

Alumno/a: SOLUCIONES

1. Calcular:

Calcular:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x+1}{x-1} - \frac{2x-1}{x^2-1} \right)$

Handwritten solution:

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x+1)(x+1) - (2x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 3x + x + 1 - 2x + 1}{(x+1)(x-1)} =$ (1 punto)

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 2x + 2}{(x+1)(x-1)} \stackrel{7/0}{=} \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 + 2x + 2}{(x+1)(x-1)} = \frac{7}{2 \cdot 0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2 + 2x + 2}{(x+1)(x-1)} = \frac{7}{2 \cdot 0^+} = \infty \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x)}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{x-1} - \frac{2x-1}{x^2-1} \right) \triangleq \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{x} - \frac{2x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{2}{x} \right) = \boxed{3}$ (0,5 puntos)

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 + 2x} - \sqrt{x}}{2}$$

Resolviendo: las ctes. multiplicativas pueden salir del límite

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^4 + 2x} - \sqrt{x})(\sqrt{x^4 + 2x} + \sqrt{x})}{\sqrt{x^4 + 2x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x - x}{\sqrt{x^4 + 2x} + \sqrt{x}} = (1 \text{ punto})$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + x}{\sqrt{x^4 + 2x} + \sqrt{x}} \quad \text{d/d l'importe.}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^4}{x^4} + \frac{x}{x^4}}{\sqrt{\frac{x^4}{x^4} + \frac{2x}{x^4}} + \sqrt{\frac{x}{x^4}}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^3}}{\sqrt{\frac{1}{x^4} + \frac{2}{x^3}} + \sqrt{\frac{1}{x^4}}} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

2. Dada $f(x) = 2x + \frac{|x|}{x}$, se pide:

a) Expresarla como función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{-x}{x} & \text{si } x < 0 \\ 2x + \frac{x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(Notese que la función no puede estar definida en $x=0$)

0,75

b) Clasificar su posible discontinuidad en $x = 0$

(1 punto)

Veamos los 3 requisitos de la continuidad:

1-º) ¿ $\exists f(0)$? Vemos que $\nexists f(0)$, por anularse un denominador $\Rightarrow f(x)$ discontinua en $x=0$ 0,25/

Para ver qué tipo de discontinuidad es, hay que estudiar el límite:

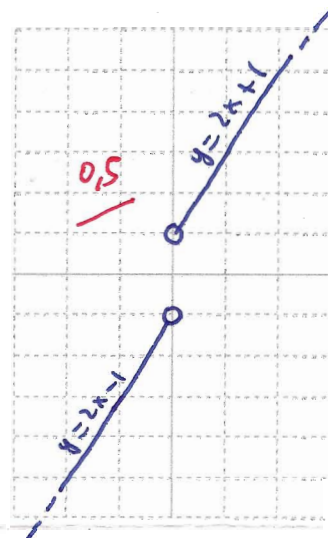
2-º) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x-1) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x+1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \Rightarrow f(x)$ presenta discontinuidad de salto finito en $x=0$ 0,5/

c) Dibujarla: (0,5 puntos)

x	$-\infty$	...	-1	0
$y=2x-1$	$-\infty$	...	-3	-1

x	0	1	...	∞
$y=2x+1$	1	3	...	∞

2,25/ (0,75+1+0,5)



3. a) Enunciar el teorema de Bolzano:

(0,5 puntos)

$f(x)$ continua en $[a, b]$ } $\Rightarrow \exists c \in (a, b) / f(c) = 0$
 signo $f(a) \neq$ signo $f(b)$ 0,5/

b) Aplicarlo para demostrar que las gráficas de $\ln x$ y e^{-x} se cortan en algún punto:

(2 puntos)

(NOTA: Se podrá valorar también la interpretación gráfica)

demostrar que $\ln x$ y e^{-x} se cortan en algún punto equivale a demostrar que $f(x) = \ln x - e^{-x}$ se anula en algún punto. Vemos que esta función verifica las hipótesis del teorema de Bolzano: 0,5/

