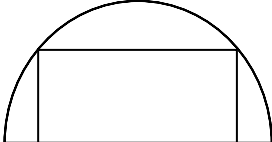


 I.E.S. "Fernando de Mena" Secuillones (Ciudad Real)	EXAMEN 2ª EVALUACIÓN MATEMÁTICAS II	2º BACH. A+C CURSO 2007-2008	 Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha Consejería de Educación y Ciencia
---	--	---	--

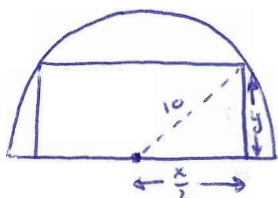
1.  (UCLM, septiembre 2003) En un semicírculo de radio 10 m se quiere inscribir un rectángulo, como muestra la figura. Calcular las dimensiones del rectángulo de área máxima. (2,5 puntos)

2. Dada $f(x)=(x+2)e^x$, se pide: **a)** Dom(f) y cortes con los ejes.
b) M y m, e intervalos de crecimiento (sin usar decimales).
c) P.I. e intervalos de curvatura (sin usar decimales).
d) Asíntotas.
e) Representación gráfica.
f) Hallar el área del recinto limitado por la curva anterior, ambos ejes y la recta $x=1$ (2,5 puntos)

3. **a)** (UCLM, junio 2007) $\int \frac{2}{1+\sqrt{x}} dx$ **b)** $\int \frac{x+1}{x^2+25} dx$
(puede ayudar hacer un cambio de variable adecuado) (2,5 puntos)

4. **a)** (UCLM, septiembre 2007) $\int \frac{x}{(x+1)^3} dx$ **b)** $\int \cos^5 x dx$ (2,5 puntos)

①



Restricción: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 100$ $\left\{ \begin{array}{l} x^2 + 4y^2 = 400; x = \sqrt{400 - 4y^2} \quad (*) \\ \text{F.A. Maximizar: } A = x \cdot y \end{array} \right. \Rightarrow A(y) = y \cdot \sqrt{400 - 4y^2} = \sqrt{400y^2 - 4y^4}$

$A'(y) = \frac{800y - 16y^3}{2\sqrt{400y^2 - 4y^4}} = 0 \Rightarrow 800y - 16y^3 = 0; 16y(50 - y^2) = 0 \Rightarrow y = 0$ descartado

$y^2 = 50 \Rightarrow y = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \text{ m}$
 $x = \sqrt{400 - 200} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \text{ m}$

$A''(y) = \frac{400y - 8y^3}{\sqrt{400y^2 - 4y^4}} \Rightarrow A''(y) = \frac{(400 - 24y^2)\sqrt{400y^2 - 4y^4} - (400y - 8y^3) \cdot 2\sqrt{400y^2 - 4y^4}}{400y^2 - 4y^4}$

$A''(5\sqrt{2}) = \frac{(400 - 1200) \cdot \sqrt{20000 - 40000}}{20000 - 10000} < 0 \Rightarrow$ se confirma que es un M

② $f(x) = (x+2)e^x$

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ Pz-os d producto de dos funciones definidos $\forall \mathbb{R}$

cuando $f(x) = 0 \Rightarrow (x+2)e^x = 0 \Rightarrow x+2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow (-2, 0)$

" " $y = 0 \Rightarrow y = 2 \cdot e^0 = 2 \Rightarrow (0, 2)$

b) $f'(x) = e^x + (x+2)e^x = (x+3)e^x = 0 \Rightarrow x+3 = 0 \Rightarrow x = -3$ posible M o m

$f''(x) = e^x + (x+3)e^x = (x+4)e^x; f''(-3) = e^{-3} > 0 \Rightarrow m(-3, -\frac{1}{e^3})$
 $f(x) \nearrow \forall x \in (-\infty, -3)$
 $f(x) \searrow \forall x \in (-3, \infty)$

c) $f''(x) = (x+4)e^x = 0 \Rightarrow x+4 = 0 \Rightarrow x = -4$ posible P.I.

