EXAMEN ANÁLISIS - GEOMETRÍA

1.- Dadas las funciones: $f(x)=\sqrt{x+1}$ y $g(x)=\dfrac{x}{x-2}$.

a) Calcula $f\circ g$, $g\circ f$ y sus dominios.

b) f^{-1}, g^{-1} y sus dominios. (2 puntos)

2.- Representa gráficamente las siguientes funciones (sin utilizar tabla de valores) y escribe sus características:

a) $f(x)=\left|-x^2+2x\right|$ b) $g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$ (2,5 puntos)

3.- Representa gráficamente la función: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+2} & \text{si } x<0\\ 2^x & \text{si } 0\le x<2\\ x+2 & \text{si } x>2\end{cases}$

a) Escribe sus características.

b) Calcula: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

c) Estudia su continuidad. (1,5 puntos)

4.- Dibuja razonadamente una función que cumpla las siguientes condiciones:

a) Tiene asíntota vertical en x = 2 y asíntota horizontal en y = -1

b) Su Dominio es $R-\{0,2\}$

c) Corta al eje OX sólo en el punto (1,0) (1 punto)

5.- Dado el triángulo que tiene sus vértices en los puntos A=(1,4), B=(3,-2) y C=(-1,0). Calcula:

a) Su área.

b) Su perímetro.

c) El ángulo en C.

d) La ecuación de la mediatriz del lado AC. (2 puntos)

6.- Determina m y n sabiendo que la recta 2x+ny=0 pasa por el punto (1,2) y es paralela a la recta mx-2y+3=0. (1 punto)

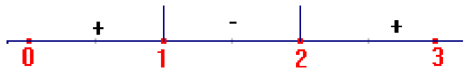
SOLUCIONES

1.- 1.- Dadas las funciones: $f(x)=\sqrt{x+1}$ y $g(x)=\dfrac{x}{x-2}$.

a) Calcula $f\circ g$, $g\circ f$ y sus dominios.

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)]=f\left(\frac{x}{x-2}\right)=\sqrt{\frac{x}{x-2}+1}=\sqrt{\frac{2x-2}{x-2}}$$

Dominio: $\dfrac{2x-2}{x-2}\geq 0\rightarrow$



$Dom(f\circ g)=(-\infty,1]\cup(2,+\infty)$

$$(g\circ f)(x)=g[f(x)]=g\left(\sqrt{x+1}\right)=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-2}=\frac{\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-2^2}=\frac{x+1+2\sqrt{x+1}}{x-3}$$

Dominio: tiene que ser $x+1\geq 0\rightarrow x\geq -1$, pero no puede ser x = 3 porque se anula el denominador. $Dom(g\circ f)=[-1,3)\cup(3,+\infty)$

b) f^{-1}, g^{-1} y sus dominios. $y=\sqrt{x+1}$ cambiamos: $x=\sqrt{y+1}$

despejamos $y\rightarrow x^2=\left(\sqrt{y+1}\right)^2\rightarrow x^2=y+1\rightarrow y=x^2-1\rightarrow f^{-1}(x)=x^2-1$

comprobamos: $\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=f\left[f^{-1}(x)\right]=f\left(x^2-1\right)=\sqrt{x^2-1+1}=\sqrt{x^2}=x$

$Dom(f^{-1})=R$, función polinómica

$y=\dfrac{x}{x-2}$ cambiamos: $x=\dfrac{y}{y-2}$, despejamos y $\rightarrow x(y-2)=y\rightarrow xy-2x=y$

$$xy-y=2x\rightarrow y(x-1)=2x\rightarrow y=\frac{2x}{x-1}\rightarrow g^{-1}(x)=\frac{2x}{x-1}$$

comprobamos: $\left(g\circ g^{-1}\right)(x)=g\left[g^{-1}(x)\right]=g\left(\dfrac{2x}{x-1}\right)=\dfrac{\frac{2x}{x-1}}{\frac{2x}{x-1}-2}=\dfrac{2x}{x-1}:\dfrac{2x-2(x-1)}{x-1}=$

$=\dfrac{2x(x-1)}{(x-1)\cdot 2}=x$ $Dom(g^{-1})=R-\{1\}$, función racional

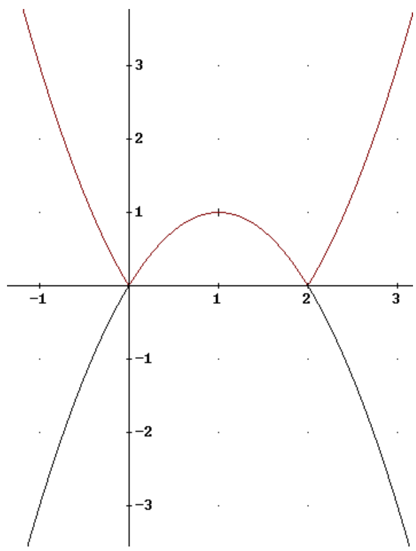
2.- a) $f(x)=\left|-x^2+2x\right|$ vamos a representar primero la parábola $y=-x^2+2x$

