

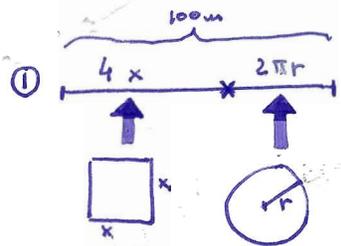
 <p>I.E.S. "Fernando de Mena" Secuñillos (Ciudad Real)</p>	PARCIAL 2ª EVALUACIÓN MATEMÁTICAS II	2º BACH. A+C CURSO 2007-2008	 <p>Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha Consejería de Educación y Ciencia</p>
---	---	---	---

1. (UCLM, junio 2004) Un alambre de 100 m de largo se divide en dos trozos. Con uno de los trozos se forma un cuadrado y con el otro una circunferencia. Hallar la longitud de los trozos para que la suma de las áreas del cuadrado y del círculo sea mínima. (2,5 puntos)

2. Dada $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1}$
- a) Hallar los posibles M y m, y los intervalos de crecimiento.
 - b) Hallar los posibles P.I., y los intervalos de curvatura.
 - c) Hallar las posibles asíntotas.
 - d) Representarla gráficamente. (2,5 puntos)

3. a) $\int \frac{x + \sqrt{x}}{x^2} dx$ (UCLM, sept 2005) b) $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$ (2,5 puntos)

4. a) $\int \frac{2x+7}{x^2+x+1} dx$ b) $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} dx$ (2,5 puntos)



Restricción: $4x + 2\pi r = 100$
 F. A. MINIMIZAR: $A = x^2 + \pi r^2$

TOTAL: 2,5

$$A(x) = x^2 + \pi \cdot \left(\frac{50-2x}{\pi}\right)^2 = x^2 + \frac{2500 - 200x + 4x^2}{\pi}$$

$$A'(x) = 2x + \frac{-200 + 8x}{\pi} = 0 \Rightarrow 2x = \frac{200 - 8x}{\pi}; 2\pi x = 200 - 8x; (2\pi + 8)x = 200; x = \frac{200}{2\pi + 8} = \frac{100}{\pi + 4}$$

$$A''(x) = 2 + \frac{8}{\pi} > 0 \Rightarrow \text{se confirma que es un mínimo}; L_{\square} = 4x = \frac{400}{2\pi + 8} \approx 56,01 \text{ m} \Rightarrow L_{\circ} = 100 - L_{\square} \approx 43,99 \text{ m}$$

2) $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1}$ a) $f'(x) = \frac{(3x^2 + 2x)(x^2 - 1) - (x^3 + x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = 0 \Rightarrow x^4 - 3x^2 = 0$
 $x^2(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x = \pm\sqrt{3}$ (0,125 posibles Mom)

$$f''(x) = \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 1)^2 - (x^4 - 3x^2) \cdot 2(x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3}$$

$$f(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3} + 3 - 1}{2} = \frac{3\sqrt{3} + 2}{2} = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$f(-\sqrt{3}) = \frac{-3\sqrt{3} + 3 - 1}{2} = \frac{-3\sqrt{3} + 2}{2} = 1 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$f''(\sqrt{3}) = \frac{2(\sqrt{3})^3 + 6\sqrt{3}}{8} > 0 \Rightarrow \text{M}(\sqrt{3}, 1 + \frac{3}{2}\sqrt{3})$$

$$f''(-\sqrt{3}) = \frac{-2(\sqrt{3})^3 - 6\sqrt{3}}{8} < 0 \Rightarrow \text{M}(-\sqrt{3}, 1 - \frac{3}{2}\sqrt{3})$$

$f''(0) = 0 \Rightarrow$ este método no decide

b) $f''(x) = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3} = 0 \Rightarrow 2x^3 + 6x = 0; 2x(x^2 + 3) = 0$
 $x = 0$ posible P.I.
 $x^2 + 3 = 0$ no soluc.

$$f'''(x) = \frac{(6x^2 + 6)(x^2 - 1)^3 - (2x^3 + 6x) \cdot 3(x^2 - 1)^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^6}$$

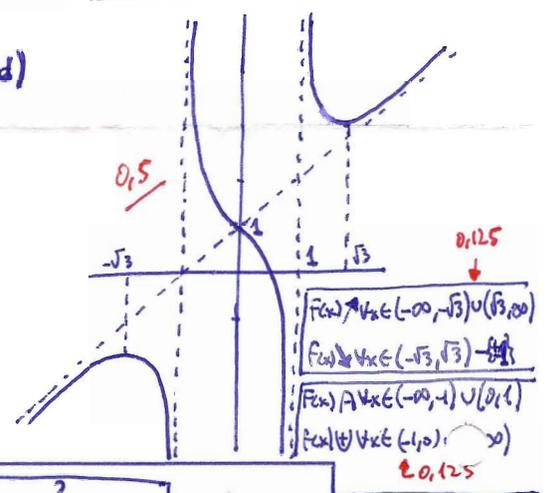
$$f'''(0) = \frac{6 \cdot (-1)}{(-1)^4} = -6 < 0 \Rightarrow \text{P.I. } (0, 1) \text{ cóncavo-concavo}$$

c) ¿A.M.? $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} = \infty \Rightarrow$ no A.M. (0,125)

