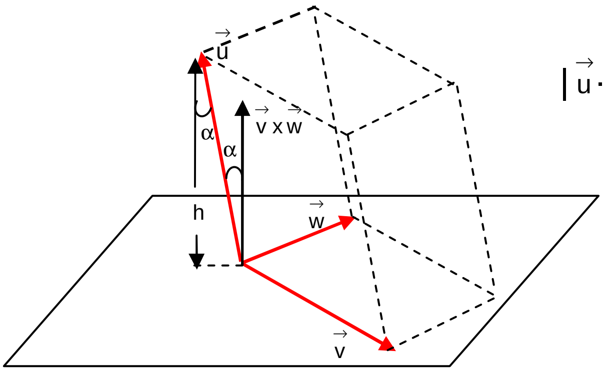
$$\boxed{\vec{u},\vec{v}\text{ y }\vec{w}\text{ coplanarios (lin. dep.)}\Leftrightarrow[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}=0} \qquad (12)$$



Es decir: «La condición necesaria y suficiente para que tres vectores sean coplanarios es que su producto mixto sea cero» (Sería el 3er caso de la tabla de la pág. 6).

Interpretación geométrica: **«El valor absoluto del producto mixto de tres vectores es igual al volumen del paralelepípedo que determinan».**

Dem:



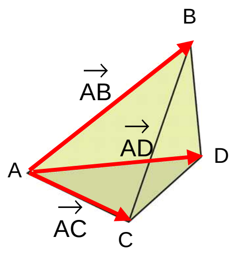
$$\left|\vec u\cdot(\vec v\times\vec w)\right| = \|\vec u\|\cdot\underbrace{\|\vec v\times\vec w\|}_{\text{Área base}}\cdot\cos\alpha = \text{Área base}\cdot h = \text{Vol}_{\text{paralelepípedo}}$$

$$\cos\alpha = \frac{h}{\|\vec u\|}$$

(C.Q.D.)

Aplicación: Volumen del tetraedro [19]

«El volumen de un tetraedro es igual a la sexta parte del valor absoluto del producto mixto de tres vectores cualesquiera que lo definan»:



$$\boxed{V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left[\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}\right]\right|} \qquad (13)$$

En el libro de ed. Anaya (pág. 195) puede verse gráficamente por qué el volumen del tetraedro es la 1/6 parte del volumen del paralelepípedo que lo contiene.

Ejercicios final tema: 34 y ss.

Ejercicios PAEG: 4B jun 2011

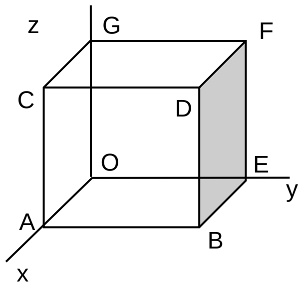
Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 145: 1, 2; pág. 149 y ss.: 17 a 20, 31; pág. 195: 2; pág. 205 y ss.: 24 a 26 y 55 (volumen tetraedro)

[19] Ver pág. 195 del libro de ed. Anaya.

39 EJERCICIOS de VECTORES	2º BACH.

VECTORES. OPERACIONES:

1. Comprobar si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son equipolentes, siendo A(2,1,3), B(5,4,1), C(2,1,5) y D(3,2,−1). En caso negativo, hallar las coordenadas del punto D' para que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD'}$ sean equipolentes.
(Soluc: no son equipolentes; D'(5,4,3))



2. Considerar el cubo de arista unidad de la figura. Indicar las coordenadas de dos vectores equipolentes a $\overrightarrow{AB}$ y otro equipolente a $\overrightarrow{AD}$. Hallar $|\overrightarrow{AE}|$ y $|\overrightarrow{AF}|$

3. *(**S**)* Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son tales que $|\vec{a}|=10$, $|\vec{b}|=10\sqrt{3}$ y $|\vec{a}+\vec{b}|=20$. Hallar el ángulo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. *(Soluc: 90^0)*

4. Dados $\vec{u}=(1,4,3)$ y $\vec{v}=(2,3,2)$, dibujarlos sobre los mismos ejes, y hallar, gráfica y analíticamente: $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$, $2\vec{u}$, $3\vec{v}$ y $2\vec{u}+3\vec{v}$