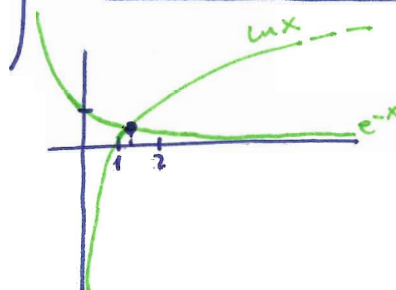
$f(x) = \ln x - e^{-x} = \ln x - \frac{1}{e^x}$ continua $\forall x \in \mathbb{R}^+$, por ser el logaritmo continuo $\forall \mathbb{R}^+$ y la exponencial continua $\forall \mathbb{R}^+$ 0,5/

$f(1) = \ln 1 - \frac{1}{e} = -\frac{1}{e} < 0$ 1/

$f(2) = \ln 2 - \frac{1}{e^2} \approx 0,5578 > 0$

2,5/ (0,5+2)

Soluc: las funciones $\ln x$ y e^{-x} se cortan en algún punto del intervalo $(1, 2)$



4. Hallar y' , simplificada:

a) $y = \ln \frac{x-1}{x+2}$ $\frac{\ln u}{u'/u} \rightarrow y' = \frac{\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^I}{\frac{x-1}{x+2}} = \frac{(x+2) - (x-1)}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)(x-1)}$ (0,5 puntos)

$= \frac{3}{x^2+x-2}$

OTRA FORMA: Descomponiendo, antes de derivar, el logaritmo:

$y = \ln \frac{x-1}{x+2} = \ln(x-1) - \ln(x+2) \rightarrow y' = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} = \frac{x+2 - (x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{3}{(x-1)(x+2)}$

b) $y = 2^{\sqrt{x}}$ $\frac{a^u}{u' \cdot a^u \cdot \ln a} \rightarrow y' = \frac{1}{2^{\sqrt{x}}} \cdot 2^{\sqrt{x}} \cdot \ln 2 = \frac{2^{\sqrt{x}} \cdot \ln 2}{2^{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x}} = \frac{2^{\sqrt{x}-1} \cdot \ln 2}{\sqrt{x}}$ (0,5 puntos)

Cociente de potencias de la misma base

2,5
(0,5 cada opdo.)

c) $y = \sin^2 \frac{1}{x}$ $= \left(\sin \frac{1}{x}\right)^2 \frac{u^2}{2 \cdot u^{2-1} \cdot u'} \rightarrow y' = 2 \cdot \sin \frac{1}{x} \cdot \left(\sin \frac{1}{x}\right)^I =$ (0,5 puntos)

$= 2 \cdot \sin \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \cos \frac{1}{x} = -\frac{2}{x^2} \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} \cdot \sin \frac{2}{x}$

d) $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} e^{x^2}$ $\frac{\operatorname{arctg} u}{1+u^2} \rightarrow \frac{1}{2} \frac{(e^{x^2})^I}{1+(e^{x^2})^2} = \frac{1}{2} \frac{x \cdot e^{x^2}}{1+e^{2x^2}} = \frac{x e^{x^2}}{1+e^{2x^2}}$ (0,5 puntos)

e) $xy^2 = x^2 + y$ Por derivación implícita: (0,5 puntos)

$y^2 + x \cdot 2yy' = 2x + y'$

$2xyy' - y' = 2x - y^2$

$(2xy - 1)y' = 2x - y^2$

$y' = \frac{2x - y^2}{2xy - 1} \quad \text{o} \quad \frac{y^2 - 2x}{1 - 2xy}$

ORTOGRAFÍA, CALIGRAFÍA, SINTAXIS: 0,05
ORDEN Y LIMPIEZA: 0,1
CORRECCIÓN LENGUAJE MATEMÁTICO: 0,1

0,25

NOTA: La ortografía, sintaxis, presentación cuidada (orden en el planteamiento, limpieza, caligrafía, etc.) y corrección en el lenguaje matemático se calificarán con un total de 0,25 puntos.

