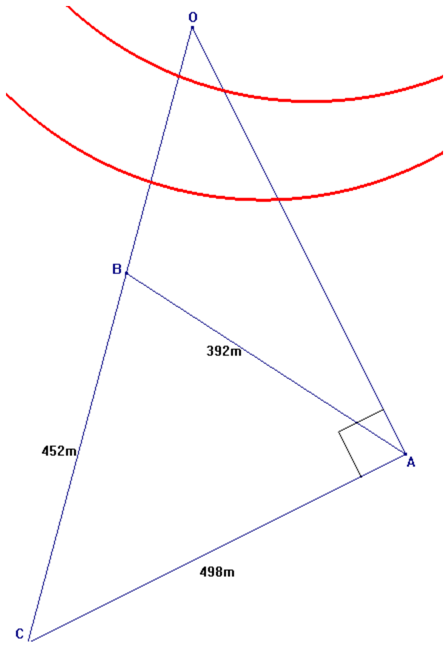
RECUPERACIÓN TRIGONOMETRÍA

1.- Dibuja en la circunferencia goniométrica el ángulo a tal que sen a = -1/3 con $180^\circ < a < 270^\circ$.
Si además conocemos sec b = -2 con $90^\circ < b < 180^\circ$. Sin utilizar la calculadora, halla: sen (a - b), cos(a + b), tg 2a y cotg(b/2) (2,5 puntos)

2.-Sabiendo que a es un ángulo del tercer cuadrante cuyo coseno es -2/3.
Calcula sin utilizar la calculadora y utilizando las fórmulas: tg 4a
(2 puntos)

3.- Para calcular la distancia desde dos puntos A y B a otro punto O situado al otro lado del río, se han hecho las medidas que se indican en el dibujo adjunto. Calcula las distancias OA y OB. (2 puntos)



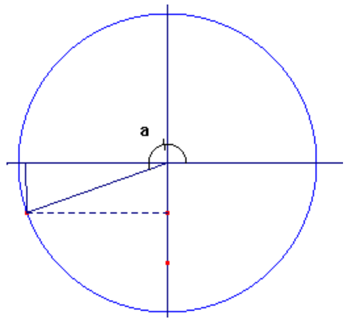
4.- Comprueba la identidad:

$$tg^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2sen\,x - sen\,2x}{2sen\,x + sen\,2x}$$ (1,75 puntos)

5.- Resuelve la ecuación: $\cos x \cdot \cos 2x + 2\cos^2 x = 0$ (1,75 puntos)

SOLUCIONES

1.- Dibuja en la circunferencia goniométrica el ángulo a tal que sen a = -1/3 con $180^\circ < a < 270^\circ$. Hallamos el coseno y la tangente:



$$\text{sen}^2 a+\cos^2 a=1\rightarrow \cos^2 a=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$

$$\cos a=\sqrt{\frac{8}{9}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}\rightarrow \text{tg }a=\frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

sec b = -2 con $90^\circ < b < 180^\circ \rightarrow \cos b=-\frac{1}{2}$

$$\text{sen}^2 b+\cos^2 b=1\rightarrow \text{sen}^2 b=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\rightarrow \text{sen }b=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\rightarrow \text{tg }b=-\sqrt{3}$$

$$\text{sen}(a-b)=\text{sen }a\cos b-\text{sen }b\cos a=-\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{1+2\sqrt{6}}{6}$$

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\text{sen }a\text{ sen }b=-\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{tg }2a=\frac{2\text{tg }a}{1-\text{tg}^2 a}=\frac{2\frac{\sqrt{2}}{4}}{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{\sqrt{2}}{2}:\frac{7}{8}=\frac{4\sqrt{2}}{7}$$

$$\cot\left(\frac{b}{2}\right)=\frac{1}{\text{tg}\frac{b}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos b}{1-\cos b}}=+\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\quad\text{(primer cuadrante)}$$