TOTAL: 2,5

¿A.V.? $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ A.V. (0,125)

¿A.O.? $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^3 - x} = 1$
 $n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 1} = 1$
 $y = x + 1$ A.O. (0,25)



3) a) $\int \frac{x + \sqrt{x}}{x^2} dx = \int \frac{x}{x^2} dx + \int \frac{\sqrt{x}}{x^2} dx = \int \frac{1}{x} dx + \int x^{-3/2} dx = \ln|x| - \frac{2}{\sqrt{x}} + C$ (1)

b) $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx = \int \frac{t}{t^2+1} \cdot 2t dt = 2 \int \frac{t^2}{t^2+1} dt = 2 \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt = 2 \left[\int \frac{t^2+1}{t^2+1} dt - \int \frac{1}{t^2+1} dt \right] = 2(t - \arctan t)$
 Cambio de variable $x-1 = t^2 \Rightarrow x = t^2+1$
 $dx = 2t \cdot dt$
 $t = \sqrt{x-1}$
 $2(\sqrt{x-1} - \arctan \sqrt{x-1}) + C$ (1,25)

4) a) $\int \frac{2x+7}{x^2+x+1} dx = \int \frac{2x+1+6}{x^2+x+1} dx = \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + \int \frac{6}{x^2+x+1} dx = \ln|x^2+x+1| + 6 \cdot \int \frac{dx}{x^2+x+1}$ (0,25)

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow$ cambio de variables $x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}t \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{2}; t = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ (0,25)

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} dt}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{2} + 1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{dt}{\frac{3t^2 - 2\sqrt{3}t + 1}{4} + \frac{\sqrt{3}t - 1}{2} + 1}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{3} \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan t = \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

$$I = \ln|x^2+x+1| + 4\sqrt{3} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$
 (1)

b) $\int \frac{tg x}{\cos x} dx = \int \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\cos x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \sin x \cdot (\cos x)^{-2} dx = -\int \frac{-\cos x \cdot (\cos x)}{\cos^2 x} dx = \frac{(\cos x)^{-1}}{-1} = \frac{1}{\cos x} = \sec x + C$ (1)

	PARCIAL 2ª EVALUACIÓN MATEMÁTICAS II	2º BACH. A CURSO 2005-2006	
---	---	---------------------------------------	---

1. Entre todos los rectángulos de perímetro 12 m, ¿cuál es el que tiene la diagonal menor?

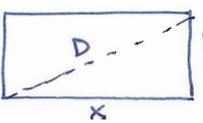
2. a) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x}} dx$ b) $\int \frac{1}{x^2+4} dx$

3. $\int \frac{x+1}{x^2-6x+13} dx$

4. $\int \frac{x^4-3x^3+2x^2+3}{x^3-3x^2+4} dx$

5. $\int (x^2+1)e^{-x} dx$

INSTRUCCIONES: Se podrá bajar la nota por mala presentación (desorden en las respuestas, mala caligrafía, tachones, etc.) y faltas de ortografía y/o sintaxis. Todas las preguntas puntúan igual. ¡Buena suerte!

①  $2x+2y=12$ (restricción) $\left\{ \begin{array}{l} x+y=6; y=6-x \\ D=\sqrt{x^2+y^2} \text{ (Función a minimizar)} \end{array} \right. D(x)=\sqrt{x^2+(6-x)^2}=\sqrt{x^2+36-12x+x^2}=\sqrt{2x^2-12x+36}$

$D(x)=\sqrt{2x^2-12x+36}; D'(x)=\frac{4x-12}{2\sqrt{2x^2-12x+36}}=0 \Rightarrow 4x-12=0; x=3m$ **0.75/**
0.75/
 $y=3m$ **0.75/**

$D'(x)=\frac{2x-6}{\sqrt{2x^2-12x+36}} \Rightarrow D''(x)=\frac{2\sqrt{2x^2-12x+36}-(2x-6)\cdot\frac{4x-12}{2\sqrt{2x^2-12x+36}}}{2x^2-12x+36};$

$D''(3)=\frac{2\sqrt{18}}{18} > 0 \Rightarrow$ se confirma que es un mínimo; **0.75/** Soluc: se trata de un cuadrado de lado 3m.