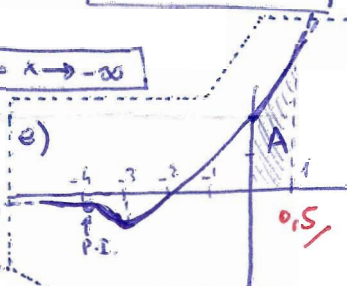
$f'''(x) = e^x + (x+4)e^x = (x+5)e^x; f'''(-4) = e^{-4} > 0 \Rightarrow \text{P.I. } (-4, -\frac{2}{e^4})$
 $f(x) \nearrow \forall x \in (-\infty, -4)$
 $f(x) \searrow \forall x \in (-4, \infty)$

d) ¿d.N.? $\lim_{x \rightarrow \infty} (x+2)e^x = \infty \cdot \infty = \infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+2)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{e^{-x}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \frac{1}{-\infty} = 0^- \Rightarrow y = 0 \text{ A.N. cuando } x \rightarrow -\infty$

¿A.V.? $\nexists$ pg. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

¿A.O.? $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2)e^x}{x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + (x+2)e^x}{1} = \infty \Rightarrow \nexists \text{ A.O.}$



f) $A = \int_0^1 (x+2)e^x dx = (x+2)e^x - \int_0^1 e^x dx = (x+2)e^x - e^x = (x+1)e^x \Big|_0^1 = (2e-1)u^2$

$u = x+2 \rightarrow du = dx$

$dv = e^x dx \rightarrow v = e^x$

③ a) $\int \frac{2}{1+\sqrt{x}} dx = \int \frac{4t}{1+t} dt = 4 \int \frac{t}{t+1} dt = 4 \int \frac{t+1-1}{t+1} dt = 4 \left[\int \frac{t+1}{t+1} dt - \int \frac{1}{t+1} dt \right] = 4[t - \ln(t+1)] =$

$\text{Cambio de variable } x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt$
 $= 4[\sqrt{x} - \ln(\sqrt{x}+1)] + C_1$

b) $\int \frac{x+1}{x^2+25} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+25} dx = \frac{1}{2} \left[\int \frac{2x}{x^2+25} dx + \int \frac{2}{x^2+25} dx \right] = \frac{1}{2} \left[\ln(x^2+25) + 2 \cdot \int \frac{1}{25(\frac{x^2}{25}+1)} dx \right] =$

$= \frac{1}{2} \left[\ln(x^2+25) + \frac{2}{25} \cdot \int \frac{dx}{(\frac{x}{5})^2+1} \right] = \frac{1}{2} \left[\ln(x^2+25) + \frac{2}{25} \cdot 5 \cdot \int \frac{1}{(\frac{x}{5})^2+1} d(\frac{x}{5}) \right] = \frac{1}{2} \left[\ln(x^2+25) + \frac{2}{5} \arctg \frac{x}{5} \right] =$

$= \ln \sqrt{x^2+25} + \frac{1}{5} \arctg \frac{x}{5} + C_1$

④ a) $I = \int \frac{x}{(x+1)^3} dx$; $\frac{x}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}$; $x = A(x+1)^2 + B(x+1) + C$
raíz x=1 triple mem

$x = -1 \rightarrow \underline{-1 = C}$

$x = 0 \rightarrow 0 = A + B + C$ $\left\{ \begin{array}{l} A + B = 1 \\ 4A + 2B = 2 \end{array} \right. \rightarrow \begin{array}{l} -2A - 2B = -2 \\ 4A + 2B = 2 \end{array}$
 $x = 1 \rightarrow 1 = 4A + 2B + C$ $\left\{ \begin{array}{l} A + B = 1 \\ 4A + 2B = 2 \end{array} \right. \rightarrow \frac{4A + 2B = 2}{2A} = 0 \rightarrow \underline{A = 0} \rightarrow \underline{B = 1}$ 0,25

$I = \int \frac{1}{(x+1)^2} dx - \int \frac{1}{(x+1)^3} dx = \int (x+1)^{-2} dx - \int (x+1)^{-3} dx = \frac{(x+1)^{-1}}{-1} - \frac{(x+1)^{-2}}{-2} = \boxed{-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} + C}$ 0,5

(Nota: también se puede resolver mediante el cambio $x+1 = t$)

b) $\int \cos^5 x \cdot dx = \int (\sqrt{1-t^2})^4 \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int (\sqrt{1-t^2})^3 dt = \int (1-t^2)^2 dt = \int (1-2t^2+t^4) dt = t - 2\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} =$ 0,25 0,25

integrando usando $\cos x \Rightarrow$ Cambio de var $\sin x = t$

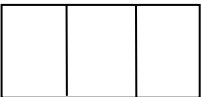
$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-t^2}$

