EJERCICIOS DE REPASO

FUNCIONES

LÍMITES Y ASÍNTOTAS

1. Calcula los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \to 0^-} \frac{\mathrm{sen}(2x)}{\sqrt{1-\cos(2x)}}$

(b) $\lim_{x \to 0} \frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{1-\cos(x)}$

2. Calcula los siguientes límites

a) $\lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}}$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{sen}(x)}{e^{3x} - 1}$

3. Calcula los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{tg}(x) - \mathrm{sen}(x)}{x^3}$

(b) $\lim_{x \to 0^+} \frac{\mathrm{sen}(2x)}{\sqrt{1-\cos(3x)}}$

4. Calcula los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \to 0} \cos(2x)^{\frac{1}{x^2}}$

(b) $\lim_{x \to 0^+} (x)^{\frac{1}{x^2}}$

5. Calcula el siguiente límite:

$\lim_{x \to \infty} (x)^{\frac{1}{x^2}}$

6. Considera la función f: **R**$\to$ **R** definida por

f(x) = $\frac{1}{1+e^{1/x}}$ si $x \neq 0$

Calcula los límites laterales en x = 0.

7. Demuestra:

(a) Que $f(x) = \ln(x^2)$ y $g(x) = x^2-1$ son infinitésimos equivalentes en $x_0 = 1$

(b) $\lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{(x+h)^2 + k} - (x+h)\right] = 0$

8. Demuestra:

(a) Que $f(x) = \ln(1+x)$ y $g(x) = x^2+x$ son infinitésimos equivalentes en $x_0 = 0$

(b) $\lim_{x \to -\infty} \left[\sqrt{(x+h)^2 + k} + (x+h)\right] = 0$

9. Localiza las asíntotas de la función

f(x) = $\dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$

y sitúa la gráfica de la función respecto de ellas.

10. Dada la función

f(x) = $\dfrac{1+x^2}{|x|}$

(a) Determina su dominio.

(b) Calcula sus asíntotas y sitúa la gráfica de f respecto de las mismas.

11. Sea f la función dada por f (x) = $\dfrac{x^2}{x^2 - 1}$ para $|x| \neq$ 1, determina sus asíntotas.

12. Dada la función

f(x) = $\dfrac{|x|}{1-x^2}$

(a) Determina su dominio.

(b) Calcula sus asíntotas y sitúa la gráfica de f respecto de las mismas.

13. Sea la función f(x) = $\dfrac{|x-1|}{x}$

a) Halla su dominio de definición.

b) Calcula sus asíntotas.

14. Dada la función

f(x) = $\dfrac{\mathrm{Ln}(x-1)}{\mathrm{Ln}(x-2)}$

(a) Determina su dominio.

(b) Calcula sus asíntotas y sitúa la gráfica de f respecto de las mismas.

15. Sea f la función dada por f (x) = $\dfrac{x^2}{x - 1}$ para $|x| \neq 1$, determina sus asíntotas.

16. Dada la función f(x) = $\dfrac{|x|}{x^2 - 1}$

(a) Determina su dominio.

(b) Calcula sus asíntotas y sitúa la gráfica de f respecto de las mismas.

17. Dibuja las gráficas de las funciones:

a) y = $|\mathrm{Ln}(x+1)|$.

b) y = $\mathrm{Ln}(|x|-2)$.

c) y = $e^{|x|}$.

18. Dibuja la gráfica de una función que cumpla las siguientes condiciones:

- Su dominio y recorrido es R*.
- No corta al eje de ordenadas.
- Es simétrica impar.
- Corta al eje OX en x = -2 y x = 1
- La recta y = x es asíntota oblicua.

SOLUCIONES DE EJERCICIOS LÍMITES Y ASÍNTOTAS

1. **Calcula los siguientes límites:**

   (a) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\mathbf{sen(2x)}}{\sqrt{1-\cos(2x)}}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathbf{xsen(x)}}{1-\cos(x)}$

   Resolución:

   (a) Como f(x) = 1-cos(x) y g(x) = $\dfrac{x^2}{2}$ son infinitésimos equivalentes en x = 0, tendremos que 1-cos(2x) y g(x) = $\dfrac{(2x)^2}{2}$ porque si tomamos u = 2x:

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{(2x)^2}{2}}{1-\cos(2x)} = \lim_{u\to 0} \frac{\frac{(u)^2}{2}}{1-\cos(u)} = 1.$$

   Como h(x) = sen(x) e i(x) = x son infinitésimos equivalentes en x = 0, tendremos que sen(2x) y 2x porque si tomamos u = 2x:

   $$\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\text{sen}(2x)} = \lim_{u\to 0} \frac{u}{\text{sen}(u)} = 1.$$

   Por lo tanto:

   $$\lim_{x\to 0^-} \frac{\text{sen}(2x)}{\sqrt{1-\cos(2x)}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x}{\sqrt{\frac{(2x)^2}{2}}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x}{\sqrt{2x^2}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x}{|x|} = -\sqrt{2}$$

   (b) Utilizando los infinitésimos equivalentes en x = 0, 1-cos(x) ~ $\dfrac{x^2}{2}$ y sen(x)~ x

   $$\lim_{x\to 0} \frac{x\text{sen}(x)}{1-\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x.x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} 2 = 2$$

2. **Calcula los siguientes límites**

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(x)}{e^{3x} - 1}$

   Resolución:

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{0}} = e^{-\infty} = \dfrac{1}{e^{\infty}} = \dfrac{1}{\infty} = 0.$

   (b) Como e^x -1 y x son infinitésimos equivalentes en x = 0 tenemos que e^{2x}-1 y 2x también lo son porque si tomamos u = 2x: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{2x} = \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{e^u - 1}{u}$ = 1. Si sacamos e^{-x} como factor común:

   $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}(e^{2x} - 1)}{x} = \lim_{x\to 0} e^{-x} . \lim_{x\to 0} 2\frac{e^{2x} - 1}{2x} = 2. \lim_{x\to 0} e^{-x} . \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = 2$$

   (c) Como e^x -1 y x son infinitésimos equivalentes en x = 0 tenemos que e^{3x}-1 y 3x también lo son porque si tomamos u = 3x: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{3x} = \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{e^{u}-1}{u} = 1$. También los son sen(x) y x:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{e^{3x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\cdot\frac{3x}{e^{3x}-1}\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{e^{3x}-1}=\frac{1}{3}$$

3. Calcula los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathbf{tg(x)-sen(x)}}{\mathbf{x^3}}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\mathbf{sen(2x)}}{\sqrt{1-\cos(3x)}}$

Resolución:

(a) Utilizando los infinitésimos equivalentes en x = 0, 1-cos(x) ~ $\dfrac{x^2}{2}$ y sen(x)~ x y tg(x)~ x $\Rightarrow$ cos(x) ~1- $\dfrac{x^2}{2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(x)-\operatorname{sen}(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}-\operatorname{sen}(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\operatorname{sen}(x)(1-\cos(x))}{\cos(x)}}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x.x^2/2}{1-x^2/2}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2-x^2}\;\frac{1}{2}$$

(b) Como f(x) = 1-cos(x) y g(x) = $\dfrac{x^2}{2}$ son infinitésimos equivalentes en x = 0, tendremos que 1-cos(3x) y g(x) = $\dfrac{(3x)^2}{2}$ porque si tomamos u = 3x:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{(3x)^2}{2}}{1-\cos(3x)} = \lim_{u\to 0}\frac{\dfrac{(u)^2}{2}}{1-\cos(u)} = 1.$$

Como h(x) = sen(x) e i(x) = x son infinitésimos equivalentes en x = 0, sen(2x) y 2x también lo son porque si tomamos u = 2x:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\operatorname{sen}(2x)} = \lim_{u\to 0}\frac{u}{\operatorname{sen}(u)} = 1.$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{\sqrt{1-\cos(3x)}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{\sqrt{\dfrac{(3x)^2}{2}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{\sqrt{\dfrac{9x^2}{2}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{x}{|x|}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

4. Calcula los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\mathbf{\cos(2x)}^{\frac{1}{x^2}}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\mathbf{(x)}^{\frac{1}{x^2}}$

Resolución:

(a) Es una indeterminación del tipo (1^{∞}). El límite será de la forma L = e^{λ} siendo $\lambda = \lim\limits_{x\to 0}[f(x)-1].g(x)$, siendo f la base y g el exponente, luego:

$$\lambda = \lim_{x\to 0}\left[\cos(2x-1).\frac{1}{x^2}\right]$$

Como 1-cos x es un infinitésimo equivalente a $\frac{x^2}{2}$, cos(x)-1 es equivalente a $-\frac{x^2}{2}$, luego cos(2x)- 1 es equivalente a $-\frac{(2x)^2}{2} = -2x^2$:

$$\lambda = \lim_{x\to 0}\left[(-2x^2).\frac{1}{x^2}\right] = \lim_{x\to 0}(-2) = -2$$

es decir que: $L = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$

(b) Es un límite del tipo (0^{∞}), que no es una indeterminación, sino que vale cero:

$$\lim_{x\to 0^+}(x)^{\frac{1}{x^2}} = (0^{\infty}) = 0$$

5. Calcula el siguiente límite: $\lim_{x\to\infty}(x)^{\frac{1}{x^2}}$

Resolución:

Es una indeterminación del tipo (∞^0), que resolvemos transformándola en una del tipo (∞.0) tomando logaritmos:

$$L\left[\lim_{x\to\infty}(x)^{\frac{1}{x^2}}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[L(x)^{\frac{1}{x^2}}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x^2}Lx\right] = 0.(-\infty)$$

Hallamos el valor del límite, sabiendo que Lx es un infinito de orden inferior a x, $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{Lx}{x^2}\right] = 0$.

Finalmente

$$\lim_{x\to\infty}(x)^{\frac{1}{x^2}} = e^0 = 1$$

6. Considera la función f: R→ R definida por

f(x) = $\mathbf{\frac{1}{1+e^{1/x}} \quad si \quad x \neq 0}$

Calcula los límites laterales en x = 0.

Resolución:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1+e^{1/x}} = \frac{1}{1+e^{-\infty}} = \frac{1}{1+0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+e^{1/x}} = \frac{1}{1+e^{\infty}} = \frac{1}{1+\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

7. Demuestra:

(a) Que f(x) = ln(x^2) y g(x) = x^2-1 son infinitésimos equivalentes en x_0 =1

(b) $\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{(x+h)^2+k}-(x+h)\right] = 0$

Resolución

(a) Para que f y g sean infinitésimos equivalentes en x = 1 ha de cumplirse:

- $\lim_{x\to 1}\ln(x^2) = \ln(1) = 0$, se cumple que $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$

- $\lim_{x\to 1}(x^2 - 1)$ = 1-1= 0, se cumple que $\lim_{x\to 1} g(x) = 0$
- Usando que ln(1+x) y x son infinitésimos equivalentes en 1, efectuando el cambio u+1=x también lo son ln(x) y x-1: $\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1} = \lim_{u\to 0}\frac{\ln(u+1)}{u} = 1$

  $\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x^2)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{2.\ln(x)}{x-1}.\frac{1}{x+1} = 2.\lim_{x\to 1}\frac{2.\ln(x)}{x-1}.\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1} = 2.1..\frac{1}{2} = 1,$

  se cumple que $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$

(b) $\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{(x+h)^2+k}-(x+h)\right] = (\infty-\infty)$

Es una indeterminación (∞-∞) que, al tener radicales en la expresión, resolvemos multiplicando y dividiendo por la conjugada de la expresión:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{(x+h)^2+k}-(x+h)\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\sqrt{(x+h)^2+k}-(x+h)\right].\left[\sqrt{(x+h)^2+k}+(x+h)\right]}{\sqrt{(x+h)^2+k}+(x+h)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(x+h)^2+k-(x+h)^2}{\sqrt{(x+h)^2+k}+(x+h)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{k}{\sqrt{(x+h)^2+k}+(x+h)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{k}{\infty+\infty} = 0$$

8. Demuestra:

(a) Que f(x) = ln(1+x) y g(x) = x^2+x son infinitésimos equivalentes en x_0 =0

(b) $\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{(x+h)^2+k}+(x+h)\right] = 0$

Resolución

(a) Para que f y g sean infinitésimos equivalentes en x = 1 ha de cumplirse:

- $\lim_{x\to 0}\ln(1+x)$ = ln(1) = 0, se cumple que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$
- $\lim_{x\to 0}(x^2+x)$ = 0+0= 0, se cumple que $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$
- $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x^2+x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\frac{1}{1+x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}.\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x} = 1$

  se cumple que $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$

(b) $\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{(x+h)^2+k}+(x+h)\right] = (\infty-\infty)$

Es una indeterminación (∞-∞) que, al tener radicales en la expresión, resolvemos multiplicando y dividiendo por la conjugada de la expresión:

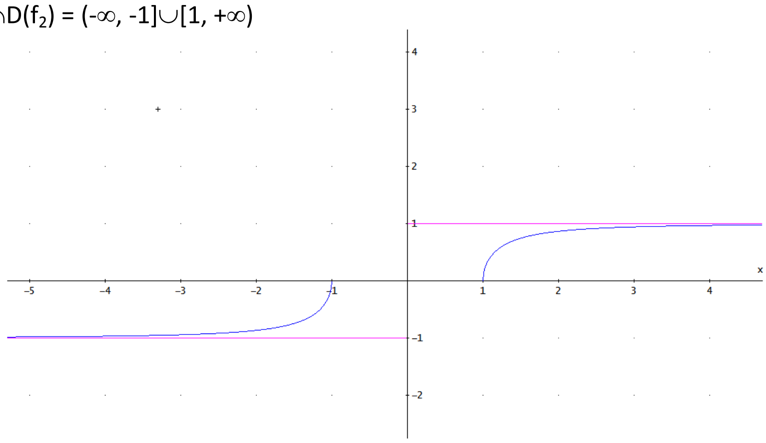
$$\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{(x+h)^2+k}+(x+h)\right] = \lim_{x\to+-\infty}\frac{\left[\sqrt{(x+h)^2+k}+(x+h)\right].\left[\sqrt{(x+h)^2+k}-(x+h)\right]}{\sqrt{(x+h)^2+k}-(x+h)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{(x+h)^2+k-(x+h)^2}{\sqrt{(x+h)^2+k}-(x+h)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{k}{\sqrt{(x+h)^2+k}-(x+h)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{k}{\infty+\infty} = 0$$

9. Localiza las asíntotas de la función f(x) = $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ y sitúa la gráfica de la función respecto de ellas.

