I.E.S. "Fernando de Mena" Socuéllamos (Ciudad Real)	**EXAMEN 1ª EVALUACIÓN** **MATEMÁTICAS II**	**2º BACH. A+C** **CURSO 2007-2008**	Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha Consejería de Educación y Ciencia

1. *(UCLM, junio 2005)* **a)** Enunciar la regla de L'Hôpital. **b)** Resolver: $\lim_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}$

(1,5 puntos)

2. Resolver: **a)** $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x}$ **b)** $\lim_{x \to 0} (\cos 2x)^{3/x^2}$ *(1,5 puntos)*

3. Dada $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & \text{si } x \le 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) Hallar **a** y **b** para que f(x) sea continua y derivable.

b) Enunciar el teorema del valor medio.

c) Razonar para esos valores de a y b si f(x) cumple las hipótesis del teorema del valor medio en [-1,3]. En caso afirmativo, hallar el o los puntos intermedios que verifican el teorema. *(2,5 puntos)*

4. Dada $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x - 2}$

a) Obtener su Dom(f)

b) Calcular los posibles cortes con los ejes.

c) Hallar los posibles M y m, y los intervalos de crecimiento.

d) Calcular $\lim_{x \to \infty} f(x)$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

e) Con la información anterior, hacer un esbozo de su gráfica.

f) Hallar la ecuación de la recta tangente a f(x) en x=-1 *(4,25 puntos)*

NOTA: La ortografía y sintaxis, presentación cuidada (orden en el planteamiento, limpieza, caligrafía, etc.) y corrección en el lenguaje matemático se calificarán con un máximo de 0,25 puntos.

CALIGRAFÍA Y LIMPIEZA 0.05
ORDEN PLANTEAMIENTO 0.05
ORTOGRAFÍA Y SINTAXIS 0.05
CORRECCIÓN LENGUAJE MATEMÁTICO ... 0.10

① **a)** $f(x)$ y $g(x)$ derivables en $x=a$, $f(a)=g(a)=0$ $\Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ ← 0,5

b) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}x}{\operatorname{tg}x-\operatorname{sen}x} \overset{L'H}{=} \frac{0}{0} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1+\operatorname{tg}^2x-\cos x} \overset{L'H}{=} \frac{0}{0} \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{2\operatorname{tg}x(1+\operatorname{tg}^2x)+\operatorname{sen}x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{2\operatorname{tg}x+2\operatorname{tg}^3x+\operatorname{sen}x} \overset{L'H}{=} \frac{0}{0}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2(1+\operatorname{tg}^2x)+6\operatorname{tg}^2x\cdot(1+\operatorname{tg}^2x)+\cos x} = \boxed{\frac{1}{3}}$ ← 1

TOTAL: 1,5

---

② **a)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x})(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})}{x(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-x)-(1+x)}{x(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})} = \lim_{x\to 0}\frac{-2x}{x(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})} = \frac{-2}{2} = \boxed{-1}$ ← 0,5

b) $\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^2} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{3}{x^2}\ln(\cos 2x)}$ (*) ← 0,125

1^∞ = INDTO.

$\lim_{x\to 0}\frac{3\ln(\cos 2x)}{x^2} \overset{L'H}{=} \frac{0}{0} \lim_{x\to 0}\frac{3\cdot\frac{-2\operatorname{sen}2x}{\cos 2x}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-3\operatorname{sen}2x}{x\cdot\cos 2x} \overset{L'H}{=} \frac{0}{0} \lim_{x\to 0}\frac{-3\cdot 2\cdot\cos 2x}{\cos 2x+x\cdot(-2\operatorname{sen}2x)} = \frac{-6}{1} = -6$ ← 0,5

Sustituimos en (*): solución: $\boxed{e^{-6}}$ ← 0,125

TOTAL: 1,5

---

③ $f(x)=\begin{cases} ax^2+3x & \text{si } x\le 2 \\ x^2-bx-4 & \text{si } x>2 \end{cases}$

a) CONTINUA en $x=2$:

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2}(ax^2+3x) = 4a+6$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2}(x^2-bx-4) = 4-2b-4 = -2b$

$\Rightarrow 4a+6=-2b$; $4a+2b=-6$ ← 0,25 → $\boxed{2a+b=-3}$

DERIVABLE en $x=2$:

$f'(2^-) = 2ax+3\big]_{x=2} = 4a+3$

$f'(2^+) = 2x-b\big]_{x=2} = 4-b$

$\Rightarrow 4a+3=4-b \Rightarrow \boxed{4a+b=1}$ ← 0,25

$2a+b=-3$

$4a+b=1$

$2a=4$

$\boxed{a=2} \Rightarrow \boxed{b=-7}$ ← 0,5

$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} 2x^2+3x & \text{si } x\le 2 \\ x^2+7x-4 & \text{si } x>2 \end{cases}$

b) $f(x)$ continua en $[a,b]$, $f(x)$ derivable en (a,b) $\Rightarrow \exists\, c\in(a,b) / f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ← 0,5

c) $f(x)$ sí cumple las hipótesis del th., pues acabamos de ver que es continua y derivable $\forall\mathbb{R}$, y en particular en $[-1,3] \Rightarrow \exists\, c\in(-1,3) / f'(c)=\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=\frac{26-(-1)}{4}=\frac{27}{4}$ ← 0,25

TOTAL: 2,5

1ª rama: $f'(x)=4x+3=\frac{27}{4}$; $16x+12=27$; $16x=15$; $\boxed{x=\frac{15}{16}} \in$ 1ª rama ← 0,375

2ª rama: $f'(x)=2x+7=\frac{27}{4}$; $8x+28=27$; $8x=-1$; $x=-1/8$ descartado pq. $\notin$ 2ª rama ← 0,375

---

④ **a)** $x^2+x-2=0 \to x_1=1, x_2=-2$ → $\boxed{\text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{-2,1\}}$ ← 0,5

b) CORTES EJE X: $y=0 \Rightarrow \frac{1}{x^2+x-2}=0$; $1=0$!! $\Rightarrow$ $\boxed{\text{no corta al eje x}}$ ← 0,25

CORTE EJE Y: $x=0 \Rightarrow y=-\frac{1}{2} \to \boxed{(0,-1/2)}$ ← 0,25

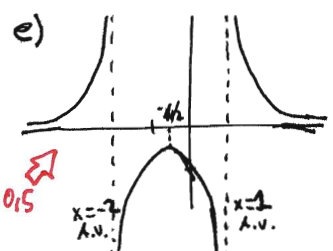
c) $f'(x)=-\frac{2x+1}{(x^2+x-2)^2}=0 \Rightarrow 2x+1=0 \Rightarrow x=-1/2$ posible Mo m ← 0,25

$f''(x)=-\frac{2(x^2+x-2)^2-(2x+1)\cdot 2(x^2+x-2)\cdot(2x+1)}{(x^2+x-2)^{\#3}}$ ← 0,25

$f''(-1/2)=-\frac{2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-2\right)}{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-2\right)^3}=-\frac{2\cdot(-9/4)}{-9/4}<0 \Rightarrow \boxed{M\left(-\frac{1}{2},-\frac{4}{9}\right)}$ ← 0,5

d) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2+x-2}=\frac{1}{\infty}=0^+$; $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2+x-2}=\frac{1}{\infty}=0^+$ ← 0,5

e)



← 0,5

$\Rightarrow \boxed{f(x)\uparrow \forall x\in(-\infty,-2)\cup(-2,-\frac{1}{2})}$

$\boxed{f(x)\downarrow \forall x\in(-\frac{1}{2},1)\cup(1,\infty)}$

f) $x=-1 \to y=f(-1)=-\frac{1}{2} \to P(-1,-1/2)$ ← 0,5

$f'(-1)=-\frac{-1}{4}=\frac{1}{4}$

$y+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(x+1)$ ← 0,5

$4y+2=x+1$

$\boxed{x-4y-1=0}$

TOTAL: 4,25

I.E.S. "Fernando de Mena"	**EXAMEN 1ª EVALUACIÓN MATEMÁTICAS II**	**2º BACH. A CURSO 2005-2006**	Junta de Comunidades de Castilla -La Mancha

