I.E.S. "Fernando de Mena" Socuéllamos (Ciudad Real)	EXAMEN 1ª EVALUACIÓN MATEMÁTICAS II	2º BACH. A CURSO 2013-2014	Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha Consejería de Educación y Ciencia

Alumno: SOLUCIONES

Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. No usar bolígrafo rojo.

Nota ortografía, caligrafía y sintaxis (0 a 4)

Nota lenguaje matemático (0 a 4)

Nota limpieza y orden (0 a 4)

1. Dada $f(x)=\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{x^2}$, se pide:

a) Hallar $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{x^2} \underset{1^\infty \text{ INDET.}}{=} e^{\lim_{x\to\infty} x^2\cdot \ln\frac{x+1}{x+2}}$ 0,1 (*) *(1 pto.)*

$$\lim_{x\to\infty} x^2\cdot\ln\frac{x+1}{x+2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+1)-\ln(x+2)}{1/x^2} \underset{0/0}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}}{\frac{-2x}{x^4}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{(x+2)-(x+1)}{(x+1)(x+2)}}{-\frac{2}{x^3}} =$$

0,1 0,1 0,1

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2+3x+2}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-x^3}{2x^2+6x+4} \approx \lim_{x\to\infty}\frac{-x^{\cancel{3}}}{2\cancel{x^2}} = -\infty$$

0,1 0,1 0,1

Sustituimos en (*): Soluc: $e^{-\infty} = \frac{1}{e^\infty} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0}$

0,1 0,3

(NOTA: Ver en el anexo final otra forma, sin desarrollar el Ln)

b) Hallar f'(x) Derivamos $y=\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{x^2}$ por derivación logarítmica: *(1 pto.)*

0,1 0,1

$$\ln y = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{x^2} = x^2\ln\frac{x+1}{x+2} = x^2\left[\ln(x+1)-\ln(x+2)\right]$$

0,1

$$\frac{y'}{y} = 2x\ln\frac{x+1}{x+2} + x^2\cdot\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right) = 2x\ln\frac{x+1}{x+2} + x^2\cdot\frac{(x+2)-(x+1)}{(x+1)(x+2)} =$$

0,1

$$= 2x\ln\frac{x+1}{x+2} + \frac{x^2}{x^2+3x+2}$$ 0,1

$$\boxed{y' = \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{x^2}\cdot\left(2x\ln\frac{x+1}{x+2}+\frac{x^2}{x^2+3x+2}\right)} \quad (**)$$

0,5

(NOTA: Ver en el anexo final otra forma, sin desarrollar el Ln)

c) Aplicar lo obtenido en el apartado anterior para hallar la ecuación de la tangente a f(x) en x=0 *(0,5 ptos.)*

$x=0 \xrightarrow[\text{en } f(x)]{\text{sustituimos}} f(0)=\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$ 0,1

$f'(0)=\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot\left(0\cdot\ln\frac{1}{2}+0\right)=1\cdot0=0$ 0,1

sustituimos x=0 en (**)

ec. de la recta tangente en forma punto-pendiente:

$y-1=0\cdot(x-0)$ 0,1

$y-1=0$

$\boxed{y=1}$ (se trata de una recta horizontal) 0,2

NOTA: Se da 0,1 si se parte de una derivada incorrecta pero el procedimiento es correcto

2,5

f(x) es simétrica impar, pues f(−x)=−f(x), y esto va a tener consecuencias en los M y m, asíntotas, etc.

2. Dada $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$, se pide:

a) Hallar los posibles extremos relativos. *(1 pto.)*

0,1

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2-1)-x^3\cdot2x}{(x^2-1)^2}=\frac{3x^4-3x^2-2x^4}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4-3x^2=0;\quad x^2(x^2-3)=0 \begin{cases} x^2=0;\ x=0 \\ x^2-3=0;\ x^2=3 \begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ x=\sqrt{3}\end{cases}\end{cases}$$ 0,1 posibles M o m

$$f''(x)=\left[\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}\right]'=\frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^{\cancel{2}}-(x^4-3x^2)\cdot2\cancel{(x^2-1)}\cdot2x}{(x^2-1)^{\cancel{4}\,3}}=$$ 0,1

$$=\frac{\cancel{4x^5}-4x^3-6x^3+6x-\cancel{4x^5}+12x^3}{(x^2-1)^3}=\frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}$$