Resolución:
En primer lugar debemos averiguar cuál es el dominio de definición de la función que está formado por la intersección de los dominios de ambos factores salvo los valores que anulan el denominador. Al ser el numerador un radical hallamos los valores que hagan que el radicando sea positivo o cero:
f_1: $x^2 -1 \geq 0 \Rightarrow D(f_1) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
f_2: $D(f_2) = \mathbb{R}$

Siendo la intersección:
$D(f) = D(f_1) \cap D(f_2) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$



- Asíntotas verticales: son rectas tales que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$. Como es un cociente buscamos los valores x = a que anulan el denominador. Como un entorno de x = 0 no pertenece al dominio de definición de la función, no existen asíntotas verticales.

- Asíntotas horizontales: son las rectas de ecuación y = b tales que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$. Vamos a hallarlas en ambos lados:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{1 - 1/x^2}}{1} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \underset{(1)}{=} \lim_{u \to \infty} \frac{\sqrt{u^2 + 1}}{-u} = -1$$

(1) Hemos efectuado el cambio de variable u = -x para hallar el límite.

Por lo tanto las asíntotas horizontales son y = 1 a la derecha e y = -1 a la izquierda. Para situarlas respecto de la gráfica:
veamos el signo de f(x)-b hacia la derecha:

$$\text{signo}\left(\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} - 1\right) = \text{signo}\left(\frac{\sqrt{x^2 - 1} - x}{x}\right) = \frac{-}{+} = -$$

se acerca por debajo de la gráfica.

Veamos el signo de f(x)-b hacia la izquierda

$$\text{signo}\left(\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + 1\right) = \text{signo}\left(\frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{x}\right) = \text{signo}\left(\frac{\sqrt{u^2 - 1} - u}{-u}\right) = \frac{+}{+} = +$$

se acerca por encima de la gráfica.

- Asíntotas oblicuas: no hay ya que:

m = $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2}$ = 0

10. Dada la función $f(x) = \dfrac{1+x^2}{|x|}$

(a) Determina su dominio.

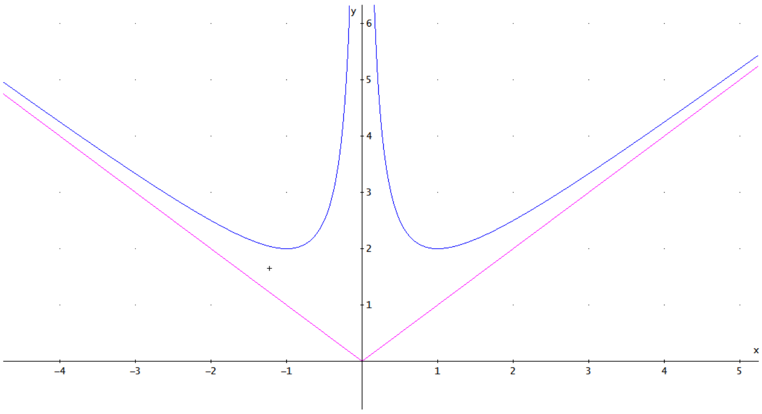
(b) Calcula sus asíntotas y sitúa la gráfica de f respecto de las mismas.

Resolución:

Redefinimos en primer lugar la función como función definida a trozos:

$$f(x) = \frac{1+x^2}{|x|} = \begin{cases} -\dfrac{1+x^2}{x} & \text{si } x<0 \\ \dfrac{1+x^2}{x} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

(a) Su dominio es ℝ * ya que es un cociente de dos funciones continuas en ℝ siendo su denominador nulo en $x_0 = 0$.



(b) Asíntotas.

- Asíntotas verticales: son rectas de ecuación x = a, tales que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$. Como es un cociente buscamos los valores x = a que anulan el denominador, $x_0 = 0$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{1+x^2}{x}\right) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{1+x^2}{x} = +\infty$$

Tanto por la izquierda como por la derecha de $x_0 = 0$ se acerca a la asíntota con valores positivos.

- Asíntotas horizontales: son las rectas de ecuación y = b tales que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$. No existen puesto que:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}\left(-\frac{1+x^2}{x}\right) = +\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\frac{1+x^2}{x} = +\infty$$

Luego no existen asíntotas horizontales.

- Asíntotas oblicuas: son rectas tales que y = mx + n con $m = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ y $n = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - mx]$

Por la derecha:

$$m = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2/x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty}[f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1+x^2}{x} - x\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1+x^2-x^2}{x}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}\right] = 0$$

Existe pues una asíntota oblicua por la derecha: y = x. Para situarla respecto de la gráfica vemos el signo de f(x) - x hacia la derecha:

$$\underset{x\to\infty}{\text{signo}}\left[\frac{1+x^2}{x}-x\right] = \underset{x\to\infty}{\text{signo}}\left[\frac{1+x^2-x^2}{x}\right] = \underset{x\to\infty}{\text{signo}}\left[\frac{1}{x}\right] > 0$$

la función se acercará a la asíntota a la derecha por encima de la misma

Por la izquierda:

$$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{-(1+x^2)/x}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1+x^2}{x^2}\right) = -1$$

$$n = \lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{1+x^2}{x}+x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-1-x^2+x^2}{x}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-1}{x}\right] = 0$$

Existe pues una asíntota oblicua por la izquierda: y =–x. Para situarla respecto de la gráfica vemos el signo de f(x) + x hacia la izquierda:

$$\underset{x\to-\infty}{\text{signo}}\left[-\frac{1+x^2}{x}+x\right] = \underset{x\to-\infty}{\text{signo}}\left[\frac{-1-x^2+x^2}{x}\right] = \underset{x\to-\infty}{\text{signo}}\left[\frac{-1}{x}\right] > 0$$

la función se acercará a la asíntota a la izquierda por encima de la misma

11. **Sea f la función dada por f (x) = $\frac{x^2}{x^2-1}$ para $|x| \neq \pm 1$, determina sus asíntotas.**

Resolución:

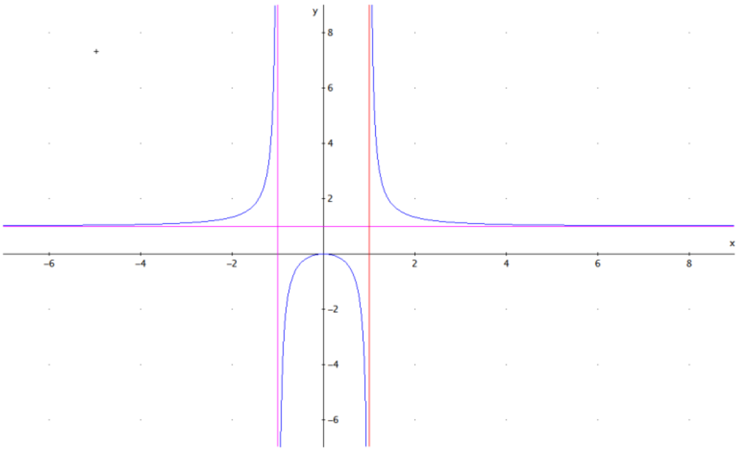
La función es f (x) = $\frac{x^2}{x^2-1}$ está definida para $x \in \mathbb{R}$ - {-1, 1}.

- Asíntotas verticales: aquellas rectas en las que $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$. Como es un cociente buscamos los valores que anulan el denominador:

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2}{x^2-1} = +\infty, \quad \lim_{x\to -1^+}\frac{x^2}{x^2-1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to +1^-}\frac{x^2}{x^2-1} = -\infty, \quad \lim_{x\to +1^+}\frac{x^2}{x^2-1} = +\infty$$

Las asíntotas son: x = -1, x = 1.



- Asíntotas horizontales: aquellas rectas en las que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2-1} = 1$$

ya que es una función par. La ecuación de la asíntota es y = 1.

Para situarlas la asíntota respecto de la gráfica veamos el signo de f(x)-b hacia la derecha y la izquierda:

$$\underset{x\to\infty}{\text{signo}}\left(\frac{x^2}{x^2-1}-1\right)=\underset{x\to\infty}{\text{signo}}\left(\frac{x^2-x^2+1}{x^2-1}\right)=\underset{x\to\infty}{\text{signo}}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)>0$$

se acerca por encima de la gráfica.

$$\underset{x\to-\infty}{\text{signo}}\left(\frac{x^2}{x^2-1}-1\right)=\underset{x\to-\infty}{\text{signo}}\left(\frac{x^2-x^2+1}{x^2-1}\right)=\underset{x\to-\infty}{\text{signo}}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)>0$$

se acerca por encima de la gráfica.

- Asíntotas oblicuas. No las hay ya que el límite:

  $$m = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^3-x} = +\infty$$

12. Dada la función f(x) = $\dfrac{|x|}{1-x^2}$

(a) Determina su dominio.

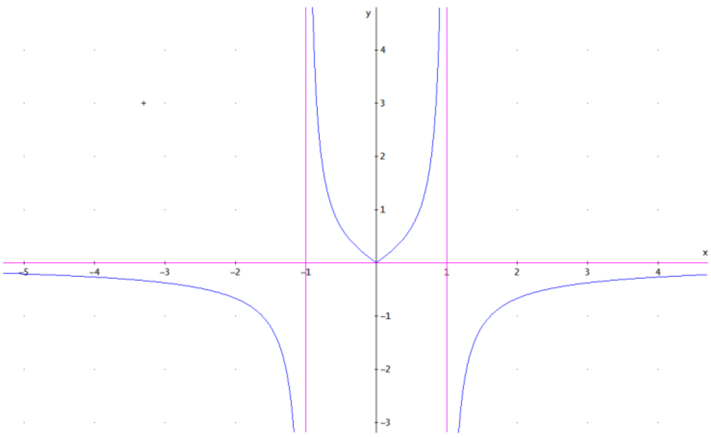
(b) Calcula sus asíntotas y sitúa la gráfica de f respecto de las mismas.

Resolución:

Redefinimos en primer lugar la función como función definida a trozos:

$$f(x) = \frac{|x|}{1-x^2} = \begin{cases} -\dfrac{x}{1-x^2} & \text{si}\, x<0 \\ \dfrac{x}{1-x^2} & \text{si}\ \ x\geq 0 \end{cases}$$

(a) Su dominio es $\mathbb{R}$ -{-1, 1} ya que es un cociente de dos funciones continuas en $\mathbb{R}$ siendo su denominador nulo en x_0=-1, x_1=1.



(b) Asíntotas.

- **Asíntotas verticales**: son rectas de ecuación x = a, tales que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$. Como es un cociente buscamos los valores que anulan el denominador, x_0 = -1, x_1 = 1.

  $$\lim_{x\to-1^-}\frac{-x}{1-x^2} = -\infty,\quad \lim_{x\to-1^+}\frac{-x}{1-x^2} = +\infty$$

  $$\lim_{x\to+1^-}\frac{x}{1-x^2} = +\infty,\quad \lim_{x\to+1^+}\frac{x}{1-x^2} = -\infty$$

  Las asíntotas son: x = -1, x = 1.

- **Asíntotas horizontales**: son las rectas de ecuación y = b tales que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$. Son:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{x}{1-x^2}\right) = \lim_{\substack{u\to\infty \\ u=-x}}\left(\frac{u}{1-u^2}\right) = 0;\ y = 0 \text{ a la derecha.}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1-x^2} = 0;\ y = 0 \text{ a la izquierda.}$$

Para situarlas la asíntota respecto de la gráfica veamos el signo de f(x)-b hacia la derecha y la izquierda:

$$\underset{x\to\infty}{\text{signo}}\left(\frac{x}{1-x^2}-0\right) = \underset{x\to\infty}{\text{signo}}\left(\frac{x}{1-x^2}\right) < 0$$

La gráfica se acerca por debajo de la asíntota.

$$\underset{x\to-\infty}{\text{signo}}\left(\frac{-x}{1-x^2}-0\right) = \underset{\substack{u\to\infty \\ u=-x}}{\text{signo}}\left(\frac{u}{1-u^2}\right) < 0$$

La gráfica se acerca por debajo de la asíntota.