1. Calcular: a) *(Junio 2005)* $\lim_{x\to 0} \frac{x - \text{sen } x}{\text{tg } x - \text{sen } x}$ b) $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\text{sen } x}$ c) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a}\right)$

(3 puntos)

2. *(Septiembre 2004)* Dada $f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 & \text{si } x \le 1 \\ ax + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Determinar los valores de **a** y **b** para que sea derivable en todos los puntos.

b) Esbozar la gráfica de la curva resultante.

c) Hallar la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = -1$ *(2 puntos)*

3. Estudiar si la función $y=(x-1)(2x+3)^2+4$ verifica las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [-2,1]. En caso afirmativo, hallar el valor o los valores de dicho intervalo en que se verifica el teorema. *(2 puntos)*

4. Dada $f(x) = \frac{8x}{x^2+1}$

a) Razonar cuál es su dominio de definición. Hallar sus asíntotas.
b) Hallar sus posibles M y m. Intervalos de crecimiento.
b) Hallar sus posibles P.I. Intervalos de curvatura.
c) Dibujar su gráfica. *(3 puntos)*

① a) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen}x}{\operatorname{tg}x-\operatorname{sen}x} \overset{L'H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{1+\operatorname{tg}^2 x-\cos x} \overset{L'H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}x}{2\operatorname{tg}x(1+\operatorname{tg}^2 x)+\operatorname{sen}x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}x}{2(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}^3 x)+\operatorname{sen}x} \overset{L'H}{\underset{0/0}{=}}$ 0.25

$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2[1+\operatorname{tg}^2 x+3\operatorname{tg}^2 x\cdot(1+\operatorname{tg}^2 x)]+\cos x} = \boxed{\frac{1}{3}}$ 0.25/ 0.25/ 1 punto

b) $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\operatorname{sen}x} \underset{\infty^0}{=} e^{\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen}x\cdot \ln\frac{1}{x^2}}$ (*); $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen}x\cdot \ln\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen}x\cdot(\ln 1-\ln x^2) = \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen}x\cdot(-2\ln x)$ 0.25/

$= -2\cdot\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen}x\cdot\ln x = -2\cdot\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/\operatorname{sen}x} \overset{L'H}{\underset{-\infty/\infty}{=}} -2\cdot\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}} = -2\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{-x\cos x} \overset{L'H}{\underset{0/0}{=}}$ 0.25/

$= -2\cdot\lim_{x\to 0^+} \frac{2\operatorname{sen}x\cos x}{-(\cos x - x\operatorname{sen}x)} = -2\cdot\frac{0}{-1} = 0$; sustituimos en (*): solución: $e^0 = \boxed{1}$ 0.25/ 4 puntos

c) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}\right) = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2-ax} \underset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2-ax}\right)\left(\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax}\right)}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax}} =$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+ax)-(x^2-ax)}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2ax}{\text{idem}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+\sqrt{1-\frac{a}{x}}} = \frac{2a}{2} = \boxed{a}$ 1 punto

---

② $f(x) = \begin{cases} x^3-x^2 & \text{si } x\le 1 \\ ax+b & \text{si } x>1 \end{cases}$

a) Para que sea derivable, previamente hay que imponer que sea continua en $x=1$:

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} (x^3-x^2) = 0$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} (ax+b) = a+b$

continua $\Rightarrow a+b=0$ (*) 0.5/

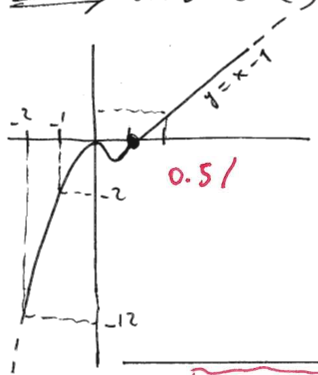
derivable en $x=1$:

$f'(1^-) = 3x^2-2x\big]_{x=1} = 1$

$f'(1^+) = a$

$\Rightarrow \boxed{a=1} \overset{(*)}{\Longrightarrow} \boxed{b=-1}$ 0.5/

b)



2 puntos 0.5/

c) $x=-1 \Rightarrow y=-2$ (sustituyendo en la 1ª rama)

$y' = 3x^2-2x$; $y'(-1) = 5$

$\boxed{y+2 = 5(x+1)}$ 0.5/

$y = 5x+3$

---

③ $y = (x-1)(2x+3)^2+4 = (x-1)(4x^2+12x+9)+4 = 4x^3+12x^2+9x-4x^2-12x-9+4 = \boxed{4x^3+8x^2-3x-5} \rightarrow f'(x) = 12x^2+16x-3$

$f(x)$ continua en $[-2,1]$ por ser polinómica
$f(x)$ derivable en $(-2,1)$ " " "

$\Rightarrow \exists\, c\in(-2,1) / f'(c) = \frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)} \Rightarrow 12x^2+16x-3 = \frac{4-1}{3} = 1$ 0.25/ 0.25/

$12x^2+16x-4=0$; $3x^2+4x-1=0 \rightarrow x = \frac{-4\pm\sqrt{16+12}}{6} = \frac{-4\pm\sqrt{28}}{6} = \frac{-4\pm 2\sqrt{7}}{6}$

$x_1 = \frac{-2+\sqrt{7}}{3}$ $x_2 = \frac{-2-\sqrt{7}}{3}$

0.5/ (los dos son solución pert. $\in(-2,1)$) 0.75/

2 puntos 0.25/

---

④ $f(x) = \frac{8x}{x^2+1}$

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ pq. $x^2+1\neq 0\ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \nexists$ A.V.
(es simétrica impar)

$\lim_{x\to\infty} \frac{8x}{x^2+1} = 0 \Rightarrow \boxed{y=0 \text{ A.H.}} \Rightarrow \nexists$ A.O. 0.5/

b) $f'(x) = \frac{8(x^2+1)-8x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{8x^2+8-16x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{8-8x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow 8-8x^2=0$; $8=8x^2$; $x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$ posibles M o m 0.25/

$f''(x) = \frac{-16x\cdot(x^2+1)^2-(8-8x^2)2\cdot(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{-16x(x^2+1)-(8-8x^2)\cdot 4x}{(x^2+1)^3} = \frac{16x^3-48x}{(x^2+1)^3}$ 0.25/

$f''(1) = \frac{-}{+} < 0 \Rightarrow \boxed{M(1,4)}$

$f''(-1) = \frac{+}{+} > 0 \Rightarrow \boxed{m(-1,-4)}$ 0.5/

$\Rightarrow f(x) \searrow\ \forall x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$
$f(x) \nearrow\ \forall x\in(-1,1)$

3 puntos

c) $f''(x) = \frac{16x^3-48x}{(x^2+1)^3} = 0 \Rightarrow 16x^3-48x=0$; $16x(x^2-3)=0$ $\begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$ posibles P.I. 0.25/

$f'''(x) = \frac{(48x^2-48)(x^2+1)^3-(16x^3-48x)\cdot 3(x^2+1)^2\cdot 2x}{(x^2+1)^6} = \frac{(48x^2-48)(x^2+1)-(16x^3-48x)\cdot 6x}{(x^2+1)^4}$ 0.25/

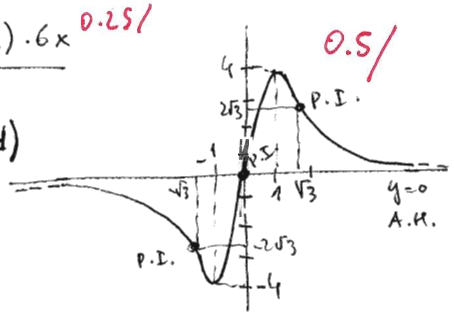
$f'''(0) = \frac{-48}{+} < 0 \Rightarrow \boxed{P.I.(0,0)}$