$f''(0)=\dfrac{0}{-1}=0 \Rightarrow$ este método no decide, y hay que estudiar un posible cambio de signo de $f'(x)$ en las proximidades de $x=0$: 0,1

$$f'(-0{,}1)=\frac{(-0{,}1)^4-3(-0{,}1)^2}{+}=\frac{0{,}0001-0{,}03}{+}=\frac{-}{+}<0$$

$$f'(0{,}1)=\frac{0{,}1^4-3\cdot0{,}1^2}{+}=\frac{0{,}0001-0{,}03}{+}=\frac{-}{+}<0$$

0,1 $\Rightarrow f'(x)$ no cambia de signo en las proximidades de $x=0 \Rightarrow x=0$ no es M ni m (es un p.d.inflex.)

0,2

$f''(\sqrt{3})=\dfrac{2(\sqrt{3})^3+6\sqrt{3}}{2^3}=\dfrac{+}{+}>0 \Rightarrow \boxed{m\left(\sqrt{3},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}$ 0,05

$f''(-\sqrt{3})=\dfrac{2(-\sqrt{3})^3+6(-\sqrt{3})}{2^3}=\dfrac{-}{+}<0 \Rightarrow \boxed{M\left(-\sqrt{3},-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}$ 0,05

0,2

(NOTA: ver en el anexo final otra forma, estudiando el signo $f'(x)$ mediante una tabla)

b) Hallar los puntos de inflexión, si existen. *(0,75 ptos.)*

$f''(x) = \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3} = 0 \Rightarrow 2x^3+6x=0$

$2x(x^2+3)=0$ ↗ $2x=0;\ x=0$ posible P.I. ↘ $x^2+3=0$ ∄ soluc.

0,1 0,1

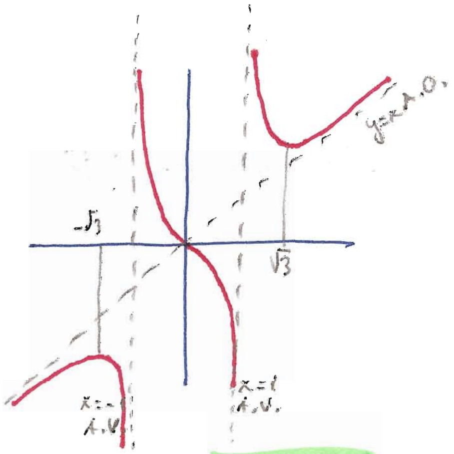
$f'''(x) = \frac{(6x^2+6)(x^2-1)^3-(2x^3+6x)\cdot 3(x^2-1)^2\cdot 2x}{(x^2-1)^6}$ 0,1

$f'''(0) = \frac{6\cdot(-1)-0}{-1} = \frac{-6}{-1} \neq 0 \Rightarrow \boxed{P.I.(0,0)}$

0,1 0,35

NOTA: • Se puntúa 0,25 si el P.I. está bien pero f''' está mal calculada
• Se puntúa 0,1 si el procedimiento es correcto pero se parte de una f'' incorrecta

(NOTA: Ver en el anexo final otra forma, estudiando el signo de f''(x) mediante una tabla)



c) Hallar sus posibles asíntotas. *(0,75 ptos.)*

¿A.H.? $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2-1} \approx \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^2}} = \infty \Rightarrow \boxed{\nexists\ A.H.}$ 0,2

¿A.V.? El denominador se anula en $x=\pm 1$, de modo que podemos tener dos A.V. Lo comprobamos:

$\lim_{x\to 1}\frac{x^3}{x^2-1} = \frac{1}{0} = \pm\infty \Rightarrow \boxed{x=1\ A.V.}$ 0,1 $\lim_{x\to -1}\frac{x^3}{x^2-1} = \frac{-1}{0} = \pm\infty \Rightarrow \boxed{x=-1\ A.V.}$ 0,1

¿A.O.?