- **Asíntotas oblicuas**: No existen puesto que los límites:

$$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x/(1-x^2)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{1-x^2} = 0$$

$$m = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x/(1-x^2)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-x^2} = 0$$

son nulos, existen por lo tanto asíntotas horizontales.

13. Sea la función $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x}$

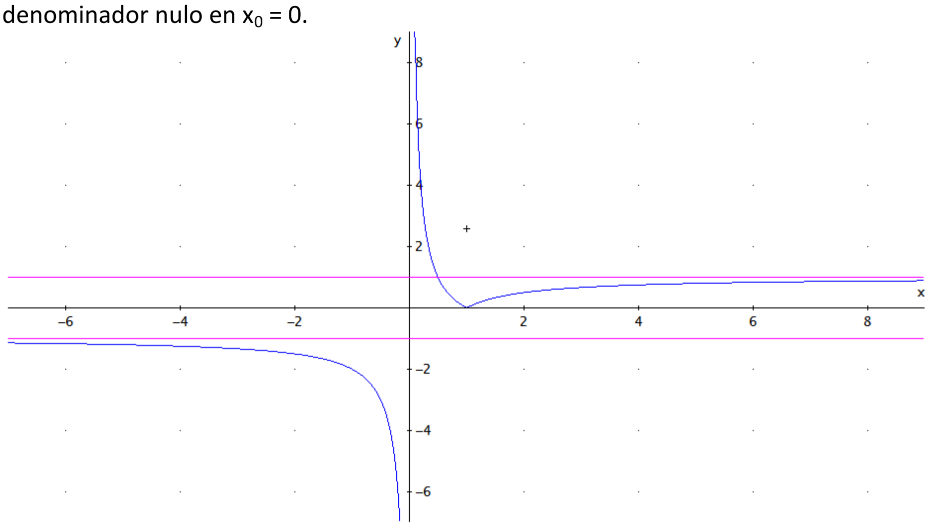
a) Halla su dominio de definición.
b) Calcula sus asíntotas.

Resolución:

Redefinimos en primer lugar la función como función definida a trozos:

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x} = \begin{cases} -\dfrac{x-1}{x} & \text{si } x<1 \\ \dfrac{x-1}{x} & \text{si } x\geq 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1-x}{x} & \text{si } x<1 \\ \dfrac{x-1}{x} & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$

(a) Su dominio es ℝ* ya que es un cociente de dos funciones continuas en ℝ siendo su denominador nulo en $x_0 = 0$.



(b) Asíntotas.

- **Asíntotas verticales**: son rectas de ecuación x = a, tales que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$. Como es un cociente buscamos los valores x = a que anulan el denominador, $x_0 = 0$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1-x}{x}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1-x}{x}\right) = +\infty$$

Existe asíntota x = 0 y se acerca a la asíntota con valores positivos a la derecha y negativos a la izquierda.

- **Asíntotas horizontales**: son las rectas de ecuación y = b tales que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$. Son:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-x}{x} = -1$$

Para situarlas la asíntota respecto de la gráfica veamos el signo de f(x)-b hacia la derecha y la izquierda:

$$\underset{x\to\infty}{\text{signo}}\left(\frac{x-1}{x}-1\right) = \underset{x\to\infty}{\text{signo}}\left(\frac{-1}{x}\right) < 0$$

La gráfica se acerca por debajo de la asíntota.

$$\underset{x\to-\infty}{\text{signo}}\left(\frac{1-x}{x}+1\right) = \underset{x\to-\infty}{\text{signo}}\left(\frac{1}{x}\right) < 0$$

La gráfica se acerca por debajo de la asíntota.

- **Asíntotas oblicuas**: No existen puesto que los límites:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x-1}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x^2} = 0$$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1-x}{x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-x}{x^2} = 0$$

son nulos, existen por lo tanto asíntotas horizontales pero no oblícuas.

14. Dada la función

f(x) = $\mathbf{\dfrac{\ln(x-1)}{\ln(x-2)}}$

(a) Determina su dominio.

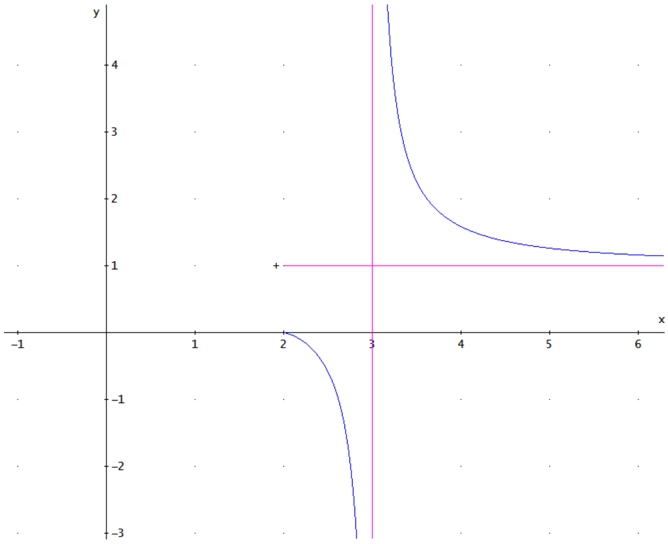
(b) Calcula sus asíntotas y sitúa la gráfica de f respecto de las mismas.

(a) Su dominio es $(2,3)\cup(3,\infty)$ ya que es un cociente de dos funciones logarítmicas:

- ln(x-1) está definida en $(1,\infty)$ ya que $x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$
- ln(x-2) está definida en $(2,\infty)$ ya que $x-2 > 0 \Rightarrow x > 1$

Al ser un cociente de funciones el dominio es las intersección de los dominios menos los valores que anulen el denominador y ln(3-2)=ln(1) = 0.

(b) Asíntotas.



- Asíntotas verticales: son rectas de ecuación x = a, tales que $\underset{x\to a}{\text{lím}} f(x) = \pm\infty$. Como es un cociente de logaritmos buscamos los valores que anulan el denominador, x_0 = 3.

  $\underset{x\to 3^-}{\text{lím}} \frac{\ln(x-1)}{\ln(x-2)} = \frac{+}{-} = -\infty$

  $\underset{x\to 3^+}{\text{lím}} \frac{\ln(x-1)}{\ln(x-2)} = \frac{+}{+} = +\infty$

  La asíntotas es: x = 3.

- Asíntotas horizontales: son las rectas de ecuación y = b tales que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$. Sólo a la derecha puesto que para valores menores que 2 no está definida la función:

  $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x-1)}{\ln(x-2)} = 1$

  Ya que ambas funciones son infinitos equivalentes

  Para situarlas la asíntota respecto de la gráfica veamos el signo de f(x)-b hacia la derecha:

  $\underset{x\to\infty}{\text{signo}}\left(\frac{\ln(x-1)}{\ln(x-2)} - 1\right) = \underset{x\to\infty}{\text{signo}}\left(\frac{\ln(x-1)-\ln(x-2)}{\ln(x-2)}\right) > 0$

  se acerca por encima de la gráfica ya que numerador y denominador son positivos.

- Asíntotas oblicuas: No existen puesto que el límite:

  m = $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\ln(x-1)}{\ln(x-2)}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x-1)}{x.\ln(x-2)} = 0$

  por ser el denominador un infinito de orden superior.

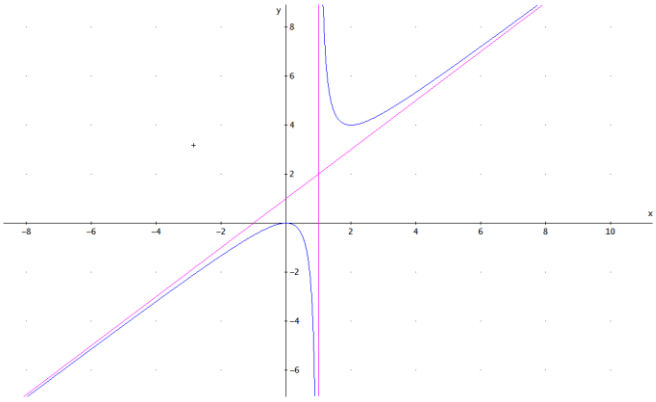
15. Sea f la función dada por

f (x) = $\frac{x^2}{x-1}$ para $|x| \neq 1$,

determina sus asíntotas.

Resolución:

La función es f (x) = $\frac{x^2}{x-1}$ está definida para $x \in \mathbb{R}$ - {1}.



- Asíntotas verticales: aquellas rectas en las que $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$. Como es un cociente buscamos los valores que anulan el denominador:

  $\lim_{x \to +1^{-}} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$, $\lim_{x \to -1^{-}} \frac{x^2}{x-1} = +\infty$

  La asíntota es: x = 1.

- Asíntotas horizontales: son las rectas de ecuación y = b tales que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$. No existen puesto que:

  $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

  $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} x = +\infty$$

  Luego no existen asíntotas horizontales.

- Asíntotas oblicuas: son rectas tales que y = mx + n con m = $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ y n = $\lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]$

  Por la derecha:

  $$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-x} = 1$$

  $$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2}{x-1} - x\right] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x}{x-1}\right] = 1$$

  Existe pues una asíntota oblicua por la derecha: y = x+1. Para situarla respecto de la gráfica vemos el signo de f(x) – (mx+n) hacia la derecha:

  $$\operatorname{signo}_{x\to\infty} \left[\frac{x^2}{x-1} - (x+1)\right] = \operatorname{signo}_{x\to\infty} \left[\frac{1}{x-1}\right] > 0$$

  la función se acercará a la asíntota a la derecha por encima de la misma

  Por la izquierda:

  $$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2-x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to -\infty} \left[\frac{x^2}{x-1} - x\right] = \lim_{x\to -\infty} \left[\frac{x}{x-1}\right] = 1$$

Que es la misma asíntota hallada para la derecha. Para situarla respecto de la gráfica vemos el signo de f(x) – (mx+n) hacia la izquierda:

$$\underset{x\to -\infty}{\text{signo}} \left[\frac{x^2}{x-1} - (x+1)\right] = \underset{x\to -\infty}{\text{signo}} \left[\frac{1}{x-1}\right] > 0$$

la función se acercará a la asíntota a la izquierda por debajo de la misma

16. Dada la función f(x) = $\dfrac{|\mathbf{x}|}{\mathbf{x}^2 - 1}$

(a) Determina su dominio.

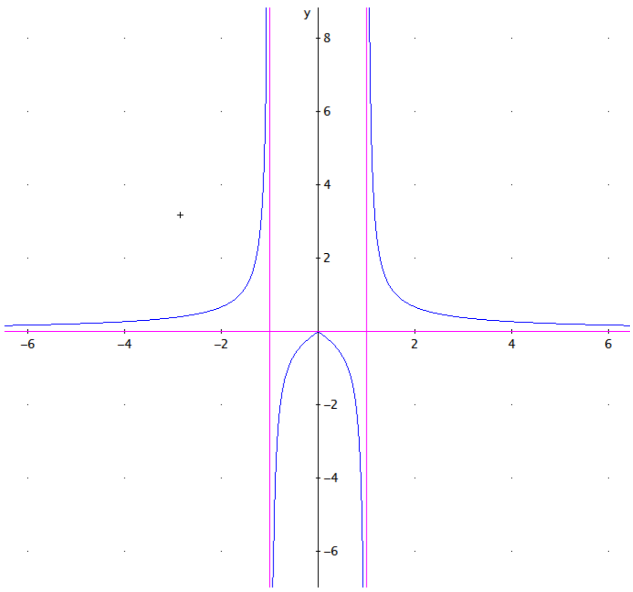
(b) Calcula sus asíntotas y sitúa la gráfica de f respecto de las mismas.

Resolución:

Redefinimos en primer lugar la función como función definida a trozos:

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2-1} = \begin{cases} -\dfrac{x}{x^2-1} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{x^2-1} & \text{si } \ x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Su dominio es $\mathbb{R}$ -{-1, 1} ya que es un cociente de dos funciones continuas en $\mathbb{R}$ siendo su denominador nulo en x_0=-1, x_1=1.



(b) Asíntotas.

- Asíntotas verticales: son rectas de ecuación x = a, tales que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$. Como es un cociente buscamos los valores x = a que anulan el denominador, x_0 = -1, x_1 = 1.

  $$\lim_{x\to -1^-} \frac{-x}{x^2-1} = +\infty, \quad \lim_{x\to -1^+} \frac{-x}{x^2-1} = -\infty$$

  $$\lim_{x\to +1^-} \frac{x}{x^2-1} = -\infty, \quad \lim_{x\to +1^+} \frac{x}{x^2-1} = +\infty$$

  Las asíntotas son: x = -1, x = 1.

- Asíntotas horizontales: son las rectas de ecuación y = b tales que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$. Son:

  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ = $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{x}{x^2-1}\right)$ = $\lim\limits_{\substack{u\to\infty \\ u=-x}}\left(\dfrac{u}{u^2-1}\right)$ = 0; y = 0 a la derecha.

  $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2-1}$ = 0; y = 0 a la izquierda.