5. Dados $\vec{u}=(5,2,15), \vec{v}=(-1,2,1), \vec{w}=(2,-1,3)$, se pide:

a) Expresar $\vec{u}$ como combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$ *(Soluc: $\vec{u}=3\vec{v}+4\vec{w}$)*

b) Expresar $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ *(Soluc: $\vec{w}=\frac{1}{4}\vec{u}-\frac{3}{4}\vec{v}$)*

c) ¿Son linealmente dependientes o independientes $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$?

d) ¿Cuál es el rango de $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$?

e) Volver a hacer el apartado **a** por matrices (Gauss) y el **c** por determinantes.

6. **a)** Hallar el valor de k para que $\vec{u}=(1,2,-1), \vec{v}=(0,1,2), \vec{w}=(-1,k,3)$ sean linealmente dependientes.
(Soluc: k=-1)

b) Obtener, en ese caso, una relación de dependencia entre $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ *(Soluc: $\vec{u}=\vec{v}-\vec{w}$)*

7. Considerar los vectores $\vec{a}=(3,1,0)$, $\vec{b}=(1,4,0)$, $\vec{c}=(0,5,3)$

a) Razonar que forman una base de V^3

b) Hallar las coordenadas de $\vec{x}=(7,0,3)$ en la base anterior. *(Soluc: $\vec{x}=3\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$)*

c) Intentar dibujar la situación anterior.

8. Las coordenadas de dos vértices consecutivos de un paralelogramo son A(1,0,0) y B(0,1,0). Las coordenadas del centro M son M(0,0,1). Hallar las coordenadas de los vértices C y D. Dibujar la situación. *(Soluc: C(0,−1,2) y D(−1,0,2))*

9. *(**S**)* Dados los puntos A(2,3,9) y B(1,−2,6), hallar tres puntos P, Q y R que dividen al segmento AB en cuatro partes iguales. *(Soluc: P(7/4,7/4,33/4), Q(3/2,1/2,15/2), R(5/4,−3/4,27/4))*

PRODUCTO ESCALAR:

10. Dados A(1,2,3) y B(2,1,4), se pide:

a) Dibujar $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$

b) Hallar d(A,B) *(Soluc: √3 u)*

c) Hallar el ángulo entre $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ *(Soluc: ≅21º 4' 14")*

d) Hallar m tal que (0,3,m) sea ⊥ a $\overrightarrow{OB}$ *(Soluc: m=−3/4)*

11. Sean $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ los vectores de la base ortonormal canónica de V^3. Hallar:

a) $\vec{i}\cdot\vec{i}$ **b)** $\vec{i}\cdot\vec{j}$ **c)** $\vec{i}\cdot\vec{k}$ **d)** $\vec{j}\cdot\vec{j}$ **e)** $\vec{j}\cdot\vec{k}$ **f)** $\vec{k}\cdot\vec{k}$ *(Soluc: 1; 0; 0; 1; 0; 1)*

12. ***(S)*** Calcular los valores de **x** e **y** para que el vector (x,y,1) sea ortogonal a los vectores (3,2,0) y (2,1,−1)

(Soluc: x=2, y=−3)

13. Considérese un triángulo equilátero ABC de lado 6 u. Hallar $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}$

(Soluc: 18, −18, 18)

14. Desarrollar las siguientes expresiones: **a)** $(\vec{u}-\vec{v})^2$ **b)** $(2\vec{u}+3\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})$ **c)** $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$

15. Inventar tres vectores cualesquiera $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$, y comprobar que se verifica la propiedad distributiva:

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$$

16. Demostrar que el vector $\vec{a}=(\vec{b}\cdot\vec{c})\,\vec{d}-(\vec{b}\cdot\vec{d})\,\vec{c}$ es ortogonal al vector $\vec{b}$

17. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores tales que $(\vec{u}+\vec{v})^2=25$ y $(\vec{u}-\vec{v})^2=9$. Calcular el producto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$ *(Soluc: 4)*

18. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores tales que $|\vec{u}|=9$ y $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=17$. Calcular el módulo del vector $\vec{v}$

(Soluc: 8)