 I.E.S. "Fernando de Mena"	PARCIAL 1ª EVALUACIÓN MATEMÁTICAS II	2º BACH. A+C CURSO 2007-2008	 Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha
--	---	---	---

1. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} \right) =$ b) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x-a} =$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 - 4x} - \sqrt{4x^2 + 4}) =$ (2 puntos)

2. a) Enunciar el teorema de Bolzano.

b) Aplicarlo para demostrar que la ecuación $x^5 = \frac{x+1}{x}$ tiene al menos una solución en $[1,2]$
(1,75 puntos)

3. (UCLM, Sept 97) Calcular **a** y **b** para que $f(x)$ sea continua en $x=0$ y $x=1$:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \leq 0 \\ a + x^3 & \text{si } 0 < x < 1 \\ b/2x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Para los valores de **a** y **b** obtenidos, estudiar la derivabilidad en $x=0$ y $x=1$ (2 puntos)

4. Dada $f(x)=x^2+x+1$

a) Hallar, mediante el correspondiente límite, su derivada en $x=-1$

b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la función anterior en el mencionado punto.

(2 puntos)

5. Derivar (y simplificar, cuando proceda): a) $y = x^{e^x}$ b) $x^3 + y^3 + 2xy = 0$ c) $y = \arctg \frac{1}{x}$
d) $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ e) $y = \sin^2(x^2 + 1)$ (2 puntos)

① a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} \right) \stackrel{\infty-\infty}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1-3(x-1)}{(x-1)(x^3-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-x^3-x+1} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{3}{3} = 1 \quad 0.75$

b) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} =$

$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cancel{x-a}}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \quad 0.5$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ \hline 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2-4x} - \sqrt{4x^2+4}) \stackrel{\infty-\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4x^2-4x} - \sqrt{4x^2+4})(\sqrt{4x^2-4x} + \sqrt{4x^2+4})}{\sqrt{4x^2-4x} + \sqrt{4x^2+4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x^2-4x) - (4x^2+4)}{\sqrt{4x^2-4x} + \sqrt{4x^2+4}} =$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x-4}{\sqrt{4x^2-4x} + \sqrt{4x^2+4}} \stackrel{-\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4 - \frac{4}{x}}{\sqrt{4 - \frac{4}{x}} + \sqrt{4 + \frac{4}{x}}} = \frac{-4}{4} = -1 \quad 0.75$

TOTAL: 2

② a) $f(x)$ continua en $[a, b]$ } $\Rightarrow \exists c \in (a, b) / f(c) = 0 \quad 0.75$

TOTAL: 1.75

b) $x^5 = \frac{x+1}{x} \rightarrow f(x) = x^5 - \frac{x+1}{x}$ continua $\forall x \in [1, 2]$ } $\Rightarrow \exists c \in (1, 2) / f(c) = 0 \quad 1$

$f(1) = 1 - 2 < 0 ; f(2) = 32 - \frac{3}{2} > 0$

③ $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \leq 0 \\ a+x^3 & \text{si } 0 < x < 1 \\ b/2x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) continuidad en $x=0$:

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \cos x = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (a+x^3) = a$

$\Rightarrow a=1 \quad 0.5/$

continuidad en $x=1$:

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (a+x^3) = a+1 = 2$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{b}{2x} = \frac{b}{2}$

acl

$\Rightarrow \frac{b}{2} = 2$

$b=4 \quad 0.5/$

b) $\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \cos x & x \leq 0 \\ 1+x^3 & 0 < x < 1 \\ 2/x & x \geq 1 \end{cases}$

derivabilidad en $x=0$:

$f'(0^-) = -\sin x \Big|_{x=0} = 0$

$f'(0^+) = 3x^2 \Big|_{x=0} = 0$

0.5/

$\Rightarrow \exists f'(0)$

derivabilidad en $x=1$:

$f'(1^-) = 3x^2 \Big|_{x=1} = 3$

$f'(1^+) = -2/x^2 \Big|_{x=1} = -2$

$\Rightarrow \nexists f'(1) \quad 0.5/$

TOTAL: 2

④ $f(x) = x^2 + x + 1$ en $x_0 = -1$

a) $f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x + 1 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x}{x + 1} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)}{x+1} = -1 \quad 1$

b) $x_0 = -1 \rightarrow f(x_0) = f(-1) = 1 \rightarrow P(-1, 1)$

$m = f'(-1) = -1$

$y - 1 = -1(x + 1) ; y - 1 = -x - 1 ; x + y = 0 \quad 1$

TOTAL: 2

⑤ a) $y = x^{e^x} \xrightarrow{\text{derivada logarítmica}} \ln y = \ln x^{e^x} = e^x \cdot \ln x ; \frac{y'}{y} = e^x \cdot \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x} ; y' = \left(e^x \ln x + \frac{e^x}{x} \right) \cdot x^{e^x} \quad 0.4/$

b) $x^3 + y^3 + 2xy = 0 \xrightarrow{\text{derivada implícita}} 3x^2 + 3y^2 \cdot y' + 2(y + xy') = 0 ; 3x^2 + 3y^2 y' + 2y + 2xy' = 0 ; (3y^2 + 2x) y' = -3x^2 - 2y$