$f'''(\sqrt{3}) = \frac{+}{+} > 0 \Rightarrow \boxed{P.I.(\sqrt{3},2\sqrt{3})}$

$f'''(-\sqrt{3}) = \frac{+}{+} > 0 \Rightarrow \boxed{P.I.(-\sqrt{3},-2\sqrt{3})}$ 0.5/

$\Rightarrow f(x) \cap\ \forall x\in(-\infty,-\sqrt{3})\cup(0,\sqrt{3})$
$f(x) \cup\ \forall x\in(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3},\infty)$

d)



0.5/

EXAMEN 1ª EVALUACIÓN **CURSO 2003-2004**
MATEMÁTICAS II

1. Calcular: a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\text{sen } x} - x - 1}{2x^2 - x^3}$ b) $\lim_{x\to 0} x^{\text{sen } x}$

2. Dada

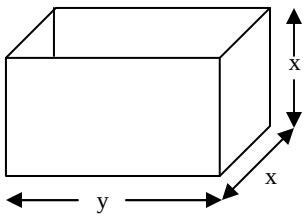
$$f(x) = \begin{cases} -1 + e^x & \text{si } x \le 0 \\ \text{sen } x & \text{si } 0 < x \le \pi \\ -x + \pi & \text{si } x > \pi \end{cases}$$

estudiar su continuidad y derivabilidad.

3. Dada $f(x) = (x+1)^{x-1}$ a) Hallar f '(x) (por derivación logarítmica)
b) Hallar la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa x=0

4. Dada $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ a) Hallar sus posibles M y m. Intervalos de crecimiento.
b) Posibles P.I. Intervalos de curvatura. (Si tienes tiempo, se valorará esbozar la gráfica)

5.



Se desea construir un contenedor (<u>sin tapa</u>) tal como indica la figura, de 36 m^3 de capacidad. Hallar las dimensiones del más económico, es decir, el que emplea menos chapa en su construcción.

① a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{sen}x} - x - 1}{2x^2 - x^3} \overset{0/0}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x \cdot e^{\operatorname{sen}x} - 1}{4x - 3x^2} \overset{0/0}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}x \cdot e^{\operatorname{sen}x} + \cos^2 x \cdot e^{\operatorname{sen}x}}{4 - 6x} = \boxed{\frac{1}{4}}$ 0.25/ 0.25/ 0.5/

b) $\lim_{x\to 0} x^{\operatorname{sen}x} = e^{\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}x \cdot \ln x}$; $0^0 = \text{indet.}$

$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}x \cdot \ln x$; $0 \cdot (-\infty) = \text{indet.}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1/\operatorname{sen}x} \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{-x\cdot\cos x} \overset{0/0}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen}x\cdot\cos x}{-\cos x + (-x)\cdot(-\operatorname{sen}x)} =$ 0.25/ 0.25/

$= \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow$ solve: $e^0 = \boxed{1}$ 0.25/

---

② $f(x) = \begin{cases} -1 + e^x & \text{si } x \le 0 \\ \operatorname{sen}x & \text{si } 0 < x \le \pi \\ -x + \pi & \text{si } x > \pi \end{cases}$

a) Vamos que cada rama es continua en los intervalos en que están definidas.

¿continua en $x=0$?

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} (-1 + e^x) = -1 + 1 = 0$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}x = 0$

$\Rightarrow f(x)$ continua en $x=0$ 0.5/

¿continua en $x=\pi$?

$\lim_{x\to \pi^-} f(x) = \lim_{x\to \pi} \operatorname{sen}x = 0$

$\lim_{x\to \pi^+} f(x) = \lim_{x\to \pi} (-x + \pi) = -\pi + \pi = 0$

$\Rightarrow f(x)$ continua en $x=\pi$ 0.5/

CONCLUSIÓN: $\Rightarrow \boxed{f(x) \text{ continua } \forall \mathbb{R}}$

b) Como $f(x)$ es continua $\forall \mathbb{R}$, puede ser derivable. Estudiémoslo:

¿DERIVABLE en $x=0$?

