EXAMEN GLOBAL TRIGONOMETRÍA

1.- Sean a y b dos ángulos tales que $\cos a = \frac{2}{3}$ siendo $\frac{3\pi}{2} < a < 2\pi$ y $\operatorname{tg} b = \frac{3}{4}$ siendo $\pi < b < \frac{3\pi}{2}$. Halla, sin utilizar la calculadora:

$\operatorname{sen}(a+b),\ \cos(a-b),\ \operatorname{tg}\frac{a}{2},\ \cot(2b)$ (2 puntos)

2.- Resuelve la ecuación:

$\cos 2x = 1 + 4\operatorname{sen} x$ (1,25 puntos)

3.- La longitud del lado de un octógono regular es de 8 m. Halla los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita. (1,5 puntos)

4.- Expresa cos 3a en función de sen a y cos a. (1,5 puntos)

5.- Comprueba la identidad:

$\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{sen}^2 x$ (1,5 puntos)

6.- Halla el valor de la expresión siguiente sin utilizar la calculadora y escribiendo todos los valores en forma de fracción:

$$\frac{\operatorname{sen} 330^\circ + \operatorname{tg} 2\pi - \cos\frac{5\pi}{4} + \operatorname{sen} 45^\circ}{\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} - \sqrt{2}\cos 135^\circ}$$ (1 punto)

7.- Opera y simplifica: (1,25 puntos)

a) $(1+i)^2 - (2+i)(1-2i) =$

b) $\frac{3+i}{-1+2i} =$

SOLUCIONES

1.- $\cos a = \frac{2}{3}$ siendo $\frac{3\pi}{2} < a < 2\pi \to sen^2 a = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} \to$ $sen\, a = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

$tg\, b = \frac{3}{4}$ siendo $\pi < b < \frac{3\pi}{2} \to \frac{1}{\cos^2 b} = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \to \cos b = -\frac{4}{5}$, $sen\, b = -\frac{3}{5}$

$$sen(a+b) = sen\, a \cos b + \cos a\, sen\, b = -\frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{4\sqrt{5}-6}{15}$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + sen\, a\, sen\, b = \frac{2}{3}\left(-\frac{4}{5}\right) + \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{3\sqrt{5}-8}{15}$$

$tg\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}} = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}}} = \pm\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ (a es del cuarto cuadrante, luego su mitad está en el segundo cuadrante, tangente negativa)

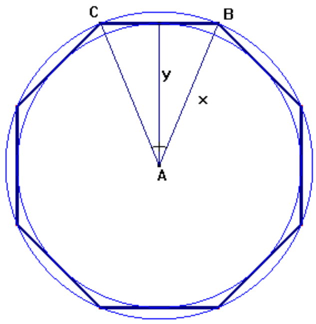
$$\cot(2b) = \frac{1}{tg\, 2b} = \frac{1-tg^2 b}{2tg\, b} = \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}{2 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{1-\frac{9}{16}}{\frac{3}{2}} = \frac{7}{16} : \frac{3}{2} = \frac{7}{24}$$

2.- $\cos 2x = 1 + 4senx \to \cos^2 x - sen^2 x = 1 + 4sen\, x \to 1 - 2sen^2 x = 1 + 4sen\, x$

$$2sen^2 x + 4senx = 0 \Rightarrow 2sen\, x(sen\, x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2sen\, x = 0 \Rightarrow sen\, x = 0 \\ sen\, x + 2 = 0 \Rightarrow sen\, x = -2 \end{cases}$$

lo segundo es imposible, luego la solución es:

$$x = arcsen\, 0 = \begin{cases} x = 0^\circ + 360^\circ k \\ x = 180^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$



3.- Triángulo ABC (isósceles), el lado x es el de la circunferencia circunscrita y la altura y es el radio de la circunferencia inscrita:

Ángulo en A: $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$, Lado BC = 8 m

Ángulos B y C: $\frac{180-45}{2} = 67^\circ 30'$

Teorema del seno: $\frac{BC}{sen\, 45^\circ} = \frac{x}{sen\, 67^\circ 30'} \to x = \frac{8 \cdot sen\, 67^\circ 30'}{sen\, 45^\circ} = 10{,}45m$

Como la mitad del triángulo ABC es un triángulo rectángulo, podemos hacer:

$tg\, 67^\circ 30' = \frac{y}{4} \Rightarrow y = 4 \cdot tg\, 67^\circ 30' = 9{,}66m$

4.- $\cos 3a = \cos(a+2a) = \cos a \cos 2a - sen\, a\, sen\, 2a = \cos a\left(\cos^2 a - sen^2 a\right) -$
$- sen\, a(2sen\, a \cos a) = \cos^3 a - \cos a\, sen^2 a - 2sen^2 a \cos a = \cos^3 a - 3sen^2 a \cos a$

5.- $$\frac{\text{sen}\,330^{o}+\text{tg}\,2\pi-\cos\frac{5\pi}{4}+\text{sen}\,45^{o}}{\text{sen}\frac{2\pi}{3}-\sqrt{2}\cos 135^{o}}=\frac{-\frac{1}{2}+0-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\frac{\frac{2\sqrt{2}-1}{2}}{\frac{\sqrt{3}+2}{2}}=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}+2}=\frac{\left(2\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{3}-2\right)}{\left(\sqrt{3}+2\right)\left(\sqrt{3}-2\right)}=\frac{2\sqrt{6}-4\sqrt{2}-\sqrt{3}+2}{3-4}=-2\sqrt{6}+4\sqrt{2}+\sqrt{3}-2$$

6.- $$\text{tg}^2x-\text{sen}^2x=\text{tg}^2x\cdot\text{sen}^2x\rightarrow\frac{\text{sen}^2x}{\cos^2x}\cdot\text{sen}^2x=\frac{\text{sen}^4x}{\cos^2x}$$

$\downarrow$

$$\frac{\text{sen}^2x}{\cos^2x}-\text{sen}^2x=\frac{\text{sen}^2x-\text{sen}^2x\cdot\cos^2x}{\cos^2x}=\frac{\text{sen}^2x(1-\cos^2x)}{\cos^2x}=\frac{\text{sen}^4x}{\cos^2x}$$

7.- a) $(1+i)^2-(2+i)(1-2i)=1+i^2+2i-2+4i-i+2i^2=$

$=1-1+2i-2+4i-i-2=-4+5i$

b) $$\frac{3+i}{-1+2i}=\frac{(3+i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)}=\frac{-3-6i-i-2i^2}{(-1)^2-(2i)^2}=\frac{-1-7i}{1+4}=-\frac{1}{5}-\frac{7}{5}i$$