② a) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{x}} dx + \int \frac{2}{\sqrt{x}} dx = \int x^{1/2} dx + \int 2x^{-1/2} dx = \int x^{1/2} dx + 2 \int x^{-1/2} dx =$
 $= \frac{x^{3/2}}{3/2} + 2 \cdot \frac{x^{1/2}}{1/2} = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + 4\sqrt{x} + C$ **1/**

b) $\int \frac{1}{x^2+4} dx = \int \frac{1}{4\left(\frac{x^2}{4}+1\right)} dx = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{4} \cdot 2 \int \frac{1/2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} dx = \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + C$ **1/**

③ $\int \frac{x+1}{x^2-6x+13} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2-6x+13} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x-6+8}{x^2-6x+13} dx = \frac{1}{2} \left[\int \frac{2x-6}{x^2-6x+13} dx + \int \frac{8}{x^2-6x+13} dx \right]$ **0.5/**

$x = \frac{6 \pm \sqrt{36-52}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i \Rightarrow$ cambio de variable: $x-3=2t \Rightarrow x=2t+3$
 $\frac{dx}{dt}=2 \Rightarrow dt = \frac{dx}{2}$

$\int \frac{1}{x^2-6x+13} dx = \int \frac{2dt}{(2t+3)^2-6(2t+3)+13} = 2 \int \frac{dt}{4t^2+12t+9-12t-18+13} = 2 \int \frac{dt}{4t^2+4} = \frac{2}{4} \int \frac{dt}{t^2+1} =$
 $= \frac{1}{2} \arctan t = \frac{1}{2} \arctan \frac{x-3}{2};$ sustituimos en (*): $I = \frac{1}{2} \ln|x^2-6x+13| + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \arctan \frac{x-3}{2} =$
 $= \ln \sqrt{x^2-6x+13} + \frac{1}{4} \arctan \frac{x-3}{2} + C$ **0.5/**

④ $\frac{x^4-3x^3+2x^2}{-x^4+3x^3} + \frac{x^3-3x^2+4}{x} \Rightarrow x^4-3x^3+2x^2+3 = x \cdot (x^3-3x^2+4) + (2x^2-4x+3)$
 $\frac{x^4-3x^3+2x^2+3}{x^3-3x^2+4} = x + \frac{2x^2-4x+3}{x^3-3x^2+4} \Rightarrow$

$\Rightarrow I = \int x dx + \int \frac{2x^2-4x+3}{x^3-3x^2+4} dx; (*)$ **0.5/**
 $\frac{2x^2-4x+3}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$ **0.25/**
 $2x^2-4x+3 = A(x-2)^2 + B(x+1)(x-2) + C \cdot (x+1)$
 $x=-1 \rightarrow 9 = 9A \Rightarrow A=1$
 $x=2 \rightarrow 3 = 3C \Rightarrow C=1$ **0.25/**
 $x=0 \rightarrow 3 = 4A - 2B + C; 3 = 4 - 2B + 1; 2B = 2; B=1$

$\int \frac{2x^2-4x+3}{x^3-3x^2+4} dx = \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{1}{x-2} dx + \int \frac{1}{(x-2)^2} dx = \ln|x+1| + \ln|x-2| + \int (x-2)^{-2} dx = \ln|x+1| + \ln|x-2| + \frac{(x-2)^{-1}}{-1} =$
 $= \ln|x^2-x-2| - \frac{1}{x-2} + C; \text{ sustituimos en (*): } I = \frac{x^2}{2} + \ln|x^2-x-2| - \frac{1}{x-2} + C$ **0.25/**

⑤ $\int (x^2+1)e^{-x} dx = -(x^2+1)e^{-x} - \int -2xe^{-x} dx = -\frac{x^2+1}{e^x} + 2 \int xe^{-x} dx =$ **0.5/**

$u=x^2+1 \Rightarrow du=2x dx$
 $dv=e^{-x} dx \Rightarrow v=-e^{-x}$

$u=x \Rightarrow du=dx$
 $dv=e^{-x} dx \Rightarrow v=-e^{-x}$

$= -\frac{x^2+1}{e^x} + 2 \cdot \left[-xe^{-x} - \int -e^{-x} dx \right] = -\frac{x^2+1}{e^x} + 2 \left[-\frac{x}{e^x} + \int e^{-x} dx \right] = -\frac{x^2+1}{e^x} + 2 \left[-\frac{x}{e^x} - e^{-x} \right] = -\frac{x^2+1}{e^x} - \frac{2x}{e^x} - \frac{2}{e^x} =$
 $= \frac{-x^2-2x-3}{e^x} + C$ **0.5/**