Mira hacia abajo. Vértice $x=-\dfrac{2}{-2}=1$

$V(1,1)$ Eje de simetría $x=1$

Corte ejes: eje OY: y=0

Eje OX: $-x^2+2x=0\rightarrow\begin{cases}x=0\\x=2\end{cases}$



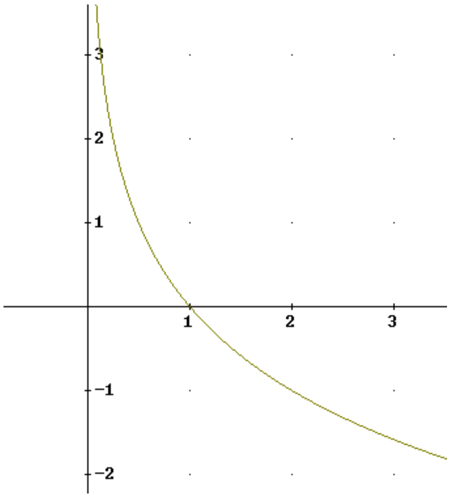
Haciendo el valor absoluto tenemos la gráfica pedida (en rojo)

Características: Dom = R ; Rec = $[0,+\infty)$ Continua en R

Máximo en $(1,1)$, Mínimos en (0,0) y (2,0).
Crecimiento: creciente en $(0,1)\cup(2,+\infty)$ y decreciente en $(-\infty,0)\cup(1,2)$

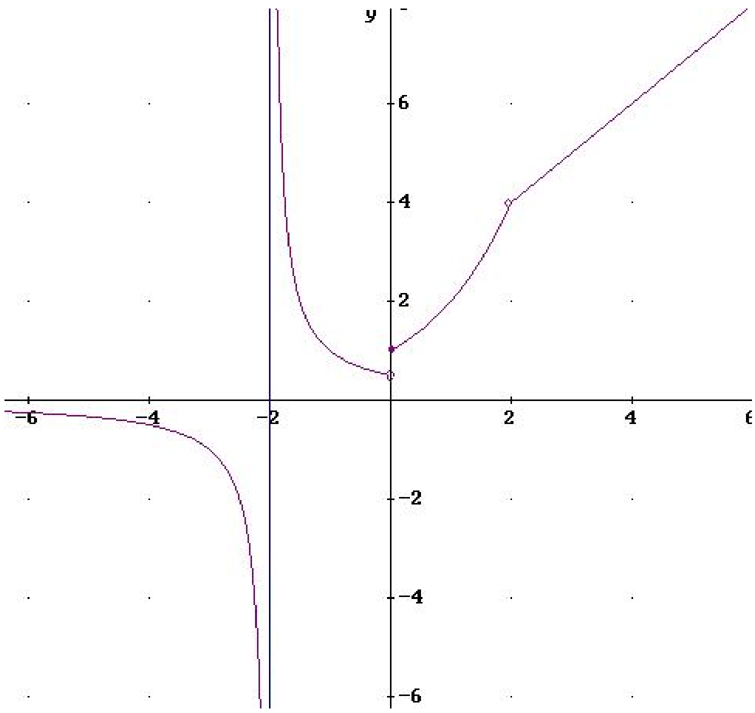
b) $g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$

Función logarítmica de base <1, luego es decreciente
Su dominio (como todo logaritmo) es $(0,+\infty)$
Asíntota vertical el eje OY.
Pasa por (1,0).
La dibujamos:



3.- a)

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x+2} & \text{si } x<0 \rightarrow \text{trozo de hipérbola AV } x=-2 \\ 2^x & \text{si } 0\le x<2 \rightarrow \text{trozo de exponencial de base } >1 \\ x+2 & \text{si } x>2 \rightarrow \text{semirrecta} \end{cases}$$



Características:
Dom = $R-\{-2,2\}$
Rec = $(-\infty,0)\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$
Asíntota vertical x = -2
Creciente en $(0,2)\cup(2,+\infty)$
Decreciente en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$

b) $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=4$, $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=4$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to1} f(x)=2$

c) Continuidad: tenemos "problemas" en la AV: x = -2 y en los puntos de enganche 0 y 2. Estudiaremos la continuidad en esos tres puntos, puesto que en el resto es continua.