$f'(0^-) = [-1 + e^x]'_{x=0} = e^x]_{x=0} = 1$

$f'(0^+) = [\operatorname{sen}x]'_{x=0} = \cos x]_{x=0} = 1$

$\Rightarrow \exists f'(0)$ 0.5/

¿DERIVABLE en $x=\pi$?

$f'(\pi^-) = [\operatorname{sen}x]'_{x=\pi} = \cos x]_{x=\pi} = -1$

$f'(\pi^+) = [-x + \pi]'_{x=\pi} = -1$

$\Rightarrow \exists f'(\pi)$ 0.5/

CONCLUSIÓN: $\Rightarrow \boxed{f(x) \text{ derivable } \forall \mathbb{R}}$

---

③ $f(x) = (x+1)^{x-1}$

a) $\ln y = \ln(x+1)^{x-1} = (x-1)\cdot\ln(x+1)$; $\frac{y'}{y} = \ln(x+1) + (x-1)\cdot\frac{1}{x+1}$; $\boxed{y' = (x+1)^{x-1}\cdot\left[\ln(x+1) + \frac{x-1}{x+1}\right]}$ 0.25/ 0.25/ 0.5/

b) $x=0 \to f(0) = 1^{-1} = 1 \to P(0,1)$ 0.25/

$m = f'(0) = 1^{-1}\cdot\left[\ln 1 + \frac{-1}{1}\right] = 1\cdot(-1) = -1$ 0.25/

$y - 1 = -1(x - 0)$; $\boxed{y = -x + 1}$ 0.5/

---

④ $f(x) = \frac{x^2}{x+1} \to D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

a) $f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = 0 \to x^2 + 2x = 0$; $x(x+2) = 0 \to x = 0$; $x = -2$ 0.25/ posibles Mom

$f''(x) = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - (x^2+2x)\cdot 2\cdot(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2x^2 + 4x + 2 - 2x^2 - 4x}{(x+1)^3} = \frac{2}{(x+1)^3}$

$f''(0) > 0 \Rightarrow m(0,0)$ 0.5/

$f''(-2) < 0 \Rightarrow M(-2,-4)$

$\Rightarrow f(x) \uparrow \forall x \in (-\infty,-2) \cup (0,\infty)$ 0.25/

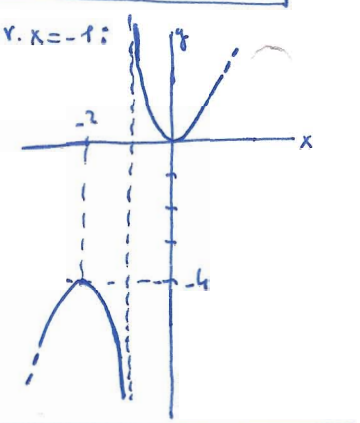
$f(x) \downarrow \forall x \in (-2,0) - \{-1\}$

b) $f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} = 0 \Rightarrow \nexists$ solve $\Rightarrow \boxed{\nexists \text{ P.I.}}$ 0.5/

Estudiamos la curvatura viendo el signo de $f''(x)$ a ambas lados de la A.V. $x=-1$:

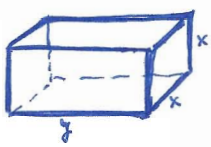
p.ej: $f''(-2) < 0 \Rightarrow \boxed{f(x) \cap \forall x \in (-\infty,-1)}$

$f''(0) > 0 \Rightarrow \boxed{f(x) \cup \forall x \in (-1,\infty)}$ 0.5/



---

⑤



Restricción: $x^2 y = 36$ 0.25/ $\to y = \frac{36}{x^2}$

F.A minimizar: $2x^2 + 3xy = A \to A(x) = 2x^2 + 3x\cdot\frac{36}{x^2} = \boxed{2x^2 + \frac{108}{x}}$ 0.25/