  Para situarlas la asíntota respecto de la gráfica veamos el signo de f(x)-b hacia la derecha y la izquierda:

  $$\underset{x\to\infty}{\text{signo}}\left(\frac{x}{x^2-1}-0\right)=\underset{x\to\infty}{\text{signo}}\left(\frac{x}{x^2-1}\right)>0$$

  La gráfica se acerca por encima de la asíntota.

  $$\underset{x\to-\infty}{\text{signo}}\left(\frac{-x}{x^2-1}-0\right)=\underset{\substack{u\to\infty \\ u=-x}}{\text{signo}}\left(\frac{u}{u^2-1}\right)>0$$

  La gráfica se acerca por encima de la asíntota.

- Asíntotas oblicuas: No existen puesto que los límites:

  m = $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ = $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{-x}{x^2-1}}{x}$ = $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{x^2-1}$ = 0

  m = $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ = $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x}{x^2-1}}{x}$ = $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2-1}$ = 0

  son nulos, existen por lo tanto asíntotas horizontales.

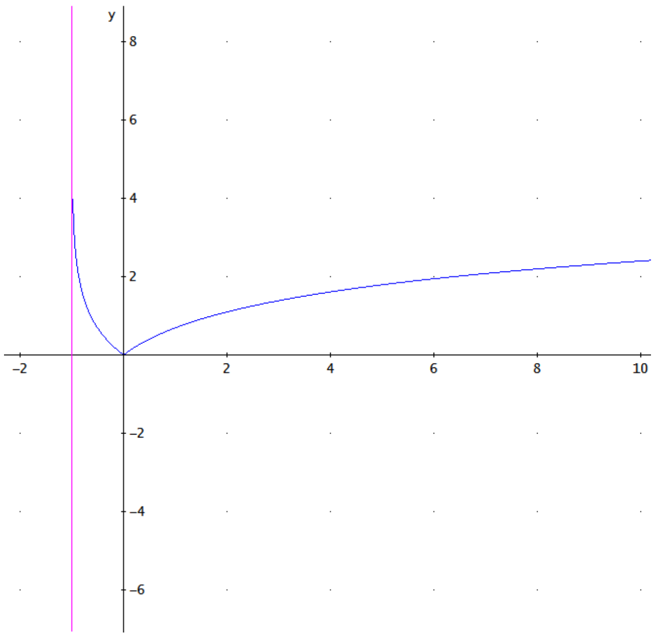
17. **Dibuja las gráficas de las funciones:**

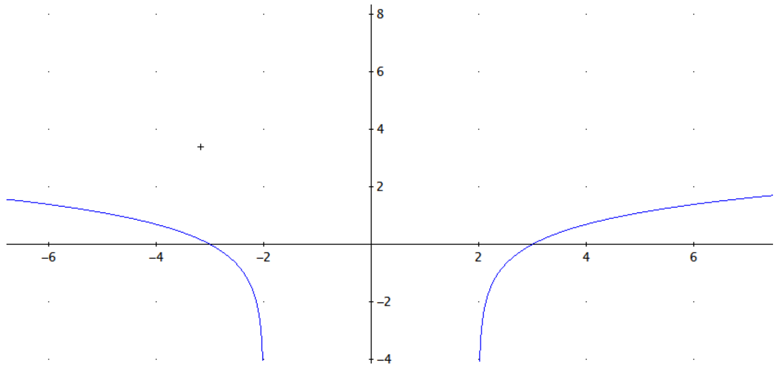
    a) y = $|\ln(x+1)|$.

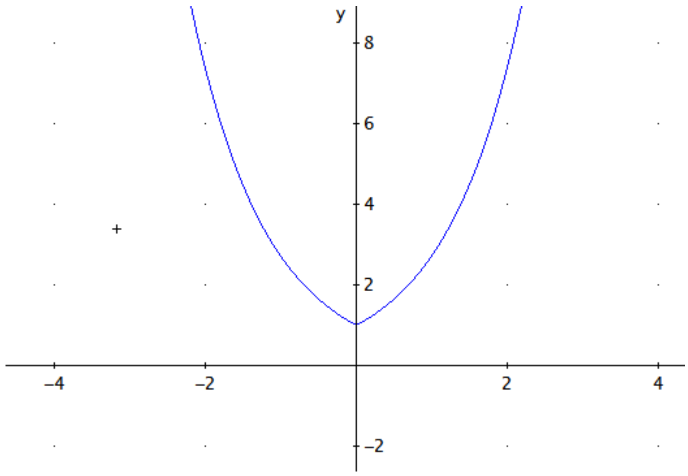
    b) y = $\ln(|x|-2)$.

    c) y = $e^{|x|}$.

Resolución:







18. **Dibuja la gráfica de una función que cumpla las siguientes condiciones:**
    - **Su dominio y recorrido es R*.**
    - **Es simétrica impar.**
    - **Corta al eje OX en x = -2 y x = 1**
    - **La recta y = x es asíntota oblicua.**

Resolución:

- Si el dominio y el recorrido es ℝ* significa que la función no pasa por el punto (0,0).

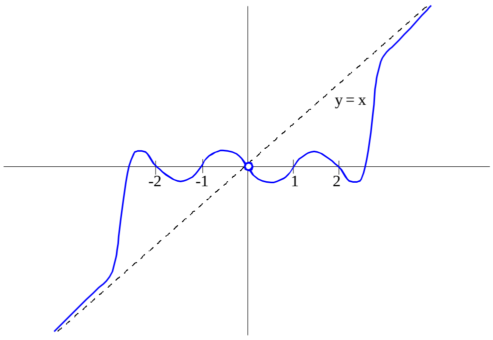
- Al ser simétrica impar significa que la gráfica presenta simetría respecto del origen de coordenadas.

- Los cortes con el eje de abscisas, considerando la simetría han de ser los puntos (-2, 0), (-1, 0), (1, 0) y (2, 0).

- Si y = x es asíntota oblicua se acerca a ella por encima hacia la derecha y por debajo por la izquierda o viceversa.

- Tal como nos indican los valores de dominio y recorrido pueden existir asíntotas verticales en $x_0 = 0$ o no.

  Una posible gráfica es la de la figura adjunta:



TEMA 3.- RELACIÓN DE CONTINUIDAD

1. (a) La función f: R$\to$ R definida por

   f(x) = $\dfrac{x^3+x^2+x+a}{x-1}$

   no está definida en x = 1. Hallar a para que sea posible definir f(1) resultando así una función continua.

   (b) Estudia la continuidad de la función g(x) = $\dfrac{\mathrm{sen}(x)}{|x|}$.

2. La función f: R $\to$ R definida por

   f(x) = $\dfrac{x^3-x^2+x+a}{x+1}$

   no está definida en x = -1. Halla a para que sea posible definir f(-1) resultando así una función continua

3. Dada la función

   f(x) = $\begin{cases} x^2-2x+1 & \text{si } x<0 \\ ax+b & \text{si } 0\le x\le 1 \\ 2 & \text{si } x\succ 1 \end{cases}$

   Halla a y b para que la función sea continua y dibuja su gráfica.

4. Halla a y b para que la función

   f(x) = $\begin{cases} x^2 & \text{si } x<0 \\ ax+b & \text{si } 0\le x<1 \\ 2 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$

   sea continua.

5. Una almacén cobra 1 euro por unidad si se compran 5 o menos paquetes de café, a partir de 5 unidades, cobra por cada x unidades:

   C(x) = $\begin{cases} x & 0\le x\le 5 \\ \sqrt{ax^2-25} & x>5 \end{cases}$

   (a) Halla a de manera que el precio sea el mismo para 5 aplicando las dos reglas.
   (b) ¿A qué precio tenderá el paquete de café para un "grandiiiísimo" consumidor?

6. Un comerciante vende un determinado producto. Por cada unidad de producto cobra 5 euros. No obstante, si se le encargan más de diez unidades, disminuye el precio por unidad, y por cada x unidades cobra:

   C(x) = $\begin{cases} 5x & 0\le x\le 10 \\ \sqrt{kx^2+500} & x>10 \end{cases}$

   a) Halla k de manera que el precio varíe de forma continua al variar el número de unidades que se compran.
   b) ¿A cuánto tiende el precio de una unidad cuando se compran "muchísimas" unidades?

7. Describe las discontinuidades de las siguientes funciones:

   (a) y = $x+\dfrac{x+1}{|x+1|}$.

   (b) y = $\mathrm{Ln}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

(c) y = $\operatorname{sen}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

8. Clasifica las discontinuidades de las siguientes funciones:

   (a) f(x) = $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

   (b) g(x) = $x.e^{\frac{1}{x}}$

   (c) h(x) = $\frac{x^2-1}{x-1}$

9. Demuestra que la función

   f(x) = $\frac{1-\cos(x)}{x.\operatorname{sen}(x)}$

   presenta una discontinuidad evitable en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$. Redefine la función de modo que sea continua en dicho intervalo.

10. Demuestra que la función

    f(x) = $\frac{1-\cos(x)}{x.\operatorname{tg}(x)}$

    presenta una discontinuidad evitable en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Redefine la función de modo que sea continua en dicho intervalo.

11. La función

    f(x) = $\frac{4x-4}{x^3+ax^2+8x-4}$

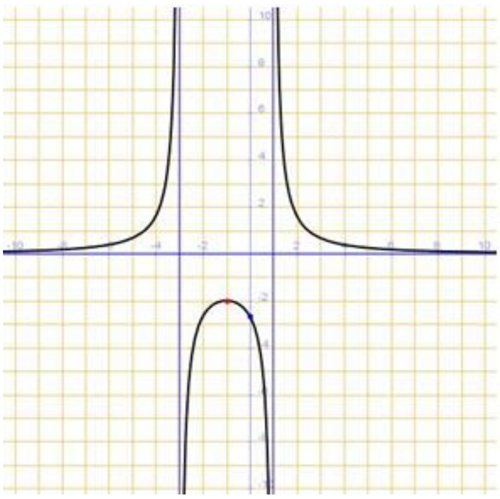
    es discontinua en x = 2. Halla el valor de a y clasifica todas las posibles discontinuidades de la función.

12. La función

    f(x) = $\frac{x^2-2x+a}{x^3+bx^2-14x}$

    tiene una discontinuidad evitable en x = 2. Halla el valor de a y b y clasifica todas las posibles discontinuidades de la función.

13. Determina a, b y c para que la curva y = $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{x^2+bx+c}}$ sea la siguiente:



14. Estudia la continuidad de las funciones siguientes en los puntos considerados y, caso de ser discontinuas, enuncia el tipo de discontinuidad.
(a) $f(x) = x.E(x)$ en $x_0 = 0$
(b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1+e^{1/x}}{1-e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ en $x_0 = 0$

15. Estudia la continuidad de las funciones siguientes en los puntos considerados y, caso de ser discontinuas, enuncia el tipo de discontinuidad.
(a) $f(x) = \begin{cases} x - E(x) & \text{si } x < 0 \\ E(x+1) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ en $x_0 = 0$
(b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^3 + 5x - 6} & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ en $x_0 = 1$

16. Dibuja la gráfica de una función que cumpla las siguientes condiciones:
- Su dominio es R-{-1,0, 1}
- No corta a los ejes de coordenadas.
- Es simétrica impar.
- La recta y = x es asíntota oblicua.
- Presenta al menos dos discontinuidades de salto infinito.
- Es decreciente en (-1,1).

17. Esboza la gráfica de una función f(x) que cumpla las siguientes condiciones:
- en x = -2 tiene una discontinuidad evitable
- en x = 0 tiene una discontinuidad de salto finito
- en x = 2 tiene una discontinuidad asintótica
- $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$.

18. Demuestra que las gráficas de las funciones $f(x) = \ln(x)$ y $g(x) = e^{-x}$ se cortan en algún punto y localízalo con un error menor que la unidad. Enuncia el o los teoremas que hayas empleado en la resolución.

19. Sea la función $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ la función definida por
$f(x) = \cos(x) - x$

(a) Prueba que f es estrictamente decreciente en ese intervalo.
(b) Prueba que la ecuación f(x) = 0 posee una única solución en el intervalo.
(c) Encuentra la solución anterior con un error menor que una centésima.

20. Una función polinómica de segundo grado $f(x) = x^2 - qx - 3$ está definida en el intervalo [a, b]. Sabiendo que $f(a).f(b) < 0$ demuestra que la gráfica de la función corta al eje de abscisas en dos puntos, estando uno de ellos entre a y b.

21. Sea una función $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(0) = f(2\pi)$. Demuestra que existe $x \in [0, \pi]$ tal que $f(x) = f(x+\pi)$. Deduce que si se supone continua la distribución de temperatura en los distintos puntos de la tierra, entonces existen dos puntos antipodales en el ecuador de la tierra que tiene la misma temperatura.

22. Un escalador comienza a subir una montaña desde un día determinado desde un punto P situado en su falda a las 6 de la mañana y alcanza su cima a las 6 de la tarde. Acampa en la cima y al día siguiente baja a las 6 de la mañana hasta que llega al punto P a las 6 de la tarde. Demuestra que existe una determinada hora, a lo largo del día de bajada, en que el escalador se encuentra a la misma hora a la misma altura que el día de subida.

