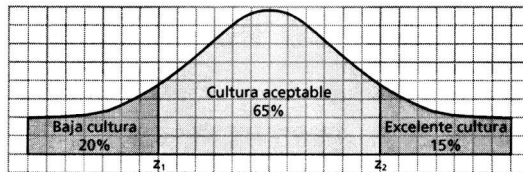


- 1 Tras un test de cultura general se observa que las puntuaciones obtenidas siguen una distribución $N(65; 18)$. Se desea clasificar a los examinados en tres grupos: De baja cultura general; de cultura general aceptable y de excelente cultura general, de modo que haya en el primero un 20% de población, en el segundo un 65% y en el tercero un 15%. ¿Cuáles han de ser las puntuaciones que marcan el paso de un grupo a otro?

Solución:

Sea X la variable que expresa las puntuaciones obtenidas por los individuos en el test. Sigue la ley $N(65; 18)$.

Supongamos para mayor sencillez que se trata de una distribución normal $N(0; 1)$. Luego, tras tipicar la variable, concretaremos al caso de la variable X .



- Se trata de hallar dos valores Z_1 y Z_2 tales que verifiquen:

$$P(Z \leq Z_1) = 0,2 = P(Z \geq -Z_1) \Rightarrow 1 - P(Z \leq -Z_1) = 0,2 \Rightarrow P(Z \leq -Z_1) = 0,8 \Rightarrow -Z_1 = 0,84 \Rightarrow Z_1 = -0,84$$

$$P(Z \geq Z_2) = 0,15 \Rightarrow 1 - P(Z \leq Z_2) = 0,15 \Rightarrow P(Z \leq Z_2) = 0,85 \Rightarrow Z_2 = 1,04$$

- Los valores que se corresponden con la variable X son X_1 y X_2 tales que:

$$Z_1 = \frac{X_1 - 65}{18} \Rightarrow X_1 = 18 \cdot Z_1 + 65 = 49,88; \quad Z_2 = \frac{X_2 - 65}{18} \Rightarrow X_2 = 18 \cdot Z_2 + 65 = 83,72$$

Resumiendo: Baja cultura (menos de 50 puntos); Cultura aceptable (entre 50 y 83 puntos) y Cultura excelente (más de 83 puntos)

- 2 Varios test de inteligencia dieron una puntuación que sigue una ley normal de media 100 y desviación típica 15. Determina el porcentaje de población que obtendría un coeficiente entre 95 y 110. ¿Qué intervalo centrado en 100 contiene al 50% de la población?

En una población de 2500 individuos, ¿cuántos se espera que tengan un coeficiente superior a 125?

Solución:

Sea X la variable aleatoria que expresa la puntuación del test, la cual sigue una ley normal $N(100; 15)$

- Se trata de hallar la probabilidad del suceso ($95 \leq X \leq 110$), por tanto:

$$P(95 \leq X \leq 110) = P\left(\frac{95-100}{15} \leq Z \leq \frac{110-100}{15}\right) = P(-0,33 \leq Z \leq 0,67) = P(Z \leq 0,67) - [1 - P(Z \leq 0,33)] = 0,7486 - 1 + 0,6293 = 0,3779$$

Así que aproximadamente un 38% tiene un coeficiente de inteligencia entre 95 y 110.

- Sea $(-z, z)$ el intervalo tipificado que contiene al 50% de la población, se tiene:

$$P(-z \leq Z \leq z) = 0,50 \Rightarrow 2 \cdot [P(Z \leq z) - P(Z \leq 0)] = 0,50 \Rightarrow P(Z \leq z) - 0,5 = 0,25 \Rightarrow P(Z \leq z) = 0,75 \Rightarrow z = 0,675$$

Destipificando la variable, se tienen para X los siguientes valores:

$$-0,675 = \frac{X_1 - 100}{15} \Rightarrow X_1 = 90; \quad 0,675 = \frac{X_2 - 100}{15} \Rightarrow X_2 = 110$$

Se trata pues del intervalo (89,875; 110,125)

- Se trata de hallar la probabilidad del suceso ($X > 125$), se tiene:

$$P(X > 125) = P\left(Z > \frac{125-100}{15}\right) = P(Z > 1,67) = 1 - P(Z \leq 1,67) = 1 - 0,9525 = 0,0475$$

Por tanto el número de individuos con coeficiente mayor que 125 es: $2500 \cdot 0,0475 = 118$ individuos.