$A'(x) = \boxed{4x - \frac{108}{x^2}} = 0 \to 4x = \frac{108}{x^2}$; $x^3 = \frac{108}{4} = 27 \to \boxed{x = \sqrt[3]{27} = 3\,m}$ 0.5/

Confirmemos que se trata de un mínimo:

$A''(x) = 4 - 108\cdot\frac{-2x}{x^4} = \boxed{4 + \frac{216}{x^3}}$; $A''(3) > 0 \Rightarrow$ mínimo 0.5/

Sustituimos en la restricción

$\boxed{y = \frac{36}{9} = 4\,m}$ 0.5/

EXAMEN 1ª EVALUACIÓN **CURSO 2002-2003**

MATEMÁTICAS II

1. **a)** $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2}$ **b)** $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 1} \right)$

2. Dada

$$f(x) = \begin{cases} x + b & \text{si } x \leq -1 \\ ax^2 - 2x + 2 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ -ax^2 + bx - 6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Se pide: **a)** Hallar **a** y **b** para que sea continua.
b) Para esos valores de **a** y **b** estudiar su derivabilidad.

3. Derivar y simplificar: **a)** $y = \dfrac{\ln x}{x^3}$ **b)** $y = (\text{sen}x)^{1/x}$ **c)** $y = (2x+1)^3 \cdot \sqrt[3]{3x-1}$

4. Dada la ecuación $x^5 - x^4 + x - 1 = 0$ se pide:

a) Aplicando el teorema de Bolzano demostrar que tiene al menos una raíz real e indicar un posible intervalo en el que se encuentre.
b) ¿De qué raíz se trata?

5. Hallar la ecuación de la recta tangente a $f(x) = (3x - 2x^2) \cdot e^x$ en $x = 0$

6. Estudiar si la función $y = 7 + x \cdot (x+2)^2$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en $[-2, 0]$. En caso afirmativo hallar el valor o los valores intermedios en que se verifica el teorema.

INSTRUCCIONES: *Se debe contestar obligatoriamente a las tres primeras preguntas, y elegir dos cualesquiera de entre las tres últimas (es decir, cinco preguntas en total)*

① a) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^4+3x^3+x^2-3x-2} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(x^2+3x+2)}{(x+1)(x^3+2x^2-x-2)} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x^2+x-2)} = \dfrac{1}{-2} = \boxed{-\dfrac{1}{2}}$ 0.25 / 0.25 / 0.5

	1	4	5	2
-1		-1	-3	-2
	1	3	2	0
-1		-1	2	
	1	2	0	

	1	3	1	-3	-2
-1		-1	-2	1	2
	1	2	-1	-2	0
-1		-1	-1	2	
	1	1	-2	0	

b) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+1}\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2+1}}$ 0.25

$= \lim_{x\to\infty} \dfrac{(x^2+3x)-(x^2+1)}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{3x-1}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}} \overset{\infty/\infty}{=}$ 0.25

$= \lim_{x\to\infty} \dfrac{\frac{3x}{x} - \frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{3-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \boxed{\dfrac{3}{2}}$ 0.25 / 0.25

---

② $f(x) = \begin{cases} x+b & \text{si } x \le -1 \\ ax^2-2x+2 & \text{si } -1 < x \le 2 \\ -ax^2+bx-6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) continua en $x=-1$:

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1} (x+b) = -1+b$

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1} (ax^2-2x+2) = a+4$

$\Rightarrow -1+b = a+4 \Rightarrow \boxed{-a+b=5}$ 0.25

continua en $x=2$:

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2} (ax^2-2x+2) = 4a-2$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} (-ax^2+bx-6) = -4a+2b-6$

$\Rightarrow 4a-2 = -4a+2b-6 \Rightarrow 8a-2b=-4 \Rightarrow \boxed{4a-b=-2}$ 0.25

$-a+b=5$

$4a-b=-2$

$3a = 3 \Rightarrow \boxed{a=1} \rightarrow \boxed{b=6}$ 0.5

$f(x) = \begin{cases} x+6 & \text{si } x \le -1 \\ x^2-2x+2 & \text{si } -1 < x \le 2 \\ -x^2+6x-6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) ¿derivable en $x=-1$?:

$f'(-1^-) = [x+6]'_{x=-1} = 1$

$f'(-1^+) = [x^2-2x+2]'_{x=-1} = 2x-2]_{x=-1} = -4$

$\Rightarrow \nexists f'(-1)$ 0.5

¿derivable en $x=2$?:

$f'(2^-) = [x^2-2x+2]'_{x=2} = 2x-2]_{x=2} = 2$

$f'(2^+) = [-x^2+6x-6]'_{x=2} = -2x+6]_{x=2} = 2$

$\Rightarrow \boxed{\exists f'(2)}$ 0.5

---

③ a) $y = \dfrac{\ln x}{x^3} \xrightarrow{y=u:v} y' = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot x^3 - \ln x \cdot 3x^2}{x^6} = \dfrac{x^2-3x^2\ln x}{x^6} = \boxed{\dfrac{1-3\ln x}{x^4}}$ 0.5

b) $y = (\operatorname{sen} x)^{1/x}$ derivación logarítmica $\ln y = \ln(\operatorname{sen} x)^{1/x} = \dfrac{1}{x}\ln \operatorname{sen} x$; $(\ln y)' = \left[\dfrac{1}{x}\cdot \ln \operatorname{sen} x\right]'$; $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{-1}{x^2}\cdot \ln \operatorname{sen} x + \dfrac{1}{x}\cdot \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{-\ln \operatorname{sen} x}{x^2} + \dfrac{\operatorname{cotg} x}{x}$ ($\cos x / \operatorname{sen} x = \operatorname{cotg} x$)

$\boxed{y' = \left(\dfrac{-\ln \operatorname{sen} x}{x^2} + \dfrac{\operatorname{cotg} x}{x}\right)(\operatorname{sen} x)^{1/x}}$ 0.75

c) $y = (2x+1)^3\cdot(3x-1)^{1/3}$

$y' = 3(2x+1)^2\cdot 2\cdot(3x-1)^{1/3} + (2x+1)^3\cdot\frac{1}{3}(3x-1)^{-2/3}\cdot 3 = 6(2x+1)^2\sqrt[3]{3x-1} + \dfrac{(2x+1)^3}{\sqrt[3]{(3x-1)^2}} = \boxed{\dfrac{6(2x+1)^2\cdot\sqrt[3]{(3x-1)^3} + (2x+1)^3}{\sqrt[3]{(3x-1)^2}}}$ 0.75

---

④ a) $x^5-x^4+x-1=0 \rightarrow f(x) = x^5-x^4+x-1$ Continua por ser un polinomio 0.5

$f(0) = -1 < 0$

$f(1) = 0$

$f(2) > 0$

$\Rightarrow \boxed{\exists \text{ raíz en } [0,2]}$ (vemos casualmente que la raíz es $x=1$!) 0.5 / 1

b)

	1	-1	0	0	1	-1
1		1	0	0	0	1
	1	0	0	0	1	0

raíz

$\rightarrow x^4+1=0$; $x^4=-1$ ∄ sol.

---

⑤ $f(x) = (3x-2x^2)\cdot e^x$ en $x=0 \rightarrow f(0)=0$ 0.5

$f'(x) = (3-4x)e^x + (3x-2x^2)e^x$; $f'(0) = 3$ 0.5

$y-0 = 3(x-0)$; $\boxed{y=3x}$ 1

---

⑥ $y = 7 + x\cdot(x+2)^2$ en $[-2,0] \rightarrow f(x) = 7 + x(x^2+4x+4) = x^3+4x^2+4x+7$

$f(x)$ continua y derivable por ser polinómica; $f(-2) = f(0) = 7$ 0.5

$\Rightarrow \exists x \in (-2,0) \ / \ f'(x) = 0$; $f'(x) = 3x^2+8x+4 = 0$ 0.5

$\boxed{x_1 = -\frac{2}{3}}$ 1

$x_2 = -2$ descartada pq. $\notin (-2,0)$