23. Dos pueblos de la montaña leonesa, Brañas y Tejera, se encuentran separados por una distancia de 20 km que se pueden recorrer por dos rutas distintas, una más suave y otra más abrupta. Dos aldeanos, uno de cada pueblo, discuten cuál es la mejor ruta y para ello al día siguiente saldrán de sus respectivos pueblos a la misma hora, las 8 de la mañana, en dirección a la casa del otro y ganará quien antes llegue. El primero va por la ruta A muy deprisa, pero como se cansa se para a comer un bocadillo y reponer fuerzas durante un buen rato, con lo cual tarda 5 horas en llegar, el otro recorre la ruta B a ritmo sostenido pero no para en ningún momento y llega al otro pueblo en el mismo tiempo que el anterior. Demuestra que existe una determinada hora, a lo largo del día de la apuesta, en que ambos aldeanos se encuentran a la misma distancia de Brañas.

24. Sea una función f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ continua y c y d dos valores de dicho intervalo que verifican que f(c) = -5 y f(d) = 5. Demuestra que la función g(x) = f(x) + 6 es tal que existe un punto e, interior al intervalo (c, d), para el que g(e) = 10.

25. Sea f:$[0, 1] \to \mathbb{R}$ una función continua que sólo toma valores racionales y verifica que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$. Demuestra que $f(x) = \frac{1}{2}$ cualquiera que sea $x \in [0,1]$.

26. Determina si la función

$$f(x) = \frac{1}{|x|}$$

está acotada y alcanza sus valores máximos y mínimo en los intervalos (0,5) y [-3, -1]. Enuncia los teoremas que hayas utilizado.

27. Determina si la función

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

está acotada y alcanza sus valores máximos y mínimo en los intervalos (0,3) y [-4,-2]. Enuncia los teoremas que hayas utilizado

SOLUCIONES DE CONTINUIDAD

1. (a) La función f: R→ R definida por f(x) = $\mathbf{\dfrac{x^3+x^2+x+a}{x-1}}$ no está definida en x = 1. Hallar a para que sea posible definir f(1) resultando así una función continua.

(b) Estudia la continuidad de la función g(x) = $\mathbf{\dfrac{sen(x)}{|x|}}$.

Resolución:

Para que sea continua en x = 1 debemos redefinirla de modo que

f(1)= $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2+x+a}{x-1}$

dicho límite es una indeterminación $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ que resolvemos factorizando el numerador de la fracción aplicando la regla de Ruffini y sabiendo que una de las raíces es 1:

	1	1	1	a
1		1	2	3
	1	2	3	3+a

Como el resto ha de anularse: 3+a = 0 ⇒ $\boxed{a = -3}$

Quedando:

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2+2x+3)(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x^2+2x+3) = 6$

(b) Para estudiar la continuidad de la función g la redefinimos:

$$g(x) = \frac{sen(x)}{|x|} = \begin{cases} \dfrac{sen(x)}{-x} & si \quad x<0 \\ \dfrac{sen(x)}{x} & si \quad x>0 \end{cases}$$

Como es un cociente de funciones continuas lo será en R, salvo quizás en x=0. Hallamos los límites laterales, teniendo en cuenta que x ~sen(x) en x = 0:

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{sen(x)}{-x} = -1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{sen(x)}{x} = 1$

Por lo tanto g(x) es continua en **R***

2. La función f: R → R definida por f(x) = $\mathbf{\dfrac{x^3-x^2+x+a}{x+1}}$ no está definida en x = -1. Halla a para que sea posible definir f(1) resultando así una función continua

Resolución:

Para que sea continua en x = -1 debemos redefinirla de modo que

f(1)= $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-x^2+x+a}{x+1}$

dicho límite es una indeterminación $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ que resolvemos factorizando el numerador de la fracción aplicando la regla de Ruffini y sabiendo que una de las raíces es -1:

	1	-1	1	a

-1		-1	2	-3
	1	-2	3	-3+a

Como el resto ha de anularse:
-3+a = 0 $\Rightarrow$ $\boxed{a = 3}$

Quedando:

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x^2 - 2x + 3)(x+1)}{x+1} = \lim_{x \to 1} (x^2 - 2x + 3) = 6$$

3. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \mathbf{x^2 - 2x + 1} & \mathbf{si\ \ x < 0} \\ \mathbf{ax + b} & \mathbf{si\ \ 0 \le x \le 1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{si\ \ x \succ 1} \end{cases}$$

Halla a y b para que la función sea continua y dibuja su gráfica.

Resolución:
Como es una función definida a trozos en $\mathbb{R}$ y las ramas son funciones polinómicas, será una función continua excepto, quizás, en los puntos de solapamiento. Los puntos donde puede haber problemas son $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$:

- x = 0

  $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x^2 - 2x + 1) = 1.$

  $f(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (ax + b) = b.$

  Como han de ser iguales los límites laterales para que sea continua:
  b = 1.

- x = 1

  $f(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (ax + b) = a+1.$

  $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} 2 = 2.$

  Como han de ser iguales los límites laterales para que sea continua:
  a+1 = 2 $\Rightarrow$ a = 1.

Por lo tanto f es continua en todo $\mathbb{R}$ para a = 1 y b = 1.

4. Halla a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \mathbf{x^2\ \ si\ \ x < 0} \\ \mathbf{ax + b\ \ si\ \ 0 \le x < 1} \\ \mathbf{2\ \ si\ \ x \ge 1} \end{cases}$$

sea continua.

Resolución:
Como es una función definida a trozos en $\mathbb{R}$ y las ramas son polinómicas, será una función continua excepto, quizás, en los puntos de solapamiento. Los puntos donde puede haber problemas son $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$:

- $x_0 = 0$

  $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x^2) = 0.$

$f(1) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} (ax + b) = b.$

Para que sea continua obtenemos b = 0.

- $x_1 = 1$

  $f(2) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} (ax + b) = a + b.$

  $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} 2 = 2.$

  Para que sea continua obtenemos a = 2.

Por lo tanto f es continua en todo $\mathbb{R}$ para a = 2 y b = 0.

5. Una almacén cobra 1 euro por unidad si se compran 5 o menos paquetes de café, a partir de 5 unidades, cobra por cada x unidades:

$$C(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 5 \\ \sqrt{ax^2 - 25} & x > 5 \end{cases}$$

(a) Halla a de manera que el precio sea el mismo para 5 aplicando las dos reglas.
(b) ¿A qué precio tenderá el paquete de café para un "grandiiiísimo" consumidor?

Resolución:
(a) Para que el precio sea el mismo para 5 unidades aplicando las dos reglas la función de coste, C(x), ha de ser continua en el dicho punto:

$f(5) = \lim_{x \to 5^-} f(x) = \lim_{x \to 5} x = 5$

$\lim_{x \to 5^+} f(x) = \lim_{x \to 5} \sqrt{ax^2 - 25} = \sqrt{25a - 25} = 5\sqrt{a - 1}$

Igualando ambos límites:

$5\sqrt{a-1} = 5 \Rightarrow \sqrt{a-1} = 1 \Rightarrow a-1 = 1 \Rightarrow a = 2$

(b) El precio el paquete de café para un "grandiiiísimo" consumidor será el obtenido hallando el límite de la función $\frac{C(x)}{x}$ para $x \to \infty$, que como es una indeterminación del tipo $\frac{C(x)}{x}$ que Resolvemos utilizando infinitos equivalentes:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 25}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{2x^2}}{x} = \sqrt{2} \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \sqrt{2} \text{ €}$$

6. Un comerciante vende un determinado producto. Por cada unidad de producto cobra 5 euros. No obstante, si se le encargan más de diez unidades, disminuye el precio por unidad, y por cada x unidades cobra:

$$C(x) = \begin{cases} 5x & 0 \le x \le 10 \\ \sqrt{kx^2 + 500} & x > 10 \end{cases}$$

a) Halla k de manera que el precio varíe de forma continua al variar el número de unidades que se compran.
b) ¿A cuánto tiende el precio de una unidad cuando se compran "muchísimas" unidades?

Resolución:
(a) Para que el precio sea el mismo para 10 unidades aplicando las dos reglas la función de coste, C(x), ha de ser continua en el dicho punto:

$f(10) = \lim_{x \to 10^-} f(x) = \lim_{x \to 10} 5x = 50$

$$\lim_{x \to 10^+} f(x) = \lim_{x \to 10} \sqrt{kx^2 + 500} = \sqrt{100k + 500} = 10\sqrt{k+5}$$

Igualando ambos límites:

$$10\sqrt{k+5} = 50 \Rightarrow \sqrt{k+5} = 5 \Rightarrow k+5 = 25 \Rightarrow k = 20$$

(b) El precio de una unidad de producto cuando se compran "muchísimas" unidades será el obtenido hallando el límite de la función $\frac{C(x)}{x}$ para $x \to \infty$, que como es una indeterminación del tipo $\frac{C(x)}{x}$ resolvemos utilizando infinitos equivalentes:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{20x^2 + 500}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{20x^2}}{x} = \sqrt{20} \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \sqrt{20} \text{ €}$$

7. Describe las discontinuidades de las siguientes funciones:

(a) y = $\mathbf{x + \frac{x+1}{|x+1|}}$ **.**

(b) y = $\mathbf{Ln\left(\frac{1}{x^2}\right)}$**.**

(c) y = $\mathbf{sen\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}$

Resolución:

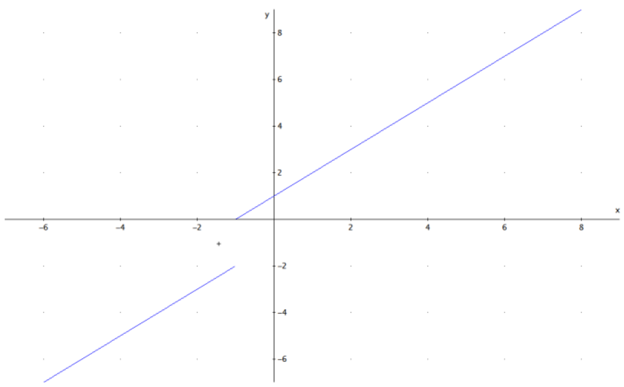
(a) $y = x + \frac{x+1}{|x+1|}$ es una suma de una función continua, x con un cociente de funciones continuas, luego será continua en todo R, salvo quizás en el punto donde se anula del denominador, $x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$. Redefinimos la función como función definida a trozos:

$$y = x + \frac{x+1}{|x+1|} = \begin{cases} x - \frac{x+1}{x+1} & \text{si } x < -1 \\ x + \frac{x+1}{x+1} & \text{si } x > -1 \end{cases} = \begin{cases} x-1 & \text{si } x < -1 \\ x+1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

obteniendo en x= -1 una discontinuidad de salto finito, ya que:

$\lim_{x \to -1^-} (x-1) = -2.$

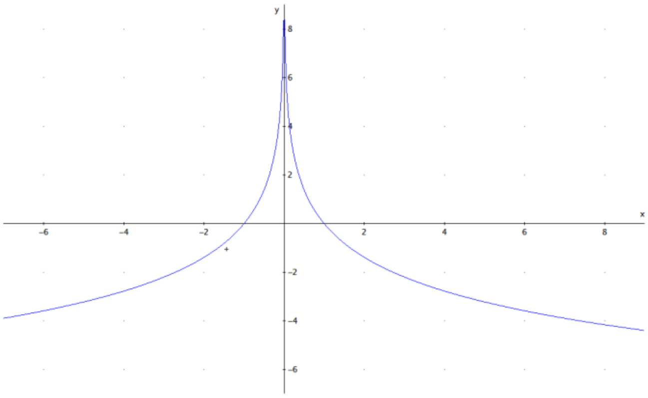
$\lim_{x \to -1^+} (x+1) = 0.$



b) $y = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$ es una composición de funciones continuas en su dominio, como debemos considerar el punto donde se anula del denominador, $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$, obteniendo una discontinuidad de salto infinito con asíntota convergente, ya que:

$$\lim_{x\to 0^-} \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = \ln\left(\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2}\right) = \ln(\infty) = \infty$$

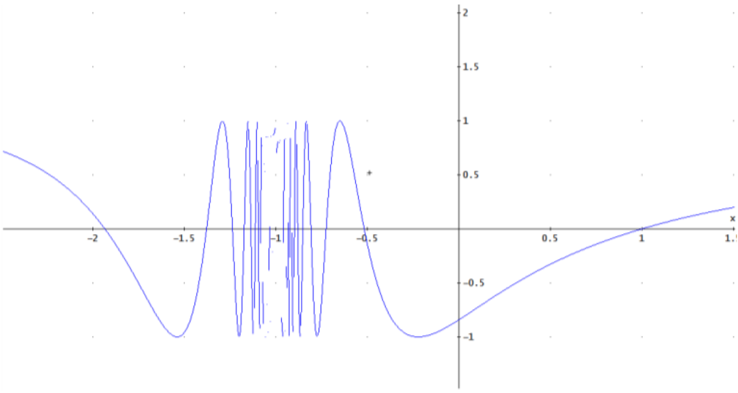
$$\lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = \ln\left(\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\right) = \ln(\infty) = \infty$$



(c) $y = \operatorname{sen}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ es una composición de funciones continuas en su dominio, como debemos considerar el punto donde se anula del denominador, x+1 =0 $\Rightarrow$ x =-1, obteniendo una discontinuidad esencial ya que el valor del seno oscilará en dicho punto.