2.- a es un ángulo del tercer cuadrante cuyo coseno es -2/3 necesitamos la tangente de a:

$$1+\text{tg}^2 a=\frac{1}{\cos^2 a}\rightarrow \text{tg}^2 a=\frac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}-1=\frac{9}{4}-1=\frac{5}{4}\rightarrow \text{tg }a=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

y también necesitamos la tangente de 2a:

$$\text{tg }2a=\frac{2\text{tg }a}{1-\text{tg}^2 a}=\frac{2\frac{\sqrt{5}}{2}}{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{1-\frac{5}{4}}=\sqrt{5}:\left(-\frac{1}{5}\right)=-5\sqrt{5}$$

$$\text{tg }4a=\text{tg}(2a+2a)=\frac{\text{tg }2a+\text{tg }2a}{1-\text{tg }2a\cdot\text{tg }2a}=\frac{2\text{tg }2a}{1-\text{tg}^2 2a}=\frac{2\left(-5\sqrt{5}\right)}{1-\left(-5\sqrt{5}\right)^2}=\frac{-10\sqrt{5}}{-125}=\frac{2\sqrt{5}}{25}$$

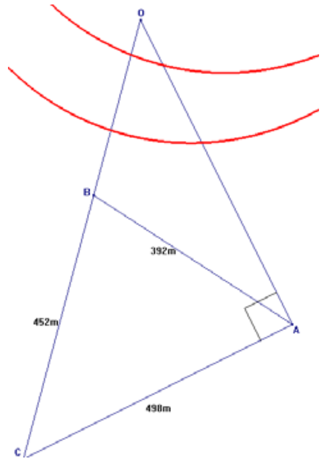
3.- En el triángulo OAB, necesitamos algún ángulo, para ello vamos a utilizar el teorema del coseno en el triángulo ABC:

$$498^2 = 392^2 + 452^2 - 2\cdot 392\cdot 452\cdot \cos A\hat{B}C$$

$$2\cdot 392\cdot 452\cdot \cos A\hat{B}C = 392^2 + 452^2 - 498^2$$

$$\cos A\hat{B}C = \frac{392^2 + 452^2 - 498^2}{2\cdot 392\cdot 452} = 0{,}3103 \rightarrow A\hat{B}C \approx 72^\circ$$

$$O\hat{B}A = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$$



Hallemos ahora el ángulo $B\hat{A}C \rightarrow$ teorema de los senos:

$$\frac{452}{\operatorname{sen} B\hat{A}C} = \frac{498}{\operatorname{sen} 72^\circ} \rightarrow \operatorname{sen} B\hat{A}C = \frac{452 \operatorname{sen} 72}{498} \rightarrow B\hat{A}C \approx 59^\circ 40'$$

luego, el ángulo $B\hat{A}O = 90^\circ - 59^\circ 40' = 30^\circ 20'$

Ya podemos hallar el ángulo en O = $180^\circ - 108^\circ - 30^\circ 20' = 41^\circ 40'$

Ahora, aplicando el teorema de los senos en el triángulo OAB, tendremos las distancias pedidas: $\frac{392}{\operatorname{sen} 41^\circ 40'} = \frac{OB}{\operatorname{sen} 30^\circ 20'} = \frac{OA}{\operatorname{sen} 108^\circ}$

$$OB = \frac{392 \operatorname{sen} 30^\circ 20'}{\operatorname{sen} 41^\circ 40'} = 297{,}79\text{m} \qquad OA = \frac{392 \operatorname{sen} 108^\circ}{\operatorname{sen} 41^\circ 40'} = 560{,}79\text{m}$$

4.- $$\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x}{2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x} \rightarrow \left(\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)^2 = \frac{2\operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen} x \cos x}{2\operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen} x \cos x}$$

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \frac{2\operatorname{sen} x(1-\cos x)}{2\operatorname{sen} x(1+\cos x)} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

5.- $$\cos x \cdot \cos 2x + 2\cos^2 x = 0 \rightarrow \cos x\left(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\right) + 2\cos^2 x = 0$$

$$\cos^3 x - \cos x \cdot \operatorname{sen}^2 x + 2\cos^2 x = 0 \rightarrow \cos^3 x - \cos x(1-\cos^2 x) + 2\cos^2 x = 0$$

$$\cos^3 x - \cos x + \cos^3 x + 2\cos^2 x = 0 \rightarrow 2\cos^3 x + 2\cos^2 x - \cos x = 0 \rightarrow$$

$$\cos x\left(2\cos^2 x + 2\cos x - 1\right) = 0 \rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 90^\circ + 360^\circ k \\ x_2 = 270^\circ + 360^\circ k \end{cases} \quad k \in Z \\ 2\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0 \\ x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{4} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_3 = 68^\circ 32' + 360k \\ x_4 = 291^\circ 28' + 360k \end{cases} \end{cases}$$