$y' = \frac{-3x^2 - 2y}{3y^2 + 2x} \quad 0.5/$

c) $y = \arctg \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{arctg u}} y' = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x^2}} = -\frac{1}{x^2+1} \quad 0.4/$

TOTAL: 2

d) $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \xrightarrow{u/v} y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - \ln x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{2x - x \ln x}{2x\sqrt{x}}}{x} = \frac{2x - x \ln x}{2x^2\sqrt{x}} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} \quad 0.4/$

e) $y = \sec^2(x^2+1) \xrightarrow{u^n} y' = 2 \cdot \sec(x^2+1) \cdot [\sec(x^2+1)]^1 = 2 \sec(x^2+1) \cdot 2x \cdot \cos(x^2+1) = 4x \cdot \sec(x^2+1) \cdot \cos(x^2+1) \quad 0.4/$

ORTOGRAFÍA Y SINTAXIS : 0,05

ORDEN PLANTEAMIENTO : 0,05

LÍMPIEZ Y CALIGRAFÍA : 0,05

LENGUAJE MATEMÁTICO : 0,10

0,25/

1. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 7x^2 + 8x - 3}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} =$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 7x^2 + 8x - 3}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} =$ (2 puntos)

2. a) $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x-2}{x+1} - \frac{6}{x^2-1} \right) =$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1} - \frac{6}{x^2-1} \right) =$ (2 puntos)

3. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} \right) =$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x} =$ (2 puntos)

4. (P.A.U. Junio 2004) Determinar **b** y **c** para que la función $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq 2 \\ -x^2 + bx + c & \text{si } x > 2 \end{cases}$
a) Sea derivable $\forall \mathbb{R}$
b) Calcular la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x=1$ (2 puntos)

5. Hallar las derivadas simplificadas de: a) $y = \frac{\ln x}{x^3}$ (resultado en forma de fracción algebraica)
(2 puntos) b) $y = \frac{1}{3x^3} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x} + 5$ (ídem)
c) $y = \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ (ídem)
d) $y = \sqrt{x^2 + 1} (x^2 - 1)^2$ (ídem, sin racionalizar)
e) $y = x^{x^2}$ (por derivación logarítmica)

$$1) a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 7x^2 + 8x - 3}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-3/2)(x-1)^2}{(x-1)^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-3}{x-1} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-3}{x-1} = \frac{-1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-3}{x-1} = \frac{-1}{0^+} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} f(x)} \quad 0.5/$$

$$1 \mid \begin{array}{cccc} 2 & -7 & 8 & -3 \\ & 2 & -5 & 3 \\ \hline 2 & -5 & 3 & 0 \end{array}$$

$$\frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} \Rightarrow 3/2$$

$$1 \mid \begin{array}{cccc} 1 & -3 & 3 & -1 \\ & 1 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1 \text{ doble}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 7x^2 + 8x - 3}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} \sim \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^3} = 2 \quad 0.5$$

$$2) a) \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x-2}{x+1} - \frac{6}{x^2-1} \right) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-2)(x-1) - 6}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-3x+2-6}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-3x-4}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-4)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-4}{x-1} = \frac{-5}{-2} = \boxed{5/2} \quad 0.5$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1} - \frac{6}{x^2-1} \right) \sim \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x} - \frac{6}{x^2} \right) = 1 - 0 = \boxed{1} \quad 0.75$$

$$3) a) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1})(\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1})}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2+x+1) - (x^2-x+1)}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x(\sqrt{1+1/x+1/x^2} + \sqrt{1-1/x+1/x^2})} = \frac{2}{2} = \boxed{1} \quad 0.5$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1-x} - 1)(\sqrt{1-x} + 1)}{x(\sqrt{1-x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x-1}{x(\sqrt{1-x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x(\sqrt{1-x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{1-x} + 1} = \frac{-1}{2} = \boxed{-\frac{1}{2}} \quad 0.5/$$

$$4) f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq 2 \\ -x^2 + bx + c & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad a) \text{ Para que sea derivable, previamente ha de ser continua:}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} x^3 = 8 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x^2 + bx + c) = -4 + 2b + c \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} -4 + 2b + c = 8 \\ 2b + c = 12 \end{cases} \quad 0.5/$$