En $x=-2$ $f(-2)=\text{no existe}$ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=+\infty\end{array}\right\}$ Discontinuidad de salto infinito

En x = 0 $\quad f(0)=1 \quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1 \end{array}\right\}$ Discontinuidad de salto finito

En x = 2 $\quad f(2)=\text{no existe} \quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=4 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=4 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$ Discontinuidad evitable

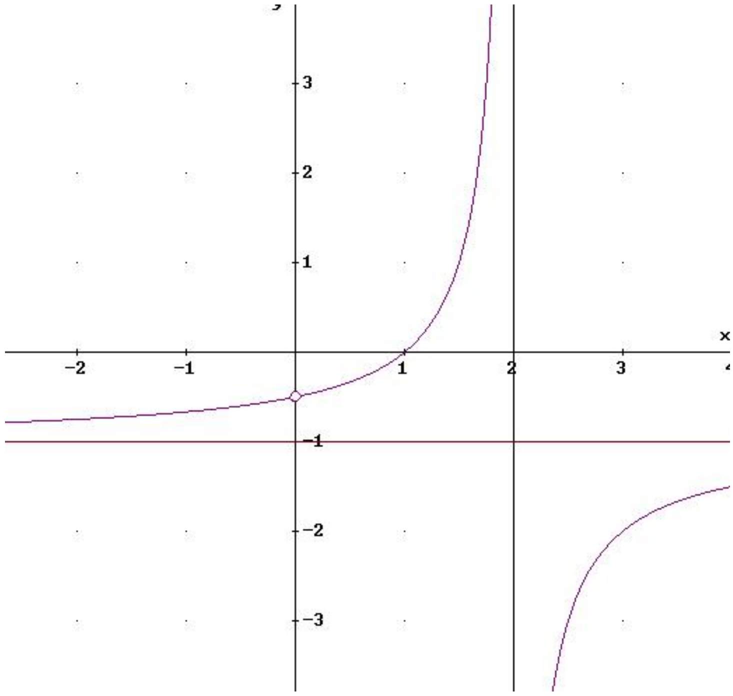
4.- Dibuja razonadamente una función que cumpla las siguientes condiciones:

a) Tiene asíntota vertical en x = 2 y asíntota horizontal en y = -1

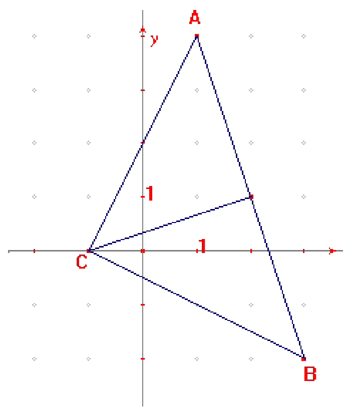
b) Su Dominio es $R-\{0,2\}$

c) Corta al eje OX sólo en el punto (1,0)

Una gráfica sería:



5.- Dado el triángulo que tiene sus vértices en los puntos A=(1,4), B=(3,-2) y C=(-1,0). Calcula:



a) Su área.

Necesitamos una base y la altura correspondiente, tomamos como base AB y la altura correspondiente será la distancia del punto C a la recta AB.

Empezamos hallando la ecuación de la recta AB:

Pendiente $m=\dfrac{-2-4}{3-1}=-3$ y punto A(1,4)

Ecuación punto-pendiente: $y=-3(x-1)+4$

$y=-3x+7 \to 3x+y-7=0$ es la recta AB

$$h=d(C,\overline{AB})=\frac{|3\cdot(-1)+0-7|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}u$$

$$b=d(A,B)=\sqrt{(3-1)^2+(-2-4)^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}u \to A=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{10\sqrt{40}}{2\sqrt{10}}=10\ u^2$$

b) Su perímetro.

$$c=d(A,B)=\sqrt{(3-1)^2+(-2-4)^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}\,u$$

$b = d(A,C) = \sqrt{(-1-1)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}\,u$

$a = d(B,C) = \sqrt{(-1-3)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}\,u$

$P = \sqrt{40} + \sqrt{20} + \sqrt{20} = 2\sqrt{10} + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 2\sqrt{10} + 4\sqrt{5}\,u$

c) El ángulo en C. Será el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ (α)

$\overrightarrow{CA} = (1+1, 4-0) = (2,4)$; $\overrightarrow{CB} = (3+1, -2-0) = (4,-2)$

$\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}|\cdot|\overrightarrow{CB}|} = \dfrac{2\cdot 4 + 4\cdot(-2)}{\sqrt{2^2+4^2}\cdot\sqrt{4^2+(-2)^2}} = 0 \rightarrow \alpha = 90^o$ Triángulo rectángulo

d) La ecuación de la mediatriz del lado AC. Punto medio M $\left(\dfrac{1-1}{2}, \dfrac{4+0}{2}\right) = (0,2)$

$\overrightarrow{AC} = (-2,-4) \perp (4,-2)$ mediatriz: $\dfrac{x-0}{4} = \dfrac{y-2}{-2} \rightarrow x + 2y - 4 = 0$

6.- Determina m y n sabiendo que la recta 2x+ny=0 pasa por el punto (1,2) y es paralela a la recta mx-2y+3=0.

2x+ny=0 pasa por el punto (1,2) $\rightarrow 2\cdot 1 + n\cdot 2 = 0 \Rightarrow 2n = -2 \Rightarrow n = -1$

luego, la primera recta es 2x-y = 0 $\rightarrow$ vector normal (2,-1)

la segunda recta es mx-2y+3=0 $\rightarrow$ vector normal (m, -2)

ambos vectores tienen que tener la misma dirección, es decir que $m = 4$