

SOLUCIONES

Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. No usar bolígrafo rojo.

Nota ortografía, caligrafía y sintaxis (0 a 4)

Todas las preguntas puntúan igual.

Nota lenguaje matemático (0 a 4)

Nota limpieza y orden (0 a 4)

1. Calcular razonadamente, indicando todos los pasos necesarios:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4}{2^x + 1}$ $\frac{\infty}{\infty}$ $\approx$ $\frac{x^2}{2^x}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2^x} = 0$ p.q. $2^x > x^2$ si $x \rightarrow \infty$

0,1/ 0,1/ 0,2/

TOTAL: 0,5

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right)$ $\frac{\infty}{\infty}$ $\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{1}{x-2} - \frac{4}{(x+2)(x-2)} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2) - 4}{(x+2)(x-2)} =$

$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$

0,1/ 0,1/ 0,1/ 0,1/ 0,1/

TOTAL: 1

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x+2} - 2}$ $\frac{0}{0}$ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-4) \cdot (\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-4)(\sqrt{x+2}+2)}{x+2-4} =$

$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{x-2} = 4 \cdot 4 = 16$

0,1/ 0,1/ 0,1/ 0,2/ 0,5/

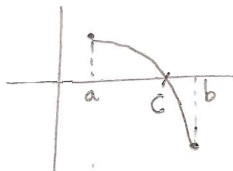
nota: se baja 0,1 por cada fallo de omisión de paréntesis

TOTAL: 1

2. a) Enunciar el teorema de Bolzano.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \text{ continua } \forall x \in [a,b] \\ \text{sgn } f(a) \neq \text{sgn } f(b) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in (a,b) / f(c) = 0$$

TOTAL: 0,5



b) Demostrar que $f(x)=|x^2-4|$ y $g(x)=\ln x$ se cortan al menos en un punto del intervalo (2,3)

se analiza en ± 2

$$f(x) = |x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \leq -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

intervalo (2,3)

TOTAL: 1,5

- Vamos que en el intervalo (2,3), $f(x)=|x^2-4|$ toma la expresión $f(x)=x^2-4$ (como puede verse en la gráfica interior)
- Por otra parte, si $f(x)$ y $g(x)$ se cortan, entonces $f(x)=g(x) \Rightarrow f(x)-g(x)=0$
 $\Rightarrow h(x)=x^2-4-\ln x$ le aplicamos el th. de Bolzano:

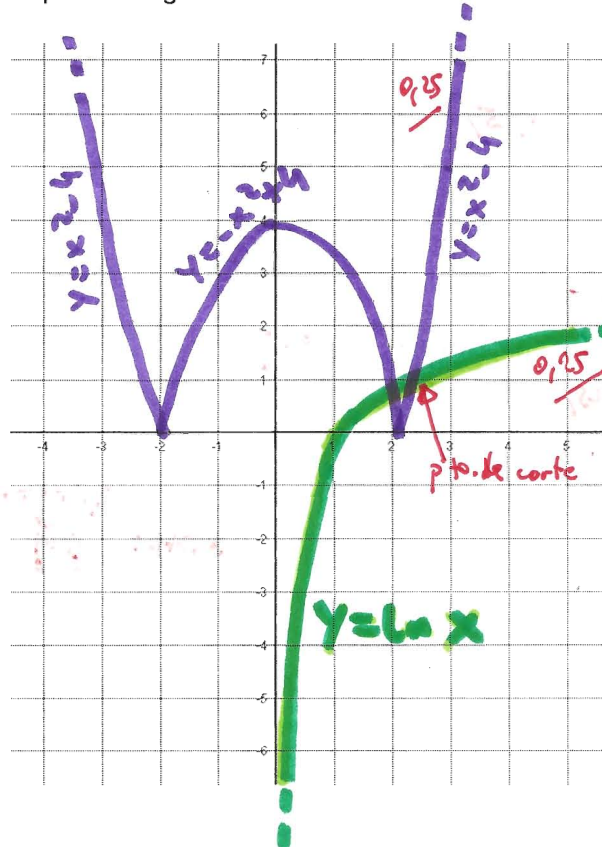
$$h(x) = x^2 - 4 - \ln x \text{ continua } \forall x \in (2,3), \text{ por ser resta de un polinomio y un logaritmo, ambos continuos} \Rightarrow \exists c \in (2,3) / h(c) = 0$$

$$h(2) = -\ln 2 < 0$$

$$h(3) = 5 - \ln 3 > 0$$

se baja 0,5 si se nombra mal

c) Representar gráficamente la situación.



