EXAMEN DE MATEMÁTICAS – 1º BACHILLERATO - RECUPERACIÓN
TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA – 18-V-09

1) Sabiendo que $\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{4}$, $\cos\beta = \frac{2}{3}$, $\alpha \in 1^{er}$ cuadrante, $\beta \in 4^{o}$ cuadrante, calcula:

$$\text{sen}(\alpha - \beta), \quad \cos(2\alpha) \quad \text{y} \quad \text{tag}(2\beta)$$

2) Sin hacer uso de la calculadora, resuelve un triángulo ABC (calcula sus lados, sus ángulos y su área), siendo:

$$\hat{A} = 45^\circ, \quad \hat{B} = 60^\circ \quad \text{y} \quad b = \sqrt{3}\ \text{cm}$$

(Si haces uso de la calculadora, este ejercicio se valorará con 1 punto)

3) Resuelve la siguiente ecuación:

$$2 \cdot \cos^2 x + 3 \cdot \text{sen}\,x - 3 = 0$$

4) Halla el simétrico del punto P(1, 2) respecto de la recta $r:\ 2x + y - 1 = 0$.

5) Dados los puntos A(-1,3), B(1,1) y C(-3,-2)
a) Halla la ecuación de la mediatriz del segmento AB.
b) Halla la ecuación de una recta que sea paralela a AB y pase por el punto C.

Puntuación: 2 puntos cada ejercicio

SOLUCIONES

1) $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{1}{4}$, $\cos\beta = \dfrac{2}{3}$, $\alpha \in 1^{er}$ cuadrante, $\beta \in 4^{o}$ cuadrante

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{4} \rightarrow \cos^2\alpha = 1-\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16} \rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

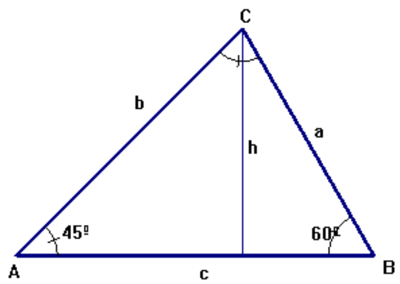
$$\cos\beta = \frac{2}{3} \rightarrow \text{sen}^2\beta = 1-\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} \rightarrow \text{sen}\,\beta = -\frac{\sqrt{5}}{3} \rightarrow \text{tg}\,\beta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{sen}(\alpha-\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\beta\cos\alpha = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{2+5\sqrt{3}}{12}$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = \frac{15}{16}-\frac{1}{16} = \frac{7}{8}$$

$$\text{tag}(2\beta) = \frac{2\text{tag}\beta}{1-\text{tag}^2\beta} = \frac{-\sqrt{5}}{1-\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{-\sqrt{5}}{1-\dfrac{5}{4}} = \frac{-4\sqrt{5}}{-1} = 4\sqrt{5}$$

2) $\hat{A} = 45^{\circ}$, $\hat{B} = 60^{\circ}$ y $b = \sqrt{3}$ cm



$\hat{C} = 180-(45+60) = 75^{o}$

Teorema del seno:

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} \rightarrow a = \frac{\sqrt{3}\cdot\text{sen}45^{o}}{\text{sen}60^{o}}$$

$$a = \frac{\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{2}\,\text{cm}$$

$$\text{sen}75^{o} = \text{sen}(45+30) = \text{sen}45\cos30+\text{sen}30\cos45 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{c}{\text{sen}C} = \frac{b}{\text{sen}B} \rightarrow c = \frac{\sqrt{3}\cdot\text{sen}75^{o}}{\text{sen}60^{o}} = \frac{\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\ \text{cm}$$

Área: Hallamos primero la altura h: $\text{sen}45 = \dfrac{h}{b} \rightarrow h = \sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ cm

$$A = \frac{c\cdot h}{2} = \frac{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{2}}{2} = \frac{6+2\sqrt{3}}{8} = \frac{3+\sqrt{3}}{4}\text{cm}^2$$

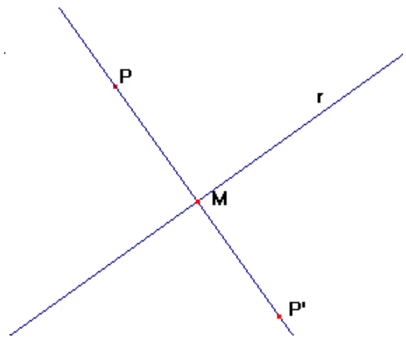
3) $2\cdot\cos^2x+3\cdot\text{sen}\,x-3=0 \rightarrow 2(1-\text{sen}^2x)+3\text{sen}\,x-3=0 \rightarrow -2\text{sen}^2x+3\text{sen}\,x-1=0$

$$\text{sen}\,x = \frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{-4} = \begin{cases} \dfrac{-2}{-4} = \dfrac{1}{2} \rightarrow x = \begin{cases} 30^{o}+360^{o}k \\ 150^{o}+360^{o}k \end{cases} \\ \dfrac{-4}{-4} = 1 \rightarrow x = 90^{o}+360^{o}k \end{cases} \quad k\in Z$$

4) Halla el simétrico del punto P(1, 2) respecto de la recta $r:\ 2x+y-1=0$.

Hallaremos primero la ecuación de la recta perpendicular a r, pasando por P:

Vector director de $r \to (-1,2)$, vector perpendicular $\to (2,1)$



Recta perpendicular:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}\to x-1=2y-4\to x-2y+3=0$$

Resolvemos ahora el sistema formado por las dos rectas, para hallar su punto de corte M:

$$\left.\begin{array}{l}2x+y-1=0\\ x-2y+3=0\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{l}4x+2y-2=0\\ x-2y+3=0\end{array}\right\}\to 5x+1=0\to x=-\frac{1}{5}$$

$$-\frac{2}{5}+y-1=0\to y=1+\frac{2}{5}=\frac{7}{5}\Rightarrow M\left(-\frac{1}{5},\frac{7}{5}\right)$$

M es el punto medio del segmento PP', luego, si P'(a,b):

$$\frac{1+a}{2}=-\frac{1}{5}\to 5+5a=-2\to a=-\frac{7}{5}$$

$$\frac{2+b}{2}=\frac{7}{5}\to 10+5b=14\to b=\frac{4}{5}$$

Punto simétrico: $P'\left(-\frac{7}{5},\frac{4}{5}\right)$

5) Dados los puntos A(-1,3), B(1,1) y C(-3,-2)

a) Halla la ecuación de la mediatriz del segmento AB.

Punto medio de AB: $M\left(\frac{-1+1}{2},\frac{3+1}{2}\right)=(0,2)$, dirección AB: $\vec{d}=(1,1)-(-1,3)=(2,-2)$

Vector perpendicular (la mediatriz es perpendicular por el punto medio): (1,1)

Ecuación de la mediatriz: $\frac{x-0}{1}=\frac{y-2}{1}\to x-y+2=0$

b) Halla la ecuación de una recta que sea paralela a AB y pase por el punto C.

dirección AB: $\vec{d}=(1,1)-(-1,3)=(2,-2)$, punto C(-3,-2)

$$\frac{x+3}{2}=\frac{y+2}{-2}\to x+3=-y-2\to x+y+5=0$$