19. Obtener tres vectores cualesquiera ⊥ a $\vec{u}=(3,-1,5)$ ¿Cuál es su expresión general?

(Soluc: (a,b,c) tal que 3a−b+5c=0)

20. Dados $\vec{u}=(3,-1,5)$ y $\vec{v}=(3,0,3)$, se pide:

a) Obtener un vector cualquiera ⊥ a ambos. *(Soluc: p. ej. (-1,2,1))*

b) Obtener un vector cualquiera ⊥ a ambos y unitario. *(Soluc: (-√6/6, √6/3, √6/6); también vale el opuesto)*

c) Obtener un vector cualquiera ⊥ a ambos y de módulo 3 *(Soluc: (-√6/2, √6, √6/2); también vale el opuesto)*

21. Encontrar los vectores unitarios de IR^3 que son perpendiculares a $\vec{v}=(1,0,1)$ y forman un ángulo de 60º con $\vec{w}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$ *(Soluc: (1/2, √2/2,-1/2) y (-1/2, √2/2,1/2))*

PRODUCTO VECTORIAL:

22. Dados los puntos del ejercicio 10, hallar $\vec{OA}\times\vec{OB}$. Obtener también el ángulo entre $\vec{OA}$ y $\vec{OB}$ por producto vectorial, y comprobar que se obtiene el mismo resultado que por producto escalar.

23. Dados los vectores $\vec{u}=(2,-1,1)$ y $\vec{v}=(1,-2,-1)$, se pide:

a) Ángulo que forman.

b) Un vector perpendicular a ambos.

c) Hallar el valor de **m** para que el vector $\vec{w}=(2,m,-4)$ sea $\perp$ a $\vec{v}$

24. Inventar tres vectores cualesquiera $\vec{u},\vec{v}$ y $\vec{w}$, y comprobar que el producto vectorial: **a)** Verifica la propiedad anticonmutativa. **b)** No verifica la asociativa. **c)** Sí verifica la asociativa mixta, y la distributiva respecto a la suma.

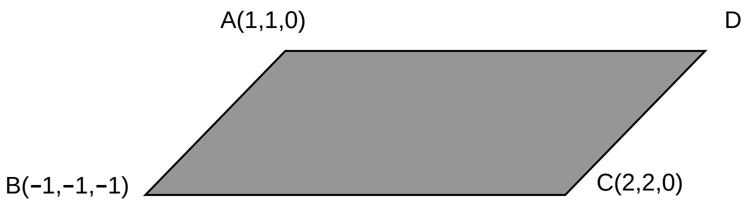
25. Dibujar el triángulo de vértices A(1,3,5), B(2,7,8) y C(5,1,-11) y calcular su área. *(Soluc: $\sqrt{1118}\ u^2$)*

26. Comprobar analíticamente que $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$, $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$. ¿Qué consecuencia tiene este hecho? Obtener también $\left(\vec{i}\times\vec{j}\right)\times\vec{k}$, $\vec{i}\times\left(\vec{j}\times\vec{k}\right)$, $\left(\vec{i}\times\vec{i}\right)\times\vec{j}$ e $\left(\vec{i}\times\vec{j}\right)\times\left(\vec{k}\times\vec{i}\right)$

27. Hacer de nuevo el ejercicio 20 por producto vectorial.

28. Hallar los dos vectores unitarios ortogonales a (2,-2,3) y (3,-3,2). *(Soluc: ($\sqrt{2}/2$, $\sqrt{2}/2$,0) y (-$\sqrt{2}/2$,-$\sqrt{2}/2$,0))*

29. *(**S**)* Considérese la figura siguiente:



Se pide: **a)** Coordenadas de D para que ABCD sea un paralelogramo. *(Soluc: D(4,4,1))*

b) Área de este paralelogramo. *(Soluc: $S_{ABCD}=\sqrt{2}\ u^2$)*

30. *(**S**)* Explicar cómo puede hallarse el área de un triángulo a partir de las coordenadas de sus tres vértices (en el espacio). Aplicarlo a A(1,0,1), B(-1,0,0), C(0,2,3). *(Soluc: $3\sqrt{5}/2\ u^2$)*