$\cos x \cdot dx = dt$

$dx = \frac{dt}{\cos x}$ 0,25

$= \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + C$ 0,5

	RECUPERACIÓN 2ª EVALUACIÓN MATEMÁTICAS II	2º BACH. A+C CURSO 2007-2008	 Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha Consejería de Educación y Ciencia
---	--	---	--

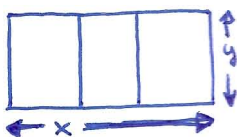
1.  (UCLM, junio 2002) Un solar rectangular de 11.250 m² se divide en tres zonas rectangulares iguales (como muestra la figura) para venderlo. Se valla el borde del campo y la separación de las zonas. Calcular las dimensiones del solar para que la longitud de valla utilizada sea mínima. (2,5 puntos)

2. Dada $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$, se pide: a) Dom(f) y cortes con los ejes.
b) M y m, e intervalos de crecimiento (sin usar decimales).
c) P.I. e intervalos de curvatura (sin usar decimales).
d) Asíntotas.
e) Representación gráfica.
f) Hallar el área del recinto limitado por la curva anterior, el eje x y las rectas verticales $x = \sqrt{3}$ y $x=2$ (2,5 puntos)

3. a) $\int x^2 \sqrt{x+1} dx$ b) (UCLM, junio 2006) $\int \frac{x+2}{x^2 - 2x + 1} dx$
(NOTA: un cambio de variable puede ser útil) (2,5 puntos)

4. a) $\int \frac{x+3}{x^2 - 2x + 5} dx$ b) $\int x^3 \cos x^2 dx$ (2,5 puntos)

①



Restricción: $x \cdot y = 11250$ $\rightarrow y = \frac{11250}{x} \Rightarrow L(x) = 2x + \frac{45000}{x}$;
 F.A. minimizar: $L = 2x + 4y$ $\rightarrow L'(x) = 2 - \frac{45000}{x^2} = 0$; $2 = \frac{45000}{x^2}$; $x^2 = 22500$ $\rightarrow x = 150 \text{ m.}$ $\downarrow$ $y = 75 \text{ m.}$

$L''(x) = -45000 \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)' = -45000 \cdot \frac{-2x}{x^4} = \frac{90000}{x^3}$; $L''(150) > 0 \Rightarrow$ se confirma que es un mínimo

②

$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ a) $x^2-1=0$; $x^2=1$; $x=\pm 1 \Rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

Corte en x: $y=0 \Rightarrow \frac{x^3}{x^2-1}=0$; $x^3=0$; $x=0 \rightarrow (0,0)$ (no es necesario, por tanto, hallar el corte con el eje y, pues saldremos de nuevo al mismo punto)

b) $f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = 0 \Rightarrow x^4 - 3x^2 = 0$; $x^2(x^2-3)=0 \rightarrow x=0$ posibles
 $\rightarrow x=\pm\sqrt{3}$ Mon

$f''(x) = \frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2 - (x^4-3x^2) \cdot 2(x^2-1) \cdot 2x}{(x^2-1)^4} = \frac{4x^5-4x^3-6x^3+6x - (4x^5-12x^3)}{(x^2-1)^3} = \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}$

$f''(0) = 0 \rightarrow$ este método no decide
 $f''(\sqrt{3}) = \frac{+}{+} > 0 \Rightarrow M(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$
 $f''(-\sqrt{3}) = \frac{-}{+} < 0 \Rightarrow M(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$

$f(x) \nearrow \forall x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$
 $f(x) \searrow \forall x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) - \{\pm 1\}$

c) $f'(x) = \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3} = 0 \Rightarrow 2x^3+6x=0$; $2x(x^2+3)=0 \rightarrow x=0$ posible P.F.
 $\rightarrow x^2+3=0$ no soluc.

$f''(x) = \frac{(6x^2+6)(x^2-1)^3 - (2x^3+6x) \cdot 3(x^2-1)^2 \cdot 2x}{(x^2-1)^6} = \frac{6x^4-6-(12x^4+36x^2)}{(x^2-1)^4} = \frac{-6x^4-36x^2-6}{(x^2-1)^4}$

$f'''(0) = \frac{-}{+} < 0 \Rightarrow \text{P.I.}(0,0)$

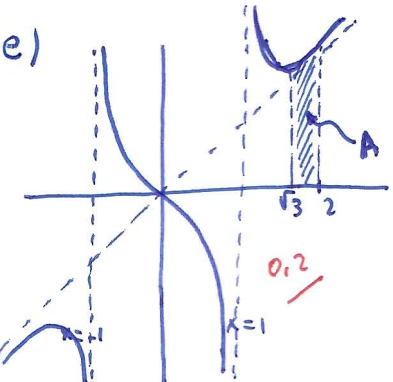
$f(x) \nearrow \forall x \in (-\infty, -1) \cup (0,1)$
 $f(x) \searrow \forall x \in (-1,0) \cup (1,\infty)$

d) ¿A.N.? $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2-1} \sim \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2} = \infty \Rightarrow \text{A.N.}$

¿A.V.? $x=\pm 1$ por anulaban el denomin. pero no el num.

