

Alumno: SOLUCIONES

Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. No usar bolígrafo rojo. No se admitirán ejercicios a lápiz.

1. (Jun 2005) Calcular:

(2,5 pts.)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\tan x - \sin x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 + \tan^2 x - \cos x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \tan x (1 + \tan^2 x) + \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \tan x + 2 \tan^3 x + \sin x}$$

$$\stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2(1 + \tan^2 x) + 6 \tan^2 x (1 + \tan^2 x) + \cos x} = \frac{1}{2+1} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

2,5

2. (Jun 2002) Dada $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3}$, se pide:

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ ¡LA FUNCIÓN NO ESTÁ DEFINIDA EN $x=0$!
 $f(x)$ es simétrica impar pues $f(-x) = -f(x)$

a) Cortes con los ejes.

(0,25 pts.)

CORTES EN x : $y=0 \Rightarrow \frac{x^2-1}{x^3}=0 \Rightarrow x^2-1=0, x^2=1 \Rightarrow x=1 \rightarrow (1,0)$
 $\searrow x=-1 \rightarrow (-1,0)$

CORTES EN y : $x=0 \Rightarrow y = \frac{-1}{0} = \infty \Rightarrow$ no corta al eje y

b) Extremos relativos.

(0,75 pts.)

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x^3 - (x^2-1) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{2x^2 - 3x^2 + 3}{x^4} = \frac{3-x^2}{x^4} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3-x^2=0, x^2=3 \Rightarrow x=\sqrt{3} \text{ o } x=-\sqrt{3} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} x=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3} \end{matrix}} \right\} \text{ posibles Mo m}$$

$$f''(x) = \frac{-2x \cdot x^4 - (3-x^2) \cdot 4x^3}{x^5} = \frac{-2x^2 - 12 + 4x^2}{x^5} = \frac{2x^2 - 12}{x^5}$$

$$f''(\sqrt{3}) = \frac{6-12}{(\sqrt{3})^5} = \frac{-6}{3\sqrt{3}} < 0 \Rightarrow M\left(\sqrt{3}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right) \quad f(\sqrt{3}) = \frac{2}{(\sqrt{3})^3} = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$f''(-\sqrt{3}) = \frac{6-12}{(-\sqrt{3})^5} = \frac{-6}{-3\sqrt{3}} > 0 \Rightarrow m\left(-\sqrt{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$$

Se baja 0,05 por no racionalizar o por usar decimales

c) Puntos de inflexión.

(0,75 ptos.)

$$f''(x) = \frac{2x^2-12}{x^3} = 0 \Rightarrow 2x^2-12=0, x^2-6=0, x^2=6 \begin{cases} x=\sqrt{6} \\ x=-\sqrt{6} \end{cases} \text{ posibles P.I.}$$

$$f'''(x) = \frac{4x \cdot x^3 - (2x^2-12) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{4x^4 - 6x^3 + 36x^2}{x^6} = \frac{4x^2 - 6x + 36}{x^4}$$

$$f'''(\sqrt{6}) = \frac{60-6 \cdot 6}{+} > 0 \Rightarrow \text{P.I. } \left(\sqrt{6}, \frac{5\sqrt{6}}{36}\right) \text{ cóncavo-convexo}$$

$$f'''(-\sqrt{6}) = \frac{60-6 \cdot 6}{+} > 0 \Rightarrow \text{P.I. } \left(-\sqrt{6}, -\frac{5\sqrt{6}}{36}\right) \text{ cóncavo-convexo}$$