31. Dados $\vec{u}=(-1,2,1)$ y $\vec{v}=(1,1,0)$

a) Hallar **a** y **b** para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean $\perp$ a $\vec{w}=(a,2,b)$ *(Soluc: a=-2, b=-6)*

b) Hallar el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$ *(Soluc: ≅73º 13' 17'')*

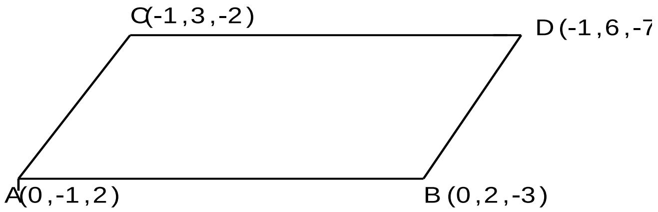
c) Hallar un vector perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{x}=(-1,1,0)$ y unitario. *(Sol: (-$\sqrt{3}/3$,-$\sqrt{3}/3$, $\sqrt{3}/3$); también vale el opuesto)*

32. Considerar el triángulo de vértices A(1,0,2), B(2,2,2) y C(3,-1,2)

a) Hallar su área. *(Soluc: $5/2\ u^2$)*

b) Hallar el ángulo correspondiente al vértice A *(Soluc: 90º)*

33. **a)** Demostrar (por equipolencia de vectores) que los siguientes puntos forman un paralelogramo en el espacio:



b) Hallar el área del triángulo ABC *(Soluc: ($\sqrt{98}/2\ u^2$)*

PRODUCTO MIXTO:

34. Dibujar el tetraedro de vértices A(2,1,0), B(0,1,0), C(3,3,7) y D(0,0,0) y hallar su volumen. *(Soluc: 7/3 u^3)*

35. Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son A(2,1,4), B(1,0,2), C(4,3,2) y D(1,5,6) *(Soluc: 5 u^3)*

36. Dados los puntos A(1,–2,0), B(–2,4,4) y C(3,–1,–1), se pide:

a) Hallar un vector $\perp$ a $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ *(Soluc: (2,–1,3))*

b) Hallar el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ *(Soluc: ≅102º 4' 7'')*

c) Hallar el área del triángulo determinado por los tres puntos anteriores. *(Soluc: $5\sqrt{14}/2\,u^2$)*

d) Hallar el volumen del tetraedro de vértices los tres puntos anteriores y el origen. *(Soluc: 10/3 u^3)*

37. Dados $\vec{u}=(a,2,3)$, $\vec{v}=(3,2,a)$ y $\vec{w}=(a,-2,1)$, se pide:

a) Hallar **a** para que $\vec{w}$ sea $\perp$ a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ *(Soluc: a=1)*

b) Hallar **a** para que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean coplanarios. *(Soluc: a=–2, a=3)*

38. Hallar $[\vec{i},\vec{j},\vec{k}]$ e interpretar gráficamente el resultado obtenido. *(Soluc: 1)*

39. **TEORÍA:** **a)** Demostrar que si $\vec{u},\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes, también lo son los vectores $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{w}$ y $\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}$

b) Justificar que cualquier conjunto de vectores que contenga el vector nulo es L.D.

c) ¿Puede haber dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $\vec{u}\cdot\vec{v}=3$, $|\vec{u}|=1$, $|\vec{v}|=2$?

d) Justificar por qué el producto mixto de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a}+\vec{b}$ es siempre nulo.

e) Si $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{w}$, ¿podemos concluir que $\vec{v}=\vec{w}$? ¿Y si es $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{u}\times\vec{w}$?

f) Si $|\vec{u}\cdot\vec{v}|=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{w}\|$, qué podemos concluir del ángulo que forman?

g) Sean $\vec{a},\vec{b}$ y $\vec{c}$ tres vectores linealmente independientes. Indicar razonadamente cuáles de los siguientes productos mixtos valen cero:

$$\left[\vec{a}+\vec{c},\vec{a}-\vec{c},\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right] \qquad \left[\vec{a}+\vec{c},\vec{b},\vec{a}+\vec{b}\right] \qquad \left[\vec{a}-\vec{c},\vec{b}-\vec{c},\vec{c}-\vec{a}\right]$$