¿A.O.? $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(x^2-1)x} \sim \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$
 $n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1} = 0$

$y=x$ A.O.



F) $A = \int_1^2 \frac{x^3}{x^2-1} dx = \int_1^2 x dx + \int_1^2 \frac{x}{x^2-1} dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{2x}{x^2-1} dx =$
 $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln(x^2-1) = \frac{x^2}{2} + \ln \sqrt{x^2-1}$

$\frac{x^3}{x^2-1} \Rightarrow x^3 = x(x^2-1) + x$
 $\frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1}$

$= \left(2 + \ln \sqrt{3} \right) - \left(\frac{3}{2} + \ln \sqrt{2} \right) = \frac{1}{2} + \ln \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} + \ln \frac{\sqrt{6}}{2}$

③ a) $\int x^2 \sqrt{x+1} dx = \int (t^2-1)^2 \cdot t \cdot 2t dt = 2 \int t^2 (t^4 - 2t^2 + 1) dt = 2 \left(\int t^6 dt - 2 \int t^4 dt + \int t^2 dt \right) =$
 change of var: $x+1 = t^2 \Rightarrow x = t^2 - 1$
 $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow dx = 2t \cdot dt$
 $= 2 \left(\frac{t^7}{7} - 2 \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{x+1}^7}{7} - 2 \frac{\sqrt{x+1}^5}{5} + \frac{\sqrt{x+1}^3}{3} \right) + C_1$

b) $\int \frac{x+2}{x^2-2x+1} dx = \int \frac{x+2}{(x-1)^2} dx$; $\frac{x+2}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$; $x+2 = A(x-1) + B$
 $x=1 \Rightarrow B=3$
 $x=0 \Rightarrow 2 = -A + B$; $2 = -A + 3$; $A=1$
 $I = \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{3}{(x-1)^2} dx = \ln(x-1) + 3 \int (x-1)^{-2} dx = \ln(x-1) + 3 \frac{(x-1)^{-1}}{-1} = \ln(x-1) - \frac{3}{x-1} + C_1$

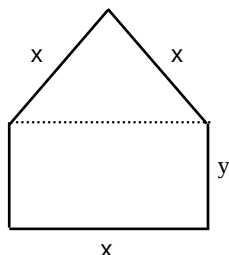
④ a) $\int \frac{x+3}{x^2-2x+5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+6}{x^2-2x+5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x-2+8}{x^2-2x+5} dx = \frac{1}{2} \left[\int \frac{2x-2}{x^2-2x+5} dx + 8 \int \frac{dx}{x^2-2x+5} \right] = \frac{1}{2} \left[\ln(x^2-2x+5) + 8 \int \frac{dx}{x^2-2x+5} \right]$
 $\frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$
 change of var: $x-1 = 2t \Rightarrow x = 2t+1$
 $dx = 2 \cdot dt$
 $\int \frac{dx}{x^2-2x+5} = \int \frac{2 \cdot dt}{(2t+1)^2 - 2(2t+1) + 5} = 2 \int \frac{dt}{4t^2 + 4t + 1 - 4t - 2 + 5} = 2 \int \frac{dt}{4t^2 + 4} =$
 $= \frac{2}{4} \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2} \arctan t = \frac{1}{2} \arctan \frac{x-1}{2}$

substitution in (4): $I = \frac{1}{2} \left[\ln(x^2-2x+5) + 8 \arctan \frac{x-1}{2} \right] = \ln \sqrt{x^2-2x+5} + 4 \arctan \frac{x-1}{2} + C_1$

b) $\int x^3 \cdot \cos x^2 \cdot dx = \frac{1}{2} x^2 \sin x^2 - \frac{1}{2} \int 2x \cdot \sin x^2 dx = \frac{x^2 \cdot \sin x^2}{2} - \frac{1}{2} (-\cos x^2) = \frac{x^2 \sin x^2}{2} + \frac{\cos x^2}{2} + C_1$
 $u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$
 $v = x \cdot \cos x^2 \Rightarrow v = \int x \cdot \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \int 2x \cdot \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sin x^2$

 I.E.S. "Fernando de Mena"	EXAMEN 2ª EVALUACIÓN MATEMÁTICAS II	2º BACH. A CURSO 2005-2006	 Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha
--	--	---	---

1.