$$\lim_{x\to -1^-} \operatorname{sen}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \operatorname{sen}\left(\lim_{x\to -1^-} \frac{x-1}{x+1}\right) = \operatorname{sen}(-\infty)$$

$$\lim_{x\to -1^+} \operatorname{sen}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \operatorname{sen}\left(\lim_{x\to -1^+} \frac{x-1}{x+1}\right) = \operatorname{sen}(+\infty)$$



8. Clasifica las discontinuidades de las siguientes funciones:

(a) f(x) = $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

(b) g(x) = $x.e^{\frac{1}{x}}$

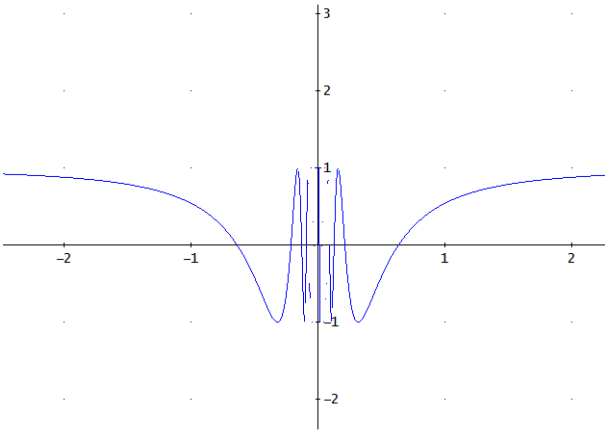
(c) h(x) = $\frac{x^2 - 1}{x-1}$

Resolución:

(a) f(x) = $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ es una composición de funciones continuas en su dominio, como debemos considerar el punto donde se anula del denominador, x=0, obteniendo una discontinuidad esencial ya que el valor del coseno oscilará en dicho punto.

$$\lim_{x\to 0^-}\cos\left(\frac{1}{x}\right) = \cos\left(\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}\right) = \cos(-\infty)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\cos\left(\frac{1}{x}\right) = \cos\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\right) = \text{sen}(+\infty)$$

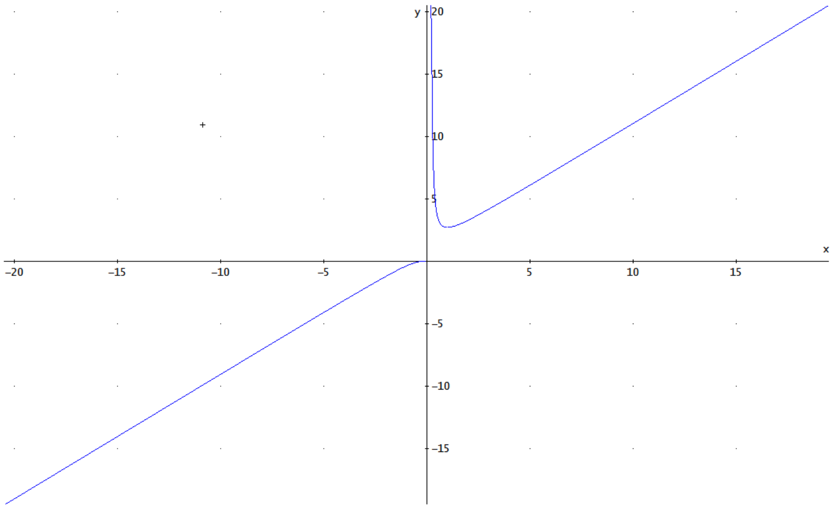


(b) $g(x) = x.e^{\frac{1}{x}}$ es un producto de funciones continuas en su dominio, como debemos considerar el punto donde se anula el denominador de la exponencial, x = 0, obteniendo una discontinuidad de salto infinito, ya que:

$$\lim_{x\to 0^-} x.e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \frac{e^{-\infty}}{-\infty} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x.e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \frac{e^{\infty}}{\infty} = \infty$$

Ya que las funciones exponenciales son infinitos de orden superior que la potenciale.s



(c) $h(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ es un cociente de funciones continuas, como debemos considerar el punto donde se anula del denominador, x=1, obteniendo una discontinuidad evitable:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{(x+1).(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 0}(x+1) = 2.$$

9. Demuestra que la función f(x) = $\frac{\mathbf{1-cos(x)}}{\mathbf{x.sen(x)}}$ presenta una discontinuidad evitable en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$. Redefine la función de modo que sea continua en dicho intervalo.

Resolución:

La función es continua en el intervalo por ser un cociente de funciones continuas, el numerador es diferencia de constante y coseno y el denominador producto de potencial y seno. El único punto donde puede presentar una discontinuidad es $x_0 = 0$, donde se anula el denominador, luego hemos de hallar sus límites laterales para ver si la discontinuidad es evitable:

- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos(x)}{x.\text{sen}(x)} = \left(\frac{0}{0}\right)$

Indeterminación que resolvemos recordando que x~sen(x) y 1-cos(x)~$\frac{x^2}{2}$ para $x \to 0$ (infinitésimos equivalentes):

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos(x)}{x^2/2}\frac{x^2/2}{x.\text{sen}(x)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos(x)}{x^2/2} \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{\text{sen}(x)} = \frac{1}{2}.1.1 = \frac{1}{2}$$

- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(x)}{x.\text{sen}(x)} = \left(\frac{0}{0}\right)$

Indeterminación que resolvemos recordando que x~sen(x) y 1-cos(x)~$\frac{x^2}{2}$:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(x)}{x^2/2}\frac{x^2/2}{x.\text{sen}(x)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(x)}{x^2/2} \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\text{sen}(x)} = \frac{1}{2}.1.1 = \frac{1}{2}$$

Presenta una discontinuidad evitable en x_0 ya que coinciden los límites laterales en dicho punto.

Para que la función sea continua en dicho intervalo se redefine:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos(x)}{x.\text{sen}(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

10. Demuestra que la función f(x) = $\frac{\mathbf{1-cos(x)}}{\mathbf{x.tg(x)}}$ presenta una discontinuidad evitable en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Redefine la función de modo que sea continua en dicho intervalo.

Resolución:

La función es continua en el intervalo por ser un cociente de funciones continuas en el dominio, el numerador es diferencia de constante y coseno y el denominador producto de potencial y tangente. El único punto donde puede presentar una discontinuidad es $x_0 = 0$, donde se anula el denominador, luego hemos de hallar sus límites laterales para ver si la discontinuidad es evitable:

- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos(x)}{x.\text{tg}(x)} = \left(\frac{0}{0}\right)$

Indeterminación que resolvemos recordando que x y tg(x) y 1-cos(x) y $\frac{x^2}{2}$ son infinitésimos equivalentes para $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos(x)}{x^2/2}\frac{x^2/2}{x.\text{tg}(x)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^-} \left[\frac{1-\cos(x)}{x^2/2}\right] \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{\text{tg}(x)} = \frac{1}{2}$$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\cos(x)}{x.tg(x)} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$

Indeterminación que resolvemos recordando que x y tg(x) y 1-cos(x) y $\dfrac{x^2}{2}$ son infinitésimos equivalentes para $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(x)}{x^2/2}\frac{x^2/2}{x.tg(x)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1-\cos(x)}{x^2/2}\right]\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{tg(x)} = \frac{1}{2}$$

Como coinciden los límites laterales en $x_0 = 0$, presenta en dicho punto una discontinuidad evitable.

Para que la función sea continua en dicho intervalo se redefine:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x)}{x.tg(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

11. La función f(x) = $\dfrac{4x-4}{x^3+ax^2+8x-4}$ es discontinua en x = 2. Halla el valor de a y clasifica todas las posibles discontinuidades de la función.

Resolución:

Para que sea discontinua, al ser un cociente de polinomios, el denominador ha de anularse:

$(2^3)+ a(2^2) + 8(2) -4=0 \Rightarrow 20+ 4a = 0 \Rightarrow a = -5$

quedando

$f(x) = \dfrac{4x-4}{x^3-5x^2+8x-4}$.

Los otros puntos donde se anula la función se hallan descomponiendo el denominador en factores mediante la Regla de Ruffini obteniéndose x=1 y x=2.

$f(x) = \dfrac{4(x-1)}{(x-2)^2(x-1)}$.

- En x = 1 tenemos:

  $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{4(x-1)}{(x-2)^2.(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{4}{(x-2)^2} = 4$

  $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{4(x-1)}{(x-2)^2.(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{4}{(x-2)^2} = 4$

  Discontinuidad evitable con verdadero valor de la función f(0) = 4.

- En x = 2 tenemos:

  $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{4(x-1)}{(x-2)^2.(x-1)} = +\infty$

  $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{4(x-1)}{(x-2)^2.(x-1)} = +\infty$

  Discontinuidad inevitable de 1ª especie con salto infinito.

12. La función f(x) = $\dfrac{x^2-2x+a}{x^3+bx^2-14x}$ tiene una discontinuidad evitable en x = 2. Halla el valor de a y b y clasifica todas las posibles discontinuidades de la función.

Resolución:

Para que sea discontinua, al ser un cociente de polinomios, el denominador ha de anularse en $x_0 = 2$:

(2^3)+ $b(2^2)$ -14(2) = 0 $\Rightarrow$ -20+ 4a = 0 $\Rightarrow$ a = 5

Para que el límite para x $\to$ 2 sea finito, el numerador ha de anularse pues en caso contrario sería un límite infinito: $\left(\frac{k}{0}\right)$

Quedaría la función: f(x) = $\frac{x^2 - 2x}{x^3 + 5x^2 - 14x}$

Los otros puntos donde se anula la función se hallan descomponiendo el denominador en factores mediante la Regla de Ruffini obteniéndose como raíces x = 0 y x = -7.

f(x) = $\frac{x.(x-2)}{x.(x-2)(x+7)}$.

- En x = 0 tenemos:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x.(x-2)}{x.(x-2)(x+7)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x+7} = \frac{1}{7}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x.(x-2)}{x.(x-2)(x+7)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x+7} = \frac{1}{7}$$

Discontinuidad evitable con verdadero valor de la función f(0) = $\frac{1}{7}$.

- En x = 2 tenemos:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x.(x-2)}{x.(x-2)(x+7)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x+7} = \frac{1}{9}$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x.(x-2)}{x.(x-2)(x+7)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x+7} = \frac{1}{9}$$

Discontinuidad evitable con verdadero valor de la función f(0) = $\frac{1}{9}$.

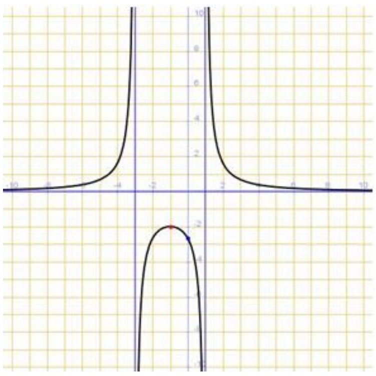
- En x = 1 tenemos:

$$\lim_{x\to -7^-} \frac{x.(x-2)}{x.(x-2)(x+7)} = \lim_{x\to -7^-} \frac{1}{x+7} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -7^+} \frac{x.(x-2)}{x.(x-2)(x+7)} = \lim_{x\to -7^+} \frac{1}{x+7} = +\infty$$

Discontinuidad inevitable de 1ª especie con salto infinito.

13. Determina a, b y c para que la curva y = $\frac{a}{x^2+bx+c}$ sea la siguiente:



Resolución:

Teniendo en cuenta la gráfica la función tiene dos discontinuidades de salto en x=-3 y x = 1, por lo tanto el denominador ha de ser de la forma (x+3).(x-1), es decir que la función será:

y = $\dfrac{a}{x^2+bx+c} = \dfrac{a}{(x+3).(x-1)}$

es decir $x^2+bx+c = (x+3).(x-1) = x^2+2x-3$

por lo tanto b = 2 y c = -3

Por otro lado tiene un máximo en (-1, -2), es decir pasa por dicho punto, sustituyendo valores en la expresión de la función:

f(-1) = $\dfrac{a}{(-1)^2+2(-1)-3} = -2 \Rightarrow \dfrac{a}{-4} = -2 \Rightarrow a = 8$

obteniendo finalmente la expresión:

y = $\dfrac{8}{x^2+2x-3}$

14. Estudia la continuidad de las funciones siguientes en los puntos considerados y, caso de ser discontinuas, enuncia el tipo de discontinuidad.

(a) f(x) = x.E(x) en $x_0 = 0$

(b) g(x) = $\begin{cases} \dfrac{1+e^{1/x}}{1-e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ **en $x_0 = 0$**

Resolución:

(a) Para que f sea continua en $x_0 = 0$ han de ser iguales sus límites laterales e iguales al valor de la función f(0) = 0:

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x.E(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 0.(-1) = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x.E(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 0.0 = 0$

Es continua ya que coinciden los límites laterales en x = 0 y el valor de la función.

(b) Para que g sea continua en $x_0 = 0$, han de ser iguales sus límites laterales e iguales al valor de la función g(0) = 0:

$\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1+e^{1/x}}{1-e^{1/x}} = \dfrac{1}{1} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1+e^{1/x}}{1-e^{1/x}} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

Indeterminación que resolvemos dividiendo numerador y denominador por $e^{1/x}$:

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1/e^{1/x}+1}{1/e^{1/x}-1} = \dfrac{1}{-1} = -1$

Al ser los límites laterales distintos y finitos presenta una discontinuidad de 1ª especie de salto finito 2.