	... -4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4 ...
$x^2 - 4$	... 12	5						5	12 ...
$-x^2 + 4$			0	3	4	3	0		

NOTA: Se baja 0,1 pts. si no se adjunta una tabla de valores y/o una explicación para dibujar f(x)

Vemos que, efectivamente, en (2,3) ambas curvas se cortan.

TOTAL: 0,5

3. a) Derivar y simplificar:

$$y = \operatorname{arctg} \frac{x^2+1}{x^2-1} \xrightarrow[\frac{u'}{1+u^2}]{\operatorname{arctg} u} y' = \frac{\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)' \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2}}{\frac{2x(x^2-1) - 2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2 + (x^2+1)^2} = \frac{-4x}{x^4 - 2x^2 + 1 + x^4 + 2x^2 + 1} = \frac{-4x}{2x^4 + 2} = \boxed{\frac{-2x}{x^4 + 1}}$$

0,1/ 0,1/ 0,1/ 0,25/ TOTAL: 0,75

b) Ídem:

$$y = (x+2) \ln(x+2) \xrightarrow{u \cdot v} y' = \ln(x+2) + (x+2) \cdot \frac{1}{x+2} = \boxed{1 + \ln(x+2)}$$

0,25/ 0,25/ TOTAL: 0,5

c) Derivar implícitamente:

$$xy^2 + x^2y - \frac{1}{x} + y = 5 \xrightarrow[\text{implícita}]{\text{derivación}} y^2 + x \cdot 2y y' + 2xy + x^2 \cdot y' + \frac{1}{x^2} + y' = 0$$

Multipliquemos ambos miembros por x^2 : $x^2y^2 + 2x^3y y' + 2x^3y + x^4y' + 1 + x^2y' = 0$

$$(2x^3y + x^4 + x^2) \cdot y' = -x^2y^2 - 2x^3y - 1$$

$$y' = \frac{-x^2y^2 - 2x^3y - 1}{2x^3y + x^4 + x^2}$$

0,2/ 0,1/ 0,1/ 0,25/ TOTAL: 0,75

d) Derivar logarítmicamente:

$$y = x^{x^2} \quad \text{I) } \ln y = \ln x^{x^2} = x^2 \cdot \ln x$$

$$\text{II) } \frac{y'}{y} = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$$

$$\text{III) } y' = x \cdot x^{x^2} (1 + 2 \ln x) = \boxed{x^{x^2+1} \cdot (1 + 2 \ln x)}$$

0,1/ 0,1/ 0,1/ 0,25/ TOTAL: 0,5

4. Dada

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & x \leq 0 \\ x^3 + a & 0 < x < 1 \\ \frac{b}{2x} & x \geq 1 \end{cases}$$

a) Hallar a y b para que sea siempre continua.

CONTINUA en $x=0$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \cos x = 1 \quad 0,1/ \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 + a) = a \quad 0,4/ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{continua}} a = 1 \quad 0,3/$$

TOTAL: 1

CONTINUA en $x=1$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^3 + a) = 1 + a = 2 \quad 0,1/ \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{b}{2x} = \frac{b}{2} \quad 0,1/ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{continua}} \frac{b}{2} = 2 ; b = 4 \quad 0,3/$$

b) Para esos valores, estudiar su derivabilidad.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & x \leq 0 \\ x^3 + 1 & 0 < x < 1 \\ \frac{2}{x} & x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -\sin x & x \leq 0 \\ 3x^2 & 0 < x < 1 \\ -\frac{2}{x^2} & x \geq 1 \end{cases}$$

¿DERIVABLE en $x=0$?

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = (\cos x)'_{x=0} = -\sin x \Big|_{x=0} = 0 \quad 0,2/ \\ f'(0^+) = (x^3 + 1)'_{x=0} = 3x^2 \Big|_{x=0} = 0 \quad 0,2/ \end{array} \right\} \Rightarrow \exists f'(0) \quad 0,2/$$

TOTAL: 1,5

¿DERIVABLE en $x=1$?

$$\left. \begin{array}{l} f'(1^-) = (x^3 + 1)'_{x=1} = 3x^2 \Big|_{x=1} = 3 \quad 0,2/ \\ f'(1^+) = \left(\frac{2}{x}\right)'_{x=1} = -\frac{2}{x^2} \Big|_{x=1} = -2 \quad 0,2/ \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists f'(1) \quad 0,2/$$

Soluc: f(x) derivable $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$ 0,3/