Se considera una ventana rectangular en la que el lado superior ha sido sustituido por un triángulo equilátero, como indica la figura. Sabiendo que el perímetro de la ventana es 6,6 m, hallar sus dimensiones para que su superficie sea máxima.

2. Resolver: $\int \frac{2x+5}{x^2-4x+13} dx$

3. Resolver: $\int \frac{dx}{e^x+1}$ (Ayuda: hacer el cambio $e^x=t$)

4. Resolver: $\int x^3 \cos x^2 dx$

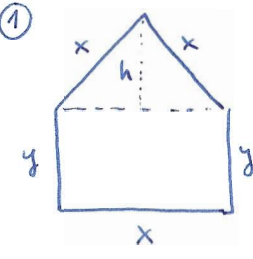
5. Representar las funciones $f(x)=5x^3-4x$ y $g(x)=x$, y hallar el área del recinto que delimitan.

6. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, se pide: **a)** Calcular A^2 y A^3
b) A partir de lo anterior, hallar razonadamente (¡no por cálculo directo!) A^4 , A^5 y A^6
c) Razonar cuánto valdría A^{18}

7. (PAU UCLM junio 2002) Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$, calcular el valor de los siguientes

determinantes: **a)** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a+2 & b+2 & c+2 \\ \frac{x}{3} & \frac{y}{3} & \frac{z}{3} \end{vmatrix}$

INSTRUCCIONES: Se podrá bajar la nota por mala presentación (desorden en las respuestas, mala caligrafía, tachones, etc.) y faltas de ortografía y/o sintaxis. Todas las preguntas puntúan igual. ¡Buena suerte!



$$x^2 = h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2; \quad x^2 = h^2 + \frac{x^2}{4}; \quad x^2 - \frac{x^2}{4} = h^2; \quad \frac{3x^2}{4} = h^2 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Restricción: $3x + 2y = 6,6$ 0.25/
 Función a Maximizar: $S = xy + \frac{1}{2}x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x = xy + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ 0.25/

$$S(x) = x(3,3 - 1,5x) + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = 3,3x - 1,5x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \Rightarrow S'(x) = 3,3 - 3x + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2x =$$

$$= 3,3 - 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}x = 0 \Rightarrow 3,3 = 3x - \frac{\sqrt{3}}{2}x; \quad 3,3 = \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)x \Rightarrow \boxed{x = \frac{3,3}{3 - \sqrt{3}/2} \approx 1,55 \text{ m}} \quad \text{0.25/}$$

sustituir en (*) $\Rightarrow \boxed{y \approx 0,98 \text{ m}}$ 0.25/; $S''(x) = \frac{-12 + 2\sqrt{3}}{4} < 0 \Rightarrow$ se confirma que es un máximo 0.25/

$$\textcircled{2} \int \frac{2x+5}{x^2-4x+13} dx = \int \frac{2x-4+9}{x^2-4x+13} dx = \int \frac{2x-4}{x^2-4x+13} dx + \int \frac{9}{x^2-4x+13} dx = \ln(x^2-4x+13) + 9 \cdot \int \frac{dx}{x^2-4x+13} (*)$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i \Rightarrow \text{cambio de variable } x-2 = 3t \Rightarrow dx = 3 dt$$

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+13} = \int \frac{3 dt}{(2+3t)^2 - 4(2+3t) + 13} = 3 \cdot \int \frac{dt}{4+12t+9t^2-8-12t+13} = 3 \int \frac{dt}{9t^2+9} = \frac{3}{9} \int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{1}{3} \operatorname{arctg} t = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{3} \quad \text{0.75/}; \quad \text{sustituir en (*): } I = \boxed{\ln(x^2-4x+13) + 3 \operatorname{arctg} \frac{x-2}{3} + C} \quad \text{0.25/}$$

$$\textcircled{3} \int \frac{dx}{e^x+1}; \quad \text{cambio de variable } e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$$