se baja 0,05 por no racionalizar o por usar decimales

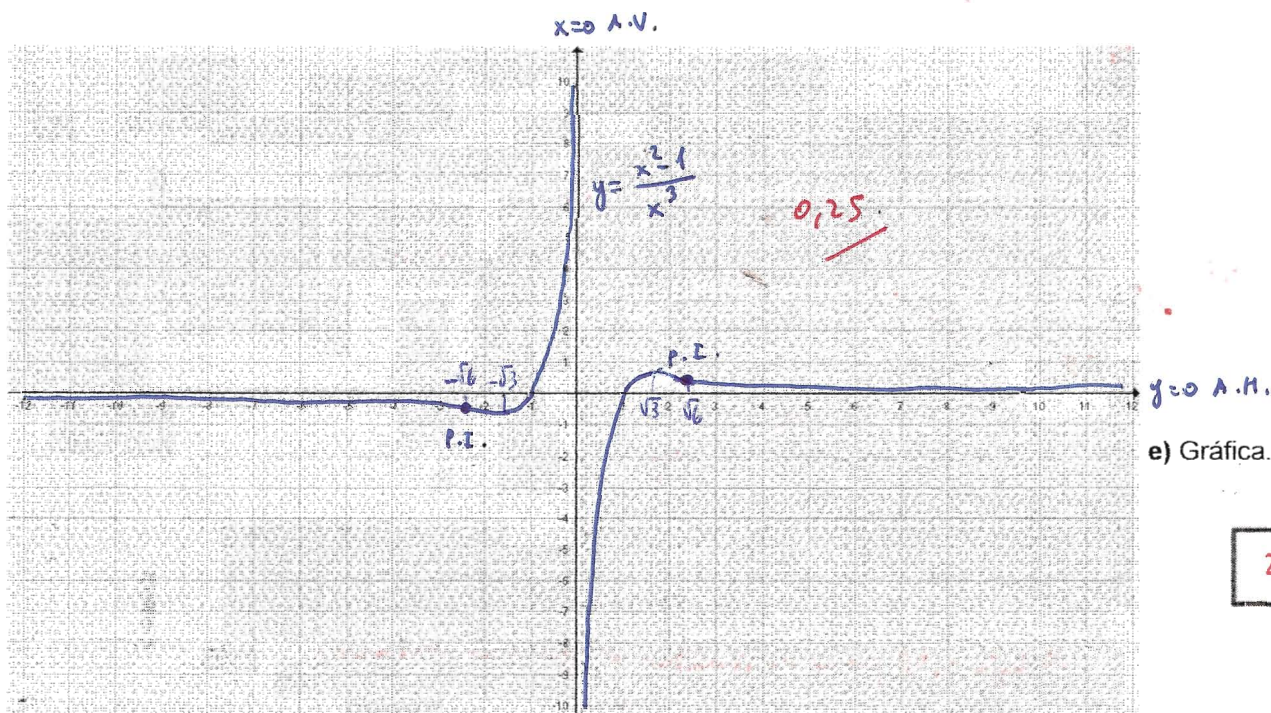
d) Asíntotas.

(0,5 ptos.)

$$\text{¿A.H.? } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{x^3} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow y=0 \text{ A.H.} \Rightarrow \text{A.O.}$$

¿A.V.? Vemos que el denominador se anula en $x=0$, no así el numerador; comprobemos, por tanto, si $x=0$ es A.V.:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-1}{x^3} = \frac{-1}{0} = \infty \text{ o } -\infty \Rightarrow x=0 \text{ A.V.}$$



e) Gráfica. (0,25 ptos.)

2,5

3. Considerar $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - \frac{45}{4}x + \frac{17}{16}$

- a) Estudiar si $f(x)$ verifica las hipótesis del teorema de Bolzano en el intervalo $[-2, 1]$. En caso afirmativo, encontrar **razonadamente** un intervalo de amplitud 1 contenido en el anterior en el que $f(x)$ tenga al menos una raíz. (1,25 pto.)

0,25 $f(x)$ CONTINUA $\forall x \in [-2, 1]$ por ser un polinomio

$$\left. \begin{aligned} f(-2) &= -32 + 12 + \frac{45}{2} + \frac{17}{16} = -20 + \frac{45}{2} + \frac{17}{16} = \frac{57}{16} > 0 \\ f(1) &= 4 + 3 - \frac{45}{4} + \frac{17}{16} = 7 - \frac{45}{4} + \frac{17}{16} = -\frac{51}{16} < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \exists c \in (-2, 1) / f(c) = 0$$

↑
se baja 0,15 si se indica mal

$$f(-1) = -4 + 3 + \frac{45}{4} + \frac{17}{16} = -1 + \frac{45}{4} + \frac{17}{16} > 0$$

$$f(0) = \frac{17}{16} > 0$$

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 4 + 3 - \frac{45}{4} + \frac{17}{16} = 7 - \frac{45}{4} + \frac{17}{16} < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\exists c \in (0, 1) / f(c) = 0}$$

↑
se baja 0,25 si se indica mal

- b) Estudiar si $f(x)$ cumple las condiciones del teorema de Rolle en $[-5/4, 7/4]$. En tal caso, hallar el valor o valores intermedios que verifican la tesis del teorema. (1,25 pto.)