La otra ecuación la obtenemos imponiendo que sea derivable:

$$\left. \begin{aligned} f'(2^-) &= 3x^2 \Big|_{x=2} = 12 \\ f'(2^+) &= -2x + b \Big|_{x=2} = -4 + b \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &12 = -4 + b; \quad \boxed{b = 16} \\ &\xrightarrow[\text{en (*)}]{\text{sustituimos}} \quad 32 + c = 12; \quad \boxed{c = -20} \end{aligned} \quad 0.5/$$

$$b) x=1 \xrightarrow{\text{sustituimos en la (2)}} f(x) = 1 \Rightarrow P(1,1); \quad f'(x) = 3x^2; \quad f'(1) = 3 \Rightarrow y-1 = 3(x-1); \quad y-1 = 3x-3 \Rightarrow \boxed{y = 3x-2} \quad 0.5/$$

$$5) a) y = \frac{\ln x}{x^3} \xrightarrow{u/v} y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^3 - \ln x \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{x^2 - 3x^2 \ln x}{x^6} = \frac{1 - 3 \ln x}{x^4} \quad 0.4/$$

$$b) y = \frac{1}{3x^3} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x} + 5 \rightarrow y' = \frac{-1 \cdot x^2}{3x^6} + 2 \cdot \frac{-2x}{x^4} - 3 \cdot \frac{-1}{x^2} = -\frac{1}{3x^4} - \frac{4}{x^3} + \frac{3}{x^2} = \frac{-1 - 4x + 3x^2}{x^4} \quad 0.4/$$

$$c) y = \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{2} [\ln(x+1) - \ln(x-1)] \rightarrow y' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right) = \frac{1}{2} \frac{(x-1) - (x+1)}{x^2-1} = \frac{-2}{2(x^2-1)} = -\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{1-x^2} \quad 0.4$$

$$d) y = \sqrt{x^2+1} \cdot (x^2-1)^2 \xrightarrow{u \cdot v} y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot (x^2-1)^2 + \sqrt{x^2+1} \cdot 2(x^2-1) \cdot 2x = \frac{x(x^2-1)^2}{\sqrt{x^2+1}} + 4x(x^2-1)\sqrt{x^2+1} = \frac{x(x^4-2x^2+1) + 4x(x^2-1)(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^5 - 2x^3 + x + 4x(x^4-1)}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^5 - 2x^3 + x + 4x^5 - 4x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{5x^5 - 2x^3 - 3x}{\sqrt{x^2+1}} \quad 0.4$$

$$e) y = x^{x^2} \xrightarrow{u^v} \ln y = \ln x^{x^2} = x^2 \ln x; \quad \frac{y'}{y} = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1) \Rightarrow y' = (2 \ln x + 1) \cdot x \cdot x^{x^2} = \boxed{(1 + 2 \ln x) \cdot x^{x^2+1}} \quad 0.4$$

1. Calcular:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^3 - 9x^2 + 6x - 1}{2x^3 - 3x^2 + 1} = \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x + 1} - \sqrt{x^2 - x - 1}) = \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} =$$

2. Dada

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - bx + 1 & \text{si } x \leq -1 \\ 2x^2 + 2bx + 4 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ ax + 11 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Se pide: a) Hallar **a** y **b** para que sea continua.

b) Para esos valores de **a** y **b** estudiar su derivabilidad.

