CONTROL TRIGONOMETRÍA **diciembre 2008**

1. Resuelve las siguientes ecuaciones: (1,5 puntos)

a) $\left|x^2 - 3x\right| = 4$

b) $\dfrac{x-1}{x^2-x} - \dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{1}{2(x+1)}$

c) $9^x - 3^x = 6$

2. Resuelve los sistemas de ecuaciones: (1,5 puntos)

a) $\left.\begin{array}{l} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} 2\log x + \log y = 1 \\ \log x = 2\log y + 3 \end{array}\right\}$

3. Sabiendo que $tg\,\alpha = -3$ y que $\alpha > \pi$ halla las restantes razones trigonométricas de α. (expresándolas con fracciones y radicales) (1,5 puntos)

4. Resuelve la ecuación: $\cos^2 x - sen^2 x = 1 + 4 sen x$ (1,25 puntos)

5. Observamos el punto más alto de una torre bajo un ángulo de 64º sobre la horizontal. Si nos alejamos 150 metros, lo vemos bajo un ángulo de 33º. ¿A qué altura se encuentra la torre? (1,5 puntos)

6. Comprueba la identidad: (1,25 puntos)

$$\frac{tg\,x}{1+\sec x} = \frac{1-\cos x}{sen\,x}$$

7. Un triángulo isósceles tiene 8 cm de base y el ángulo adyacente es de 50º . Halla su perímetro y su área. (1,5 puntos)

SOLUCIONES

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\left|x^2-3x\right|=4 \rightarrow \begin{cases} x^2-3x=4 \Rightarrow x^2-3x-4=0 \rightarrow x=\left\langle\begin{matrix}-1\\4\end{matrix}\right. \\ x^2-3x=-4 \Rightarrow x^2-3x+4=0 \rightarrow \text{no tiene solución} \end{cases}$

b) $\dfrac{x-1}{x^2-x}-\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{1}{2(x+1)} \rightarrow \text{m.c.m.}=2x(x+1)(x-1)$

$$\frac{x-1}{x^2-x}-\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2(x+1)} \Rightarrow \frac{2(x+1)-2x}{2x(x+1)(x-1)}=\frac{x(x-1)}{2x(x+1)(x-1)}$$

$2x+2-2x=x^2-x \rightarrow x^2-x-2=0 \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-1 \end{cases}$ Comprobando, solo es válida x =2

c) $9^x-3^x=6 \rightarrow 3^{2x}-3^3-6=0$, hacemos el cambio $t=3^x$ y tenemos:

$t^2-t-6=0 \Rightarrow \begin{cases} t=3 \rightarrow 3^x=3 \Rightarrow x=1 \\ t=-2 \rightarrow 3^x=-2 \text{ imposible} \end{cases}$ solución x = 1

2. Resuelve los sistemas de ecuaciones:

a) $\left.\begin{matrix} y^2-2y+1=x \\ \sqrt{x}+y=5 \end{matrix}\right\}$ sustituimos x en la segunda ecuación $\sqrt{y^2-2y+1}+y=5$

$$\sqrt{y^2-2y+1}=5-y \Rightarrow \left(\sqrt{y^2-2y+1}\right)^2=(5-y)^2 \Rightarrow y^2-2y+1=25-10y+y^2$$

$8y+1=25 \Rightarrow 8y=24 \Rightarrow y=3$ comprobamos: $\sqrt{3^2-2\cdot 3+1}=5-3 \rightarrow \sqrt{4}=2$ si

hallamos x: $x=y^2-2y+1 \Rightarrow x=3^2-2\cdot 3+1=4$,solución del sistema: x = 4, y = 3

b) $\left.\begin{matrix} 2\log x+\log y=1 \\ \log x=2\log y+3 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} \log x^2+\log y=\log 10 \\ \log x-\log y^2=\log 1000 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} \log(x^2y)=\log 10 \\ \log\dfrac{x}{y^2}=\log 1000 \end{matrix}\right\}$

$$\left.\begin{matrix} x^2y=10 \\ \dfrac{x}{y^2}=1000 \end{matrix}\right\} \rightarrow x=1000y^2 \rightarrow \left(1000y^2\right)^2y=10 \rightarrow y^5=\frac{10}{1000000} \rightarrow y=\frac{1}{10}$$

hallamos x: $x=1000y^2=1000\cdot\dfrac{1}{100}=10$ Solución: $x=10;\ y=\dfrac{1}{10}$