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{dt/t}{t+1} = \int \frac{dt}{t(t+1)} \quad \text{0.25/}; \quad \frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1}; \quad 1 = A(t+1) + B \cdot t$$

$\begin{matrix} \text{antes } t=0 \\ t=-1 \end{matrix}$
 $t=0 \Rightarrow 1=A$
 $t=-1 \Rightarrow 1=-B \Rightarrow B=-1$

$$\int \frac{dt}{t(t+1)} = \int \frac{1}{t} dt + \int \frac{-1}{t+1} dt = \ln t - \ln(t+1) = \ln e^x - \ln(e^x+1) = \boxed{x - \ln(e^x+1) + C} \quad \text{0.5/} \quad \text{0.25/}$$

$$\textcircled{4} \int x^3 \cos x^2 dx$$

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$$

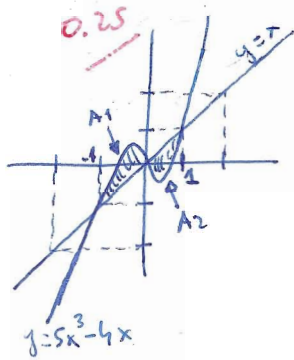
$$dv = x \cos x^2 dx \Rightarrow v = \int x \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \int 2x \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sin x^2 \quad \Rightarrow I = \frac{1}{2} x^2 \sin x^2 - \int \frac{1}{2} \sin x^2 \cdot 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \sin x^2 - \frac{1}{2} \cdot (-\cos x^2) = \boxed{\frac{1}{2} x^2 \sin x^2 + \frac{1}{2} \cos x^2 + C} \quad \text{0.25/} \quad \text{0.5/}$$

$$\textcircled{5} \left. \begin{matrix} f(x) = 5x^3 - 4x \\ g(x) = x \end{matrix} \right\} \quad 5x^3 - 4x = x; \quad 5x^3 - 5x = 0; \quad 5x(x^2-1) = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow x=0 \\ \rightarrow x=\pm 1 \end{matrix}$$

x	-2	-1	0	1	2
y = 5x³ - 4x	-32	-1	0	1	32

↪ simétrica impar



$$A_2 = \int_0^1 [x - (5x^3 - 4x)] dx = \int_0^1 (-5x^3 + 5x) dx = \left[-\frac{5x^4}{4} + \frac{5x^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{5}{4} + \frac{5}{2} = \frac{5}{4} u^2 \quad \text{0.5/}; \quad \text{por simetría ingarde } f(x), A_1 = A_2,$$

con lo cual $A_T = 2 \cdot \frac{5}{4} = \boxed{\frac{5}{2} u^2} \quad \text{0.25/}$

$$\textcircled{6} \text{ a) } A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \quad 0.1$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbb{I} \quad 0.1$$

$$\text{b) } A^4 = A^3 \cdot A = -\mathbb{I} \cdot A = -A \quad 0.2/$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = -A \cdot A = -A^2 \quad 0.2/$$

$$A^6 = A^5 \cdot A = -A^2 \cdot A = -A^3 = -(-\mathbb{I}) = \mathbb{I} \quad 0.2/$$

$$\text{c) } A^{18} = (A^6)^3 = \mathbb{I}^3 = \mathbb{I} \quad 0.2/$$

$$\textcircled{7} \text{ a) } \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} - \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 = \boxed{15} \quad 0.5$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a+2 & b+2 & c+2 \\ \frac{x}{3} & \frac{y}{3} & \frac{z}{3} \end{vmatrix} = \frac{5}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+2 & b+2 & c+2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \frac{5}{3} \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ x & y & z \end{vmatrix} \right) = \frac{25}{3} \quad 0.5$$

5 0 p_q · f₂ = 2 F₁

 I.E.S. "Fernando de Mena"	RECUPERACIÓN 2ª EVALUACIÓN MATEMÁTICAS II	2º BACH. A CURSO 2005-2006	 Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha
--	--	---	---

1. Resolver: $\int \frac{x}{x^2 + 2x + 3} dx$

2. Resolver: $\int \frac{x^2 - 2x + 10}{(x - 1)^2 (x + 2)} dx$

3. Resolver: $\int x^2 e^{2x+1} dx$

4. Representar las funciones $y=x^3$ e $y=4x$, y hallar el área del recinto que delimitan.

5. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) Calcular A^2
- b) A partir de lo anterior, **deducir** (¡no por cálculo directo!) una fórmula general para A^n
- c) Hallar $\det(A)$

INSTRUCCIONES: Se podrá bajar la nota por mala presentación (desorden en las respuestas, mala caligrafía, tachones, etc.) y faltas de ortografía y/o sintaxis. Todas las preguntas puntúan igual. ¡Buena suerte!