3. Hallar la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x^2 - 3}$ en el punto de abscisa $x=2$

4. ¿Se puede aplicar el teorema del valor medio de Lagrange a la función $f(x)=x^3-3x-2$ en $[-2,2]$?
En caso afirmativo, calcular el valor de c tal que $f'(c)=0$

5. Derivar $y = x^{x^2}$ mediante derivación logarítmica.

① a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^3 - 9x^2 + 6x - 1}{2x^3 - 3x^2 + 1} \xrightarrow{0/0} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{12x^2 - 18x + 6}{6x^2 - 6x} \xrightarrow{0/0} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{24x - 18}{12x - 6} = \frac{6}{6} = 1$ 0.5

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x + 1} - \sqrt{x^2 - x - 1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 5x + 1} - \sqrt{x^2 - x - 1})(\sqrt{x^2 + 5x + 1} + \sqrt{x^2 - x - 1})}{\sqrt{x^2 + 5x + 1} + \sqrt{x^2 - x - 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 5x + 1) - (x^2 - x - 1)}{\sqrt{x^2 + 5x + 1} + \sqrt{x^2 - x - 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x + 2}{\sqrt{x^2 + 5x + 1} + \sqrt{x^2 - x - 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6x}{x} + \frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{5x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}} = \frac{6}{2} = 3$ 0.75

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} \xrightarrow{0/0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{2x} \xrightarrow{0/0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 2x}{1} = 2$ 0.75

② $f(x) = \begin{cases} ax^2 - bx + 1 & \text{si } x \leq -1 \\ 2x^2 + 2bx + 4 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ ax + 11 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) $f(x)$ continua en $x = -1$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} (ax^2 - bx + 1) = a + b + 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (2x^2 + 2bx + 4) = 2 - 2b + 4 = 6 - 2b \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a + b + 1 = 6 - 2b \\ a + 3b = 5 \end{cases}$$

$f(x)$ continua en $x = 1$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x^2 + 2bx + 4) = 2 + 2b + 4 = 6 + 2b \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + 11) = a + 11 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 6 + 2b = a + 11 \\ -a + 2b = 5 \end{cases}$$

Solving the system:

$$\begin{cases} a + 3b = 5 \\ -a + 2b = 5 \end{cases} \Rightarrow 5b = 10 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a = -1$$

$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 1 & \text{si } x \leq -1 \\ 2x^2 + 4x + 4 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ -x + 11 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x)$ derivable en $x = -1$:

$$\left. \begin{aligned} f'(-1^-) &= -2x - 2 \Big|_{x=-1} = 0 \\ f'(-1^+) &= 4x + 4 \Big|_{x=-1} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \exists f'(-1)$$

$f(x)$ derivable en $x = 1$:

$$\left. \begin{aligned} f'(1^-) &= 4x + 4 \Big|_{x=1} = 8 \\ f'(1^+) &= -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nexists f'(1)$$

Soluz: no es derivable en $x = 1$

③ $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x^2 - 3} \rightarrow f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 3) - (x^3 - 2) \cdot 2x}{(x^2 - 3)^2} = \frac{3x^4 - 9x^2 - 2x^4 + 4x}{(x^2 - 3)^2} = \frac{x^4 - 9x^2 + 4x}{(x^2 - 3)^2}$ 0.5

$x_0 = 2 \rightarrow f(x_0) = f(2) = \frac{6}{1} = 6$; $m = f'(x_0) = f'(2) = \frac{16 - 36 + 8}{1} = -12 \Rightarrow y - 6 = -12(x - 2)$ 1/

$y - 6 = -12x + 24 \Rightarrow y = -12x + 30$ 0.25/

④ $f(x) = x^3 - 3x - 2$ en $[-2, 2]$

$f(x)$ continua en $[-2, 2]$ por ser polinomial $\Rightarrow \exists x \in (-2, 2) / f'(x) = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)}$ 0.25/

$f(x)$ derivable en $(-2, 2)$ " " " " $\Rightarrow 3x^2 - 3 = 1 \Rightarrow 3x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 0.25/

$x_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 1/

(Nota: ambas son soluciones por $\in (-2, 2)$)

⑤ $y = x^{x^2}$; I) $\ln y = \ln x^{x^2} = x^2 \cdot \ln x$ 0.25/

II) $\frac{y'}{y} = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x$ 0.25/

III) $y' = (2x \ln x + x) \cdot x^{x^2} = (2 \ln x + 1) \cdot x \cdot x^{x^2} = (1 + 2 \ln x) \cdot x^{x^2 + 1}$ 1.25/

0.25/