3. Sabiendo que $\text{tg}\,\alpha = -3$ y que $\alpha > \pi$ halla las restantes razones trigonométricas de α. Tangente negativa, el ángulo podría estar en el segundo o en el cuarto cuadrante, como es mayor de 180º está en el cuarto cuadrante, es decir seno negativo y coseno positivo. Vamos a calcular las razones del ángulo:

$$1+\text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \to 1+9 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \to \cos^2\alpha = \frac{1}{10} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \text{tg}\,\alpha\cdot\cos\alpha = -3\cdot\frac{\sqrt{10}}{10} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha} = -\frac{10}{3\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{3};\quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10};\quad \cot\alpha = -\frac{1}{3}$$

4. $\cos^2 x - \text{sen}^2 x = 1+4\text{sen}x \to 1-\text{sen}^2 x - \text{sen}^2 x = 1+4\text{sen}x$

$$2\text{sen}^2 x + 4\text{sen}\,x = 0 \Rightarrow \text{sen}\,x(2\text{sen}\,x+4) = 0 \to \left\langle \begin{array}{l} \text{sen}\,x = 0 \\ 2\text{sen}\,x + 4 = 0 \end{array}\right.$$

$$x = \text{arcsen}(0) = \left\langle \begin{array}{l} 0^\circ + 360^\circ k \\ 180^\circ + 360^\circ k \end{array}\right. \quad k \in Z$$

$x = \text{arcsen}(-2)$ imposible

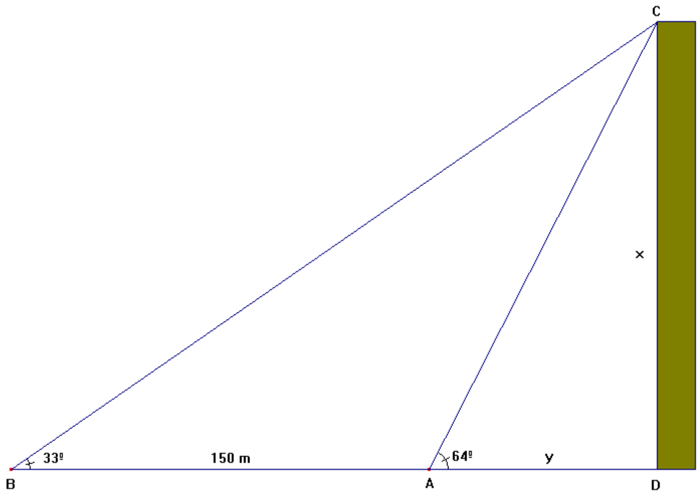
5. Tenemos dos triángulos rectángulos, plantearemos un sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg}\,64^\circ = \dfrac{x}{y} \\ \text{tg}\,33^\circ = \dfrac{x}{y+150} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2{,}05y = x \\ 0{,}649(y+150) = x \end{array}\right\}$$

$$2{,}05y = 0{,}649y + 97{,}35$$

$$1{,}401y = 97{,}35 \to y = 69{,}49$$



$x = 2{,}05y = 2{,}05 \times 59{,}49 = 142{,}45$ m mide la torre

6. Comprueba la identidad: $\dfrac{\text{tg}\,x}{1+\sec x} = \dfrac{1-\cos x}{\text{sen}x}$

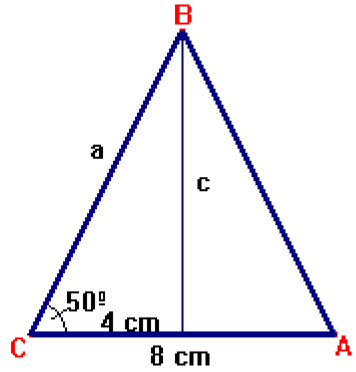
$$\text{tg}\,x\cdot\text{sen}x = (1+\sec x)(1-\cos x) \to \frac{\text{sen}x}{\cos x}\cdot\text{sen}x = 1-\cos x+\sec x-\sec x\cdot\cos x$$

$$\frac{\text{sen}^2 x}{\cos x} = 1-\cos x+\frac{1}{\cos x}-1 \to \frac{\text{sen}^2 x}{\cos x} = \frac{-\cos^2 x+1}{\cos x} \to \text{sen}^2 x = 1-\cos^2 x$$

7. Un triángulo isósceles tiene 8 cm de base y el ángulo adyacente es de 50° . Halla su perímetro y su área.

Se forman dos triángulos rectángulos, de ángulos agudos 50° y 40° (complementario) , y un cateto de 4 cm

$$\cos 50^{\circ} = \frac{4}{a} \Rightarrow a = \frac{4}{\cos 50^{\circ}} = 6{,}22\text{cm}$$



También necesitamos la altura c, para hallar el área:

$$tg 50^{\circ} = \frac{c}{4} \Rightarrow c = 4tg 50^{\circ} = 4{,}77\text{cm}$$

Perímetro: $P = 8 + 2 \cdot 6{,}22 = 20{,}44\text{cm}$

Área: $A = \dfrac{8 \cdot 4.77}{2} = 19{,}08\text{cm}^2$