① $I = \int \frac{x}{x^2+2x+3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2-2}{x^2+2x+3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+3} dx + \frac{1}{2} \int \frac{-2}{x^2+2x+3} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+3) - \int \frac{dx}{x^2+2x+3} (*)$ 0.5

$\frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}i}{2} = -1 \pm \sqrt{2}i \Rightarrow$ cambio de variable $x+1 = \sqrt{2}t \Rightarrow x = \sqrt{2}t-1$

$\frac{dx}{x^2+2x+3} = \int \frac{\sqrt{2} dt}{(\sqrt{2}t-1)^2+2(\sqrt{2}t-1)+3} = \sqrt{2} \cdot \int \frac{dt}{2t^2-2\sqrt{2}t+1+2\sqrt{2}t-2+3} = \sqrt{2} \int \frac{dt}{2t^2+2}$

$= \sqrt{2} \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} t = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} \xrightarrow[\text{en } (*)]{\text{substituciones}} I = \boxed{\ln \sqrt{x^2+2x+3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C}$ 1.5

② $\frac{x^2-2x+10}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \Rightarrow x^2-2x+10 = A(x-1)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x+2)$

$x=1 \rightarrow 9 = 3C \Rightarrow \boxed{C=3}$ 0.5

$x=-2 \rightarrow 18 = 9A \Rightarrow \boxed{A=2}$

$x=0 \rightarrow 10 = A-2B+2C; 10 = 2-2B+6; 2B=-2; \boxed{B=-1}$

$I = \int \frac{2}{x+2} dx + \int \frac{-1}{x-1} dx + \int \frac{3}{(x-1)^2} dx = 2 \ln(x+2) - \ln(x-1) + 3 \cdot \int (x-1)^{-2} dx = \ln(x+2)^2 - \ln(x-1) + 3 \cdot \frac{(x-1)^{-1}}{-1} =$

$= \boxed{\ln \frac{(x+2)^2}{x-1} - \frac{3}{x-1} + C}$ 0.5

③ $I = \int x^2 \cdot e^{2x+1} dx; u = x^2 \rightarrow du = 2x dx$
 $dv = e^{2x+1} dx \rightarrow v = \int e^{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int 2e^{2x+1} dx = \frac{1}{2} e^{2x+1} \Rightarrow I = \boxed{\frac{x^2}{2} e^{2x+1} - \int \frac{1}{2} e^{2x+1} \cdot 2x dx} (*)$ 0.5

$\int x e^{2x+1} dx; u = x \rightarrow du = dx$
 $dv = e^{2x+1} dx \rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x+1} \Rightarrow \int x e^{2x+1} dx = \frac{x}{2} e^{2x+1} - \int \frac{1}{2} e^{2x+1} dx = \frac{x}{2} e^{2x+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int 2e^{2x+1} dx =$

$= \frac{x}{2} e^{2x+1} - \frac{1}{4} e^{2x+1}$ 0.5

Substituyendo en (*): $I = \boxed{\frac{x^2}{2} e^{2x+1} - \frac{x}{2} e^{2x+1} + \frac{1}{4} e^{2x+1} + C}$ 1

④ $y = x^3$
 $y = 4x$

$x^3 = 4x; x^3 - 4x = 0; x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0$
 $\Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

$A_1 = \int_0^2 (4x - x^3) dx = \left[4 \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = 8 - 4 = 4u^2$ 0.75

$A_2 = \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 4 \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^0 = - (4 - 8) = 4u^2$ 0.75

$A_T = \boxed{8u^2}$

0.5

⑤ a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I} \Rightarrow$ 0.5

b) $A^3 = A^2 \cdot A = \mathbb{I} \cdot A = A$
 $A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = A^2 = \mathbb{I}$
 $A^5 = A^4 \cdot A = \mathbb{I} \cdot A = A \dots$

$A^n = \begin{cases} A & \text{si } n \text{ impar} \\ \mathbb{I} & \text{si } n \text{ par} \end{cases}$ 1

c) Como A es triangular, su det es igual al producto de los elementos de la diagonal $\Rightarrow \det A = 1$ 0.5