15. Estudia la continuidad de las funciones siguientes en los puntos considerados y, caso de ser discontinuas, enuncia el tipo de discontinuidad.

(a) f(x) = $\begin{cases} x - E(x) & \text{si } x < 0 \\ E(x+1) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ **en $x_0 = 0$**

(b) $\mathbf{g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x+1}{x^3+5x-6} & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}}$ **en** $\mathbf{x_0 = 1}$

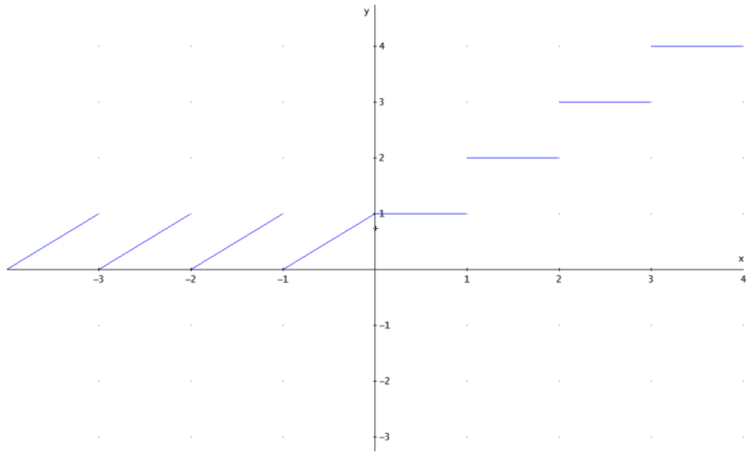
Resolución:

(a) Para que f sea continua en $x_0 = 0$ han de ser iguales sus límites laterales e iguales al valor de la función $f(0) = 0$:

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x - E(x) = 0-(-1) = 1$

$f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} E(x+1) = 1$

Es continua ya que coinciden los límites y el valor de la función.



$$\begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x+1}{x^3+5x-6} & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

(b) Para que g sea continua en $x_0 = 0$, han de ser iguales sus límites laterales e iguales al valor de la función $g(0) = 0$:

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 2x+1}{x^3+5x-6} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Indeterminación que resolvemos descomponiendo factorialmente los polinomos:

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1).(x-1)}{(x-1)(x^2+x-6)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)}{(x^2+x-6)} = 0$$

Como coinciden los límites laterales en $x_0 = 1$, y con el valor de la función es continua en dicho punto.

16. Dibuja la gráfica de una función que cumpla las siguientes condiciones:

- **Su dominio es R-{-1,0, 1}**
- **No corta a los ejes de coordenadas.**
- **Es simétrica impar.**
- **La recta y = x es asíntota oblicua.**
- **Presenta al menos dos discontinuidades de salto infinito.**
- **Es decreciente en (-1,1).**

Resolución:

Basta considerar la función $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ si $x \neq 0$

- Cuyo dominio es R-{-1,0, 1} ya que no está definida en x= 0 y tampoco en -1 y 1 puesto que el cociente se anula en $x^2-1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

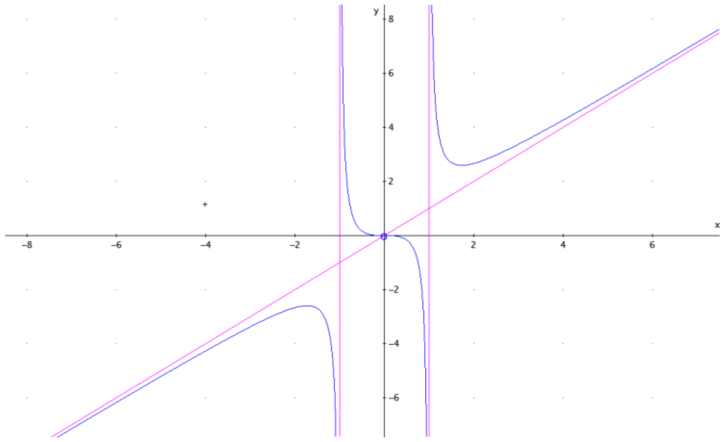
- No corta a los ejes de coordenadas ya que:
  En x = 0 no está definida, por lo tanto no corta al eje de ordenadas.
  Si y = 0 $\Rightarrow \frac{x^3}{x^2-1} = 0 \Rightarrow$ x = 0, imposible puesto que no está definida en dicho punto.
- Es simétrica impar puesto que f(-x) = $\frac{-x^3}{(-x)^2-1} = -\frac{x^3}{x^2-1}$ = -f(x)
- La recta y = x es asíntota oblicua ya que

$$m = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3/(x^2-1)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^3-x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3}{x^2-1}-x\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1}{x^2-1}\right] = 0$$

- Presenta al menos dos discontinuidades de salto infinito en x = -1 y x =1.
- Es decreciente en (-1,1).

cuya gráfica es la siguiente:



17. Esboza la gráfica de una función f(x) que cumpla las siguientes condiciones:

- **en x = -2 tiene una discontinuidad evitable**
- **en x = 0 tiene una discontinuidad de salto finito**
- **en x = 2 tiene una discontinuidad asintótica**
- $\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 1.$

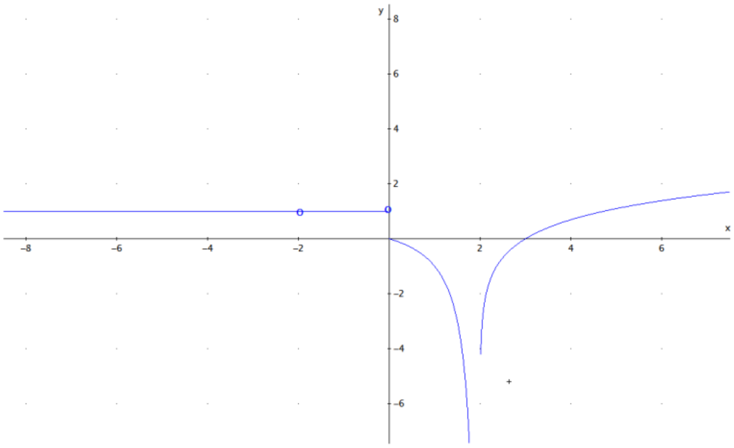
Resolución:

Tomamos, por ejemplo la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x<0 \text{ y } x\neq -2 \\ \frac{x}{x-2} & \text{si } 0\leq x<2 \\ \ln(x-2) & \text{si } 2<x \end{cases}$$

- Que cumple que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$.
- Que cumple que en x_0 = -2 tenga discontinuidad evitable ya que no existe f(-2), pero tiene como límites laterales que podemos $\lim_{x\to-2^-} f(x) = \lim_{x\to-2^+} f(x) = 1$.
- Que tiene en x_1 = 0 una discontinuidad de salto finito de valor 1.
- Que tiene en x_2 = 2 una discontinuidad asintótica de valor -∞ ya que tiene límites laterales $\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^+} f(x) = -\infty$.

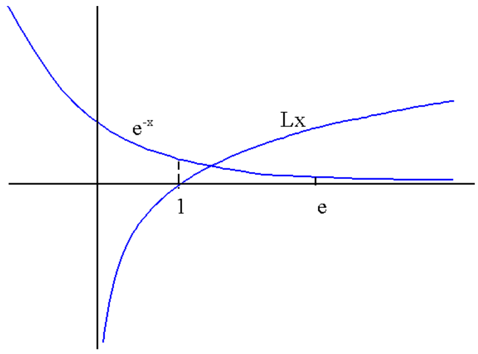
La gráfica es la de la figura adjunta.



18. Demuestra que las gráficas de las funciones f(x) = ln(x) y g(x) = e^{-x} se cortan en algún punto y localízalo con un error menor que la unidad. Enuncia el o los teoremas que hayas empleado en la resolución.

Resolución:
Si existe algún punto de corte entre ambas gráficas es porque en dicho punto coinciden los valores de las ordenadas y abscisas, es decir se cumple que f(x) =g(x). Para demostrar que eso ocurre basta construir la función
h(x)= e^{-x} - ln(x)

y demostrar que se anula en algún punto utilizando el Teorema de Bolzano



Si, por ejemplo, tomamos el intervalo [1,e], la función es continua en dicho intervalo como suma de funciones continuas.

En los extremos los valores son:
g(1) = e^{-1} - ln(1) > 0
g(e) = e^{-e} - ln(e) = $\frac{1}{e^e} - 1 < 0$

Es decir que *el punto de corte se sitúa* en el intervalo (1, e). Con error menor que la unidad basta considerar el intervalo [1,3; 1,4] ya que:
g(1,3) = $e^{-1,3}$ - ln(1,3) = 0,2725 – 0,2624 = 0,01 >0
g(1,4) = $e^{-1,4}$ - ln(1,4) = 0,2466 – 0,3364 = -0,09 <0

19. Sea la función f: $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ la función definida por f(x) = cos(x)-x

(a) Prueba que f es estrictamente decreciente en ese intervalo.
(b) Prueba que la ecuación f(x) = 0 posee una única solución en el intervalo.
(c) Encuentra la solución anterior con un error menor que una centésima.

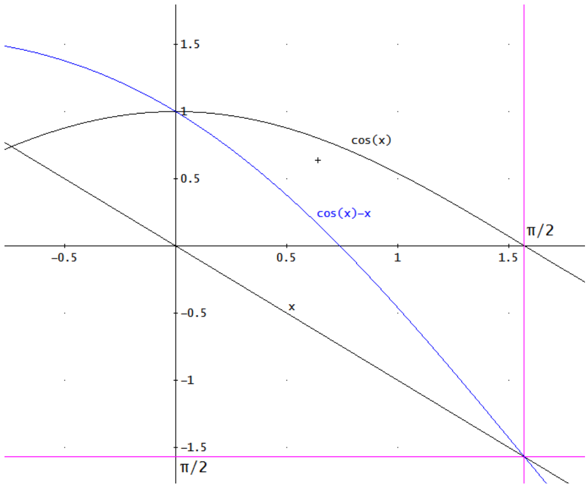
Resolución:

(a) f es estrictamente creciente en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ya que:

$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_2-(-x_1) < 0$ por ser decreciente -x en R.

$x_1 < x_2 \Rightarrow \cos(x_2) - \cos(x_1) < 0$ por ser decreciente cos(x) en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

siendo la suma de funciones decrecientes una función decreciente tal como se ve en la figura.



(b) Para probar que la ecuación f(x) = 0 posee una única solución en el intervalo utilizamos el Teorema de Bolzano ya que como ambas funciones son continuas en el intervalo, su diferencia lo es cumpliéndose en los extremos que:

$\cos(0)-0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} > 0$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} = 1 - \frac{\pi}{2} < 0$

Con lo cual existe una solución en el intervalo $x_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Es además única, ya que si existiera otra solución en dicho intervalo x_2 la función habría de ser creciente en algún subintervalo de intervalo (x_1, x_2) que contradeciría el hecho de que la función es estrictamente decreciente en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tal como discutimos en el apartado (a).

(c) Para encontrar la solución anterior con un error menor que una centésima bastaría, utilizando la calculadora determinar puntos en el interior del intervalo. Serían [0,73; 0,74]:
f(0,73) = cos(0,73)- 0,73 = 0,7452-0,73 = 0,0152
f(0,74) = cos(0,74)- 0,74 = 0,7385-0,74 = -0,0015.

20. Una función polinómica de segundo grado $f(x) = x^2-qx-3$ está definida en el intervalo [a, b]. Sabiendo que f(a).f(b) <0 demuestra que la gráfica de la función corta al eje de abscisas en dos puntos, estando uno de ellos entre a y b.

Resolución:
Para demostrar que la gráfica de la función corta al eje de abscisas en dos puntos, debemos demostrar que la solución de la ecuación de segundo grado f(x) = 0 tiene dos soluciones reales y distintas. Como las soluciones vienen dada por la fórmula:

$x = \frac{q \pm \sqrt{q^2 - 4.1.(-3)}}{2} = \frac{q \pm \sqrt{q^2 + 12q}}{2}$

para que haya dos soluciones el discriminante $\Delta = q^2 + 12 > 0$, que siempre es cierto cualquiera que sea el valor de q $\in$**R.**

Para demostrar que uno de ellos está entre a y b utilizamos el Teorema de Bolzano:

- Es continua por ser una función polinómica.
- Toma valores de distinto signo en el intervalo (a, b) ya que f(a).f(b) <0

Luego existirá un valor $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = 0$.

21. Sea una función f: $[0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(0) = f(2\pi)$. Demuestra que existe $x \in [0, \pi]$ tal que $f(x) = f(x+\pi)$. Deduce que si se supone continua la distribución de temperatura en los distintos puntos de la tierra, entonces existen dos puntos antipodales en el ecuador de la tierra que tiene la misma temperatura.