- 3 **Aplicando un test a un grupo de 300 personas, se ha obtenido una distribución normal, para las calificaciones, de media 50 y desviación típica 5. Se pide:**

a) Calcula las puntuaciones que delimitan el 30% central de la distribución.

b) Calcula el número de personas que obtienen en el test más de 56 puntos o menos de 47.

Solución:

La variable aleatoria X que expresa la puntuación de una persona sigue una ley normal $N(50; 5)$.

a) Sea $(-k, k)$ el intervalo que distribuye el 30% central de las puntuaciones, siendo k un valor tipificado de X .

$$P(-k \leq Z \leq k) = 0,30 \Rightarrow 2 \cdot P(0 \leq Z \leq k) = 0,30 \Rightarrow P(Z \leq k) - P(Z \leq 0) = 0,15 \Rightarrow P(Z \leq k) = 0,65 \Rightarrow k = 0,39$$

Destipificando la variable se tiene el siguiente valor:

$$Z = \frac{X-50}{5} \Rightarrow 0,39 = \frac{X_1-50}{5} \Rightarrow X_1 = 51,95 \text{ y } -0,39 = \frac{X_2-50}{5} \Rightarrow X_2 = 48,05$$

Por tanto el intervalo buscado es $(48,05; 51,95)$

b) Sea B el suceso obtener más de 56 puntos o menos de 47, B es el suceso contrario del suceso $(47 \leq X \leq 56)$.

$$\begin{aligned} P(47 \leq X \leq 56) &= P\left(\frac{47-50}{5} \leq Z \leq \frac{56-50}{5}\right) = P(-0,6 \leq Z \leq 1,2) = P(Z \leq 1,2) - P(Z \leq -0,6) = \\ &= P(Z \leq 1,2) - [1 - P(Z \leq 0,6)] = 0,8849 - 1 + 0,7257 = 0,6106 \end{aligned}$$

Por tanto $P(B) = 1 - 0,6106 = 0,3894$ es la probabilidad de encontrar una persona con más de 56 puntos o menos de 47

Por lo que el número de personas con esas puntuaciones es: $300 \cdot 0,3894 = 116$ personas.

- 4 **El peso de los adultos de una población numerosa se distribuye normalmente con media de 65 kg y desviación típica de 3 kg. Se eligen dos individuos al azar. Calculando las correspondientes probabilidades, justifica qué es más probable:**

a) Que cada uno de los dos individuos tenga un peso comprendido entre 63,5 y 66,5 kg.

b) Que uno de ellos tenga un peso comprendido entre 62 y 68 kg, y el otro tenga un peso no comprendido entre 62 y 68 kg.

Solución:

Sea X la variable aleatoria que expresa el peso en kg de un adulto. Sigue una ley normal $N(65; 3)$.

a) Se trata de hallar la probabilidad del suceso compuesto $A = (63,5 \leq X \leq 66,5) \cap (63,5 \leq X \leq 66,5)$, por tanto:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(63,5 \leq X \leq 66,5) \cdot P(63,5 \leq X \leq 66,5) = [P(63,5 \leq X \leq 66,5)]^2 = \left[P\left(\frac{63,5-65}{3} \leq Z \leq \frac{66,5-65}{3}\right) \right]^2 = \\ &= [P(-0,5 \leq Z \leq 0,5)]^2 = [2 \cdot (P(Z \leq 0,5) - P(Z \leq 0))]^2 = [2 \cdot (0,6915 - 0,5)]^2 = 0,1467 \end{aligned}$$

b) Se trata de hallar la probabilidad del suceso intersección de $B = (62 \leq X \leq 68)$ y su contrario B^c por tanto:

$$\begin{aligned} P(B \cap B^c) &= 2 \cdot P(B) \cdot (1 - P(B)) ; P(B) = P(62 \leq X \leq 68) = P\left(\frac{62-65}{3} \leq Z \leq \frac{68-65}{3}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1) = \\ &= 2 \cdot (P(Z \leq 1) - P(Z \leq 0)) = 2 \cdot (0,8413 - 0,5) = 0,6826 \\ P(B \cap B^c) &= 2 \cdot 0,6826 \cdot 0,3174 = 0,4333 \end{aligned}$$

Luego es más probable el caso b.