$m = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3-x} \approx \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}} = \boxed{1}$ 0,1

$n = \lim_{x\to\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x(x^2-1)}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^3}-\cancel{x^3}+x}{x^2-1} \approx$

$\approx \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = \boxed{0}$ 0,1

$\Rightarrow \boxed{y=x\ A.O.}$ 0,15

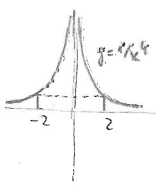
$\boxed{2,5}$

3. En los ejemplos siguientes f(−2)=f(2) pero no hay ningún valor c∈(−2,2) tal que f'(c)=0. Justificar en cada caso por qué no contradicen el teorema de Rolle:

a) $f(x) = \frac{1}{x^4}$ *(1 pto.)*

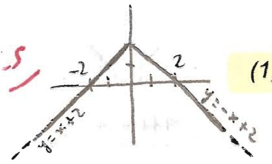
En este caso no existe imagen en $x=0$ ⇒ f(x) no es continua en $x=0$ ⇒ $\boxed{f(x) \text{ no es continua en } [-2,2]}$ ⇒ no se verifica la 1ª hipótesis del th. de Rolle

0,5 0,5



b) $g(x) = 2 - |x| = \begin{cases} 2-(-x) & si\ x \leq 0 \\ 2-x & si\ x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 2+x & si\ x \leq 0 \\ 2-x & si\ x > 0 \end{cases}$ 0,5 *(1,5 ptos.)*

se anula en x = 0



Como ocurre siempre con los valores absolutos, esta función es continua en el punto de unión de las dos ramas (puede comprobarse fácilmente) pero no es derivable en dicho punto:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = \left.\left.(2+x)'\right|_{x=0} = 1\right]_{x=0} = 1 \\ f'(0^+) = \left.\left.(2-x)'\right|_{x=0} = -1\right]_{x=0} = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists\, f'(0) \Rightarrow \boxed{f(x) \text{ no es derivable en } (-2,2)}$$

0,5

Por lo tanto no se verifica la 2ª hipótesis del th. de Rolle

0,5

$\boxed{2,5}$

4. Hallar dos números reales positivos cuya suma sea 8 de manera que su producto multiplicado por su diferencia sea máximo (Obtener las soluciones con dos decimales de aproximación). *(2,5 ptos.)*

Sean x e y los dos números pedidos.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{RESTRICCIÓN:} & x+y=8 \\ \text{FUNCIÓN A MAXIMIZAR:} & F(x,y) = xy\cdot(x-y) \end{array}\right\} \quad y = 8-x \Rightarrow (*)$$

0,5

$y = x-8 \Rightarrow f(x) = x(8-x)\cdot[x-(8-x)] = x(8-x)\cdot(2x-8) = x(16x-64-2x^2+8x) =$

$= x(-2x^2+24x-64) = -2x^3+24x^2-64x$ 0,5

$f'(x) = -6x^2+48x-64 = 0$

$3x^2-24x+32=0$

$$x = \frac{24 \pm \sqrt{576-384}}{6} = \frac{24\pm\sqrt{192}}{6} = \begin{cases} x_1 \simeq 6,31 \longrightarrow y_1 \simeq 1,69 \\ x_2 \simeq 1,69 \longrightarrow y_2 \simeq 6,31 \end{cases}$$

0,5 sustituimos en (*)

Vemos que ambos pares de números son el mismo; por lo tanto basta con comprobar p.ej. con el primero que se trata de un máximo:

0,5

$f''(x) = -12x+48$; $f''(6,31) < 0 \Rightarrow$ se confirma que se trata de un máximo

Solución: $\boxed{\text{Ambos números son } 1,69 \text{ y } 6,31}$

0,5

$\boxed{2,5}$

I.E.S. "Fernando de Mena" Socuéllamos (Ciudad Real)	EXAMEN 1ª EVALUACIÓN MATEMÁTICAS II	2º BACH. A CURSO 2013-2014	Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha Consejería de Educación y Ciencia

Alumno: ANEXO

Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. No usar bolígrafo rojo.