Resolución:
Para demostrar que existe $x_0 \in (0, \pi)$ tal que $f(x) = f(x+\pi)$ basta considerar la función g: $[0, \pi] \to \mathbb{R}$, tal que $g(x) = f(x) - f(x+\pi)$ que cumple:
a) Es continua en $[0, \pi]$ ya que es la diferencia de dos funciones continuas.
b) Toma valores de distinto signo en cada extremo del intervalo ya que como $f(0) = f(2\pi)$:
$g(0) = f(0) - f(0+\pi) = f(0) - f(\pi)$
$g(\pi) = f(\pi) -(\pi+\pi) = f(\pi) -(2\pi)$

Si $f(0) = f(\pi)$ queda demostrado, $\exists\, x_0 \in [0, \pi] \,/\, f(0) = f(\pi)$
Si $f(0) \neq f(\pi) \Rightarrow f(0) < f(\pi)$ ó $f(0) > f(\pi)$ con lo cual g toma valores de distinto signo a ambos lados del intervalo.

Aplicando el teorema de Bolzano a la función g, existirá un valor $x_0 \in (0, \pi)$ tal que:
$g(x_0) = f(x_0) - f(x_0+\pi) = 0 \Rightarrow f(x_0) = f(x_0+\pi)$
como queríamos demostrar.

Si se supone continua la distribución de temperatura en los distintos puntos de la tierra basta considerar la función temperatura T(x) que asigna a cada punto del ecuador la temperatura correspondiente, pudiendo dar cada punto por el valor del ángulo correspondiente a su meridiano. Basta pues considerar T(x) = f(x) con lo cual entonces existen dos puntos antipodales en el ecuador de la tierra que tienen la misma temperatura.

22. Un escalador comienza a subir una montaña desde un día determinado desde un punto P situado en su falda a las 6 de la mañana y alcanza su cima a las 6 de la tarde. Acampa en la cima y al día siguiente baja a las 6 de la mañana hasta que llega al punto P a las 6 de la tarde. Demuestra que existe una determinada hora, a lo largo del día de bajada, en que el escalador se encuentra a la misma hora a la misma altura que el día de subida.

Resolución:
Consideremos dos funciones:
h_s: $[6, 18] \to \mathbb{R}$, tal que $h_s(t)$ es la altura alcanzada por el escalador en la subida.
h_b: $[6, 18] \to \mathbb{R}$, tal que $h_b(t)$ es la altura alcanzada por el escalador en la bajada.
Y consideremos que en P la altura sobre el nivel del mar toma el valor p y en la cima toma el valor c.

Ambas son, evidententemente, continuas y además se cumple que:
$h_s(6) = p$, $h_s(18) = c$
$h_b(6) = c$, $h_b(18) = p$

Basta construir la función auxiliar $f(t) = h_s(t) - h_b(t)$ y aplicarle el teorema de Bolzano ya que cumple:
a) Es continua en [8, 18] ya que es la diferencia de dos funciones continuas.
b) Toma valores de distinto signo en cada extremo del intervalo ya que:
$f(6) = h_s(6) - h_b(6) = p - c < 0$
$f(18) = h_s(18) - h_b(18) = c - p > 0$

Existirá un valor $t_0 \in (6, 16)$ tal que:
$f(t_0) = h_s(t_0) - h_b(t_0) = 0 \Rightarrow h_s(t_0) = h_b(t_0)$

como queríamos demostrar y existirá una misma hora del día de subida y del día de bajada en que el escalador se encuentra a la misma altura.

23. Dos pueblos de la montaña leonesa, Brañas y Tejera, se encuentran separados por una distancia de 20 km que se pueden recorrer por dos rutas distintas, una más suave y otra más abrupta. Dos aldeanos, uno de cada pueblo, discuten cuál es la mejor ruta y para ello al día siguiente saldrán de sus respectivos pueblos a la misma hora, las 8 de la mañana, en dirección a la casa del otro y ganará quien antes llegue. El primero va por la ruta A muy deprisa, pero como se cansa se para a comer un bocadillo y reponer fuerzas durante un buen rato, con lo cual tarda 5 horas en llegar, el otro recorre la ruta B a ritmo sostenido pero no para en ningún momento y llega al otro pueblo en el mismo tiempo que el anterior. Demuestra que existe una determinada hora, a lo largo del día de la apuesta, en que ambos aldeanos se encuentran a la misma distancia de Brañas.

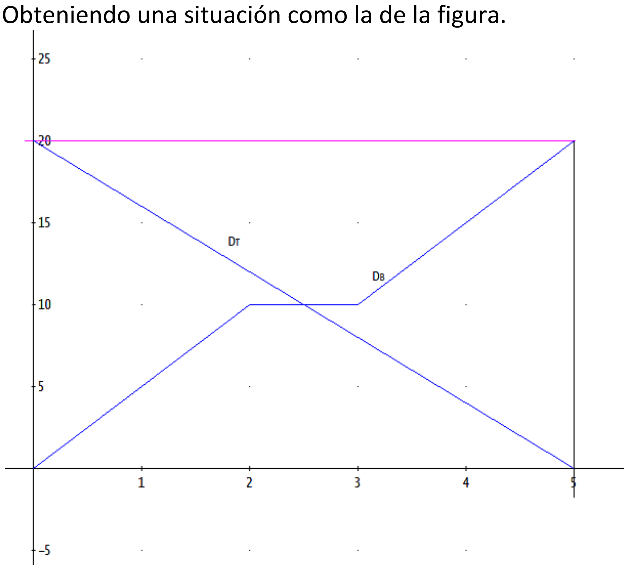
Resolución:

Consideremos dos funciones d_B: [8, 13] $\to \mathbb{R}$ y d_T: [8, 13] $\to \mathbb{R}$ que indican la distancia recorrida por cada aldeano siendo t_2-t_1 el tiempo que descansa el aldeano que sale de Brañas. v_B la velocidad que lleva y v_T la velocidad que lleva el que comienza en Tejera. Cumpliéndose además que $v_B > v_T$. Si medimos la distancia desde Brañas las expresiones del camino recorrido son:

$$d_B = \begin{cases} v_B.t & \text{si } 0 \le t \le t_1 \\ v_B.t_1 & \text{si } t_1 < t \le t_2 \\ v_B.(t+t_1) & \text{si } t_2 < t \end{cases}$$

$d_T = 20 - v_T.t$

Obteniendo una situación como la de la figura.



Por lo cual ambas funciones son continuas y además se cumple que:

$d_B(8) \;\; = d_T(13) = 0$ (ambos están en Brañas en ese momento)

$d_B(13) = d_T(8) \;\; = 0$ (ambos están en Tejera en ese momento)

Para demostrar que existe una determinada hora, a lo largo del día de la apuesta, en que ambos aldeanos se encuentran a la misma distancia de Brañas basta construir la función auxiliar $d(t) = d_B(t) - d_T(t)$ y aplicarle el teorema de Bolzano ya que cumple:

a) Es continua en [8, 13] ya que es la diferencia de dos funciones continuas.

b) Toma valores de distinto signo en cada extremo del intervalo ya que:

$d(8) \;\; = d_B(8) - d_T(8) \;\; = 0 - 20 < 0$

$d(13) = d_B(13) - d_T(13) = 20 - 0 > 0$

existirá un valor $t_0 \in (8, 13)$ tal que:

$d(t) = d_B(t_0) - d_T(t_0) = 0 \Rightarrow d_B(t_0) = d_T(t_0)$

como queríamos demostrar y ambos aldeanos estarán a la misma distancia de Brañas.

24. Sea una función f: [a, b] → ℝ continua y c y d dos valores de dicho intervalo que verifican que f(c) = -5 y f(d) = 5. Demuestra que la función g(x) = f(x) + 6 es tal que existe un punto e, interior al intervalo (c, d), para el que g(e) = 10.

Resolución:
Consideramos la función g: [a, b] → ℝ, tal que g(x) = f(x)+ 6 que es continua en [c, d] ⊂ [a, b] ya que es suma de dos funciones continuas. Como:
g(c) = f(c) + 6 = -5 +6 = 1
g(d) = f(d) + 6 = 5 +6 =11

Aplicando el teorema de los valores intermedios o de Darboux a la función g, para cualquier k tal que g(c) ≤ K ≤ g(d) existirá un valor e∈(c, d) tal que:
g(c) ≤ 10 ≤ g(d) ⇒ g(e) = 10

como queríamos demostrar.

25. **Sea f:[0, 1] → ℝ una función continua que sólo toma valores racionales y verifica que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$. Demuestra que f(x) = $\frac{1}{2}$ cualquiera que sea x∈[0,1].**

Resolución:
Vamos a efectuar una demostración por reducción al absurdo. Supondremos que la función no es constante y demostraremos que se llega a una contradicción con el enunciado del problema.

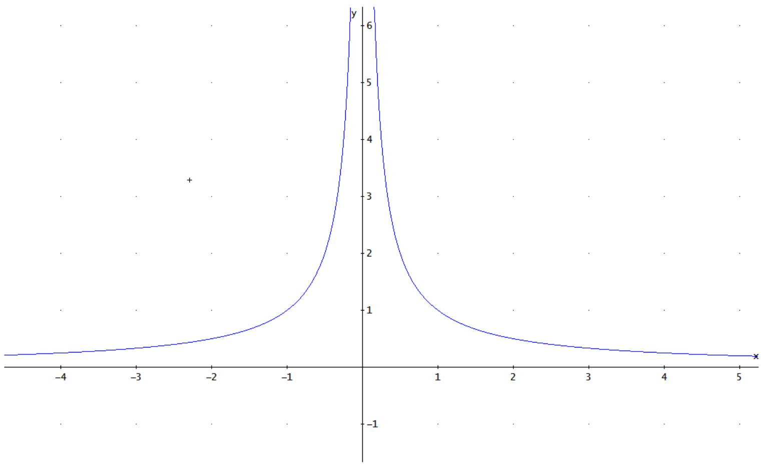
Si la función es continua en el intervalo [0, 1] lo será en cualquiera de sus subintervalos, por ejemplo [a, b] ⊂ [0, 1]. Suponiendo que f no es constante y que toma valores distintos en los extremos de dicho intervalo, f(a) ≠ f(b), por el teorema de Darboux o de los valores intermedios, existirá una valor c∈[a, b] tal que para todo valor k comprendido entre f(a) y f(b), f(c) = k.

Ahora bien entre dos valores racionales, f(a) y f(b), siempre existen números irracionales, por lo tanto existe c∈[a, b] tal que f(c) = k, con K irracional. Pero esto contradice la hipótesis de que el recorrido de la función sólo está formado por números racionales. Por lo tanto f(a) = f(b) y la función, puesto que a y b pueden ser cualesquiera ha de ser constante en el intervalo.
Como $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, al ser constante f(x) = $\frac{1}{2}$ cualquiera que sea x∈[0,1].

26. Determina si la función f(x) = $\frac{1}{|x|}$ está acotada y alcanza sus valores máximos y mínimo en los intervalos (0,5) y [-3, -1]. Enuncia los teoremas que hayas utilizado.

Resolución:
Redefinimos la función como función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

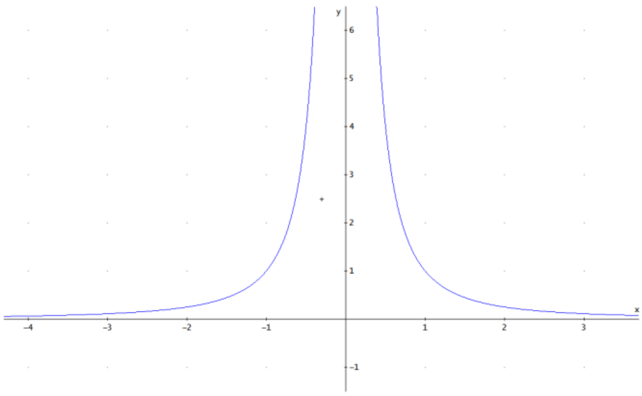


No está acotada en el intervalo (0, 5) ya que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$ y por lo tanto no tiene máximo en dicho intervalo. Si está acotada inferiormente, puesto que $\forall x \in (0, 5)$, f(x) > 0, pero no alcanza su valor mínimo ya que tiene un comportamiento asintótico y no alcanza su extremo inferior k = 0.

Si está acotada en el intervalo [-3, -1] ya que es un cociente de funciones continuas, no anulándose la función denominador en el intervalo en intervalo cerrado tal como enuncia el Teorema de Weiertrass. Tiene un máximo de valor 1 que alcanza en el punto x = -1 y un mínimo de valor 1/3 que alcanza en el punto x = -3.

27. Determina si la función f(x) = $\frac{1}{x^2}$ está acotada y alcanza sus valores máximos y mínimo en los intervalos (0,3) y [-4,-2]. Enuncia los teoremas que hayas utilizado

Resolución:



No está acotada en el intervalo (0, 3) ya que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$ y por lo tanto no tiene máximo en dicho intervalo. Si está acotada inferiormente, puesto que $\forall x \in (0, 3)$, f(x) > 0, pero no alcanza su valor mínimo ya que tiene un comportamiento asintótico y no alcanza su extremo inferior k = 0.

Si está acotada en el intervalo [-4, -2] ya que es un cociente de funciones continuas, no anulándose la función denominador en el intervalo en intervalo cerrado tal como enuncia el Teorema de Weiertrass. Tiene un máximo de valor 1/4 que alcanza en el punto x = -2 y un mínimo de valor -1/16 que alcanza en el punto x = -4.