$f(x)$ CONTINUA $\forall x \in [-\frac{5}{4}, \frac{7}{4}]$ por ser polinómica

$f(x)$ DERIVABLE $\forall x \in (-\frac{5}{4}, \frac{7}{4})$ p.e. $f'(x) = 12x^2 + 6x - \frac{45}{4}$ está definida siempre

$$\begin{aligned} f(-\frac{5}{4}) &= 4 \cdot (-\frac{5}{4})^3 + 3 \cdot (-\frac{5}{4})^2 - \frac{45}{4} \cdot (-\frac{5}{4}) + \frac{17}{16} = -4 \cdot \frac{125}{64} + 3 \cdot \frac{25}{16} + \frac{225}{16} + \frac{17}{16} = \\ &= -\frac{125}{16} + \frac{75}{16} + \frac{225}{16} + \frac{17}{16} = \frac{192}{16} = 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\frac{7}{4}) &= 4 \cdot (\frac{7}{4})^3 + 3 \cdot (\frac{7}{4})^2 - \frac{45}{4} \cdot \frac{7}{4} + \frac{17}{16} = 4 \cdot \frac{343}{64} + 3 \cdot \frac{49}{16} - \frac{315}{16} + \frac{17}{16} = \\ &= \frac{343}{16} + \frac{147}{16} - \frac{315}{16} + \frac{17}{16} = \frac{192}{16} = 12 \end{aligned}$$

se baja 0,15 si se indica mal

$$\Rightarrow \exists c \in (-\frac{5}{4}, \frac{7}{4}) / f'(c) = 0$$

Vamos a calcular el (o los) pto. intermedio en el que se anula la derivada:

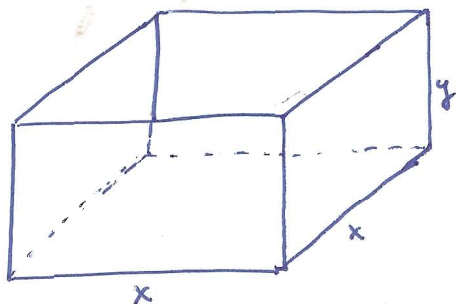
$$f'(x) = 12x^2 + 6x - \frac{45}{4} = 0 \Rightarrow 48x^2 + 24x - 45 = 0 \Rightarrow 16x^2 + 8x - 15 = 0$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 960}}{32} = \frac{-8 \pm \sqrt{1024}}{32} = \frac{-8 \pm 32}{32} \Rightarrow x_1 = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$$

$$x_2 = -\frac{40}{32} = -\frac{5}{4} \text{ descartada p.e. } f'(-\frac{5}{4}) \neq 0$$

2,5

4. (Sept 2001) Hallar las dimensiones de un depósito, abierto superiormente, en forma de prisma recto de base cuadrada, de 1000 m^3 de capacidad, que tenga un revestimiento interior de coste mínimo. El precio del m^2 de revestimiento lateral es de 100 €, y del fondo 200 €. **Hallar también dicho coste.** (2,5 ptos.)



Restricción:

$$x^2 y = 1000$$

Función a minimizar:

$$C(x, y) = \underbrace{200x^2}_{\text{precio del fondo}} + \underbrace{4xy \cdot 100}_{\text{precio de cada cara lateral}} = 200x^2 + 400xy$$

$$y = \frac{1000}{x^2} \Rightarrow C(x) = 200x^2 + 400x \cdot \frac{1000}{x^2} = 200x^2 + \frac{400000}{x}$$

$$C'(x) = 400x - \frac{400000}{x^2} = 0; \quad 400x = \frac{400000}{x^2}; \quad x^3 = \frac{400000}{400} = 1000$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{1000} = 10 \text{ m} \quad \xrightarrow[\text{en (*)}]{\text{sustituimos}} \quad y = \frac{1000}{10^2} = 10 \text{ m}$$

Comprobemos que se trata de un mínimo:

$$C''(x) = 400 - 400000 \cdot \frac{-2x}{x^4} = 400 + \frac{800000}{x^3}$$

$$C''(10) = 400 + \frac{800000}{1000} > 0 \Rightarrow \text{se trata de un mínimo}$$

Calculamos, por último, el coste de un depósito tal:

$$C(10, 10) = \underbrace{200 \cdot 100}_{\text{precio del fondo}} + \underbrace{400 \cdot 100}_{\text{precio de las 4 caras laterales}} = 20000 + 40000 = 60000 \text{ €}$$

Soluc: Se trata de un cubo de 10 m. de arista cuyo coste será 60.000 €