Nota ortografía, caligrafía y sintaxis (0 a 4)

Nota lenguaje matemático (0 a 4)

Nota limpieza y orden (0 a 4)

1. Dada $f(x)=\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{x^2}$, se pide:

a) Hallar $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{x^2} \underset{1^\infty \text{ indet.}}{=} e^{\lim_{x\to\infty} x^2\cdot \ln\frac{x+1}{x+2}}$ 0,1 (*) **(1 pto.)**

$$\lim_{x\to\infty} x^2\cdot\ln\frac{x+1}{x+2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{x+1}{x+2}}{\frac{1}{x^2}} \underset{0/0}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\frac{(x+2)-(x+1)}{(x+2)^2}}{\frac{x+1}{x+2}}}{\frac{-2x}{x^4}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\frac{1}{(x+2)^{\cancel{2}}}}{\frac{x+1}{\cancel{x+2}}}}{\frac{-2}{x^3}} =$$

0,1 0,1

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{(x+1)(x+2)}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-x^3}{2x^2+6x+4} \approx \lim_{x\to\infty}\frac{-x^{\cancel{3}}}{2\cancel{x^2}} = -\infty$$

0,1 0,1 0,1

Sustituimos en (*): Soluc.: $e^{-\infty} = \frac{1}{e^\infty} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0}$.

0,1 0,3

b) Hallar f'(x) Derivamos $y=\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{x^2}$ por derivación logarítmica: **(1 pto.)**

$$\ln y = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{x^2} = x^2\cdot\ln\frac{x+1}{x+2}$$

0,1 0,1

$$\frac{y'}{y} = 2x\ln\frac{x+1}{x+2} + x^2\cdot\frac{\frac{(x+2)-(x+1)}{(x+2)^2}}{\frac{x+1}{x+2}} = 2x\ln\frac{x+1}{x+2} + x^2\cdot\frac{\frac{1}{(x+2)^{\cancel{2}}}}{\frac{x+1}{\cancel{x+2}}} =$$

0,1 0,1

$$= 2x\ln\frac{x+1}{x+2} + \frac{x^2}{x^2+3x+2}$$

0,1

$$y' = \boxed{\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{x^2}\cdot\left(2x\ln\frac{x+1}{x+2} + \frac{x^2}{x^2+3x+2}\right)}$$

0,5

c) Aplicar lo obtenido en el apartado anterior para hallar la ecuación de la tangente a f(x) en x=0 *(0,5 ptos.)*

2. Dada $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$, se pide:

a) Hallar los posibles extremos relativos. *(1 pto.)*

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2-1)-x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{3x^4-3x^2-2x^4}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$$

se anula en 0 y $\pm\sqrt{3}$

siempre es +

0,1

	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3},0)$	$(0,\sqrt{3})$	$(\sqrt{3},\infty)$
signo $f'(x)=\dfrac{x^4-3x^2}{+}$	+	−	−	+
f(x)	↗	↘	↘	↗

0,3

$\boxed{M\left(-\sqrt{3},-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}$ $\boxed{m\left(\sqrt{3},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}$

0,25 0,05 0,25 0,05

b) Hallar los puntos de inflexión, si existen. *(0,75 ptos.)*

$$f''(x) = \frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^{\cancel{2}} - (x^4-3x^2)\cdot 2\cancel{(x^2-1)}\cdot 2x}{(x^2-1)^{\cancel{4}\,3}} =$$

0,1

$$= \frac{\cancel{4x^5}-4x^3-6x^3+6x-\cancel{4x^5}+12x^3}{(x^2-1)^3} = \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}$$

$2x^3+6x$ ← se anula en $x=0$

$(x^2-1)^3$ ← se anula en $x=\pm 1$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
signo $f''(x) = \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	∩	∪	∩	∪

0,25

no es P.I. pq. $\nexists$ f(−1) $\boxed{\text{P.I.}(0,0)}$ no es P.I. pq. $\exists$ f(1)

0,4

c) Hallar sus posibles asíntotas. *(0,75 ptos.)*

3. En los ejemplos siguientes f(−2)=f(2) pero no hay ningún valor c∈(−2,2) tal que f'(c)=0. Justificar en cada caso por qué no contradicen el teorema de Rolle:

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^4}$ *(1 pto.)*