

Alumno/a: SOLUCIONES

INSTRUCCIONES:

- Para recuperar 3 evaluaciones se responderán a las tres primeras preguntas de dichas evaluaciones.
- Para recuperar 2 evaluaciones se responderán a todas las preguntas de tales evaluaciones.
- Para recuperar 1 evaluación se responderán a todas las preguntas de esa evaluación.
- Para subir nota hay que hacer las tres últimas preguntas de cada una de las tres evaluaciones.

1. Calcular $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{\frac{1}{\cos x}}$

(2,5 puntos)

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{\frac{1}{\cos x}} = \left(\frac{2 \cdot \pi/2}{\pi} \right)^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty} = \text{indeterminado} \quad 0,25$$

Aplicamos entonces la regla $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{\frac{1}{\cos x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1}{\cos x} \cdot \ln \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)}$ 0,25
(1)

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)}{\cos x} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\frac{2}{\pi} - \sin x}{-\sin x} = \frac{\frac{2}{\pi} - 1}{-1} = \frac{2 - \pi}{-1} = \pi - 2 = 1 - \frac{2}{\pi} \quad 0,25 \quad 0,25 \quad 0,5$$

Sustituimos en (1):

Soluc: $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{\frac{1}{\cos x}} = e^{\boxed{1 - \frac{2}{\pi}}}$ 1

Nota: También se puede aplicar la fórmula $\lim_{x \rightarrow \pi/2} f(x)^{g(x)} = 1^{\infty} = e^{\lim_{x \rightarrow \pi/2} [f(x) - 1] \cdot g(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{\frac{1}{\cos x}} = 1^{\infty} = e^{\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x - 1 \right) \cdot \frac{1}{\cos x}} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\frac{2x}{\pi} + \cos x - 1}{\cos x} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\frac{2}{\pi} - \sin x}{-\sin x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\frac{2 - \pi \sin x}{\pi}}{-\sin x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{2 - \pi \sin x}{-\pi \sin x} = \frac{2 - \pi}{-\pi} = \frac{\pi - 2}{\pi} = 1 - \frac{2}{\pi}$$

Sustituimos en (2): Soluc: $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{\frac{1}{\cos x}} = e^{\boxed{1 - \frac{2}{\pi}}}$

2. Dada $f(x) = \begin{cases} \frac{ax + \sin x}{2x - x^2} & \text{si } x < 0 \\ bx + c & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{1+x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, determinar a , b y c para que $f(x)$ sea continua en $x=0$, y además sea continua y derivable en $x=1$. (2,5 puntos)

1.º) $f(x)$ CONTINUA en $x=0$:

Para que sea continua, han de coincidir los límites laterales:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax + \sin x}{2x - x^2} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a + \cos x}{2 - 2x} = \frac{a+1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} (bx + c) = c \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{a+1}{2} = c ; \boxed{a+1 = 2c} \quad (1)$$

0,75,

2.º) $f(x)$ CONTINUA en $x=1$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} (bx + c) = b + c \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow b + c = \frac{1}{2} ; \boxed{2b + 2c = 1} \quad (2)$$

0,75,

3.º) $f(x)$ DERIVABLE en $x=1$:

Para que sea derivable, tienen que coincidir las derivadas laterales:

$$\left. \begin{aligned} f'(1^-) &= (bx + c)'_{x=1} = b \\ f'(1^+) &= \left(\frac{1}{1+x} \right)'_{x=1} = -\frac{1}{(1+x)^2} \Big|_{x=1} = -\frac{1}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{b = -1/4} \quad 0,75,$$

Sustituimos en (2): $-\frac{1}{2} + 2c = 1 ; 2c = \frac{3}{2} ; \boxed{c = 3/4}$

Sustituimos en (1): $a+1 = \frac{3}{2} ; \boxed{a = 1/2}$

0,25,

3. Dada $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3}$, calcular: $\rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

a) Los máximos y mínimos relativos.

(1 punto)

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x^3 - (x^2 - 1) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{2x^4 - 3x^4 + 3x^2}{x^6} = \frac{3x^2 - x^4}{x^6} = \frac{3 - x^2}{x^4} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 - x^2 = 0; x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \text{ posibles M y m } 0,1$$

$$f''(x) = \frac{-2x \cdot x^4 - (3 - x^2) \cdot 4x^3}{x^8} = \frac{-2x^5 - 12x^3 + 4x^5}{x^8} = \frac{2x^5 - 12x^3}{x^8} = \frac{2x^2 - 12}{x^5} 0,1$$

$$f''(\sqrt{3}) = \frac{6 - 12}{(\sqrt{3})^5} < 0 \Rightarrow \boxed{M(\sqrt{3}, \frac{2\sqrt{3}}{9})} \leftarrow f(\sqrt{3}) = \frac{3 - 1}{(\sqrt{3})^3} = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9} 0,15$$

$$f''(-\sqrt{3}) = \frac{6 - 12}{(-\sqrt{3})^5} = - > 0 \Rightarrow \boxed{m(-\sqrt{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{9})} \leftarrow f(-\sqrt{3}) = \frac{3 - 1}{(-\sqrt{3})^3} = \dots = -\frac{2\sqrt{3}}{9} 0,15$$

a) Los puntos de inflexión

(1 punto)

$$f''(x) = \frac{2x^2 - 12}{x^5} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 12 = 0; 2x^2 = 12; x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6} \text{ posibles P.I. } 0,1$$

$$f'''(x) = \frac{4x \cdot x^5 - (2x^2 - 12) \cdot 5x^4}{x^{10}} = \frac{4x^6 - 10x^6 + 60x^4}{x^{10}} = \frac{60x^4 - 6x^6}{x^{10}} = \frac{60 - 6x^2}{x^6} 0,2$$

$$f'''(\pm\sqrt{6}) = \frac{60 - 36}{(\pm\sqrt{6})^6} = \frac{+}{+} > 0 \Rightarrow \boxed{\text{P.I.}(\sqrt{6}, \frac{5\sqrt{6}}{36})} \leftarrow f(\sqrt{6}) = \frac{6 - 1}{(\sqrt{6})^3} = \frac{5}{6\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{36} 0,1$$

$$\boxed{\text{P.I.}(-\sqrt{6}, -\frac{5\sqrt{6}}{36})} \leftarrow f(-\sqrt{6}) = -f(\sqrt{6}) 0,1$$

b) Las asíntotas.

(0,5 puntos)

¿A.H.? $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^3} \sim \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \boxed{y=0} \text{ A.H.}$ 0,25/

Por lo tanto, ~~Asíntotas~~ Oblicuas

¿A.V.? $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x^3} = \frac{-1}{0} \Rightarrow \boxed{x=0} \text{ A.V.}$ 0,25/

4. Encontrar el punto de la recta $x+y=4$ que cumpla que la suma de los cuadrados de sus coordenadas sea mínima. (2,5 puntos)

Restricción: $x+y=4$
 Función a minimizar: $f(x,y) = x^2 + y^2$ } 0,5/

Despejamos de la restricción: $y = 4 - x$

Sustituimos en la función a optimizar: $f(x) = x^2 + (4-x)^2 = x^2 + 16 - 8x + x^2 = 2x^2 - 8x + 16$ 0,25/

Hallamos los posibles mínimos:

$f'(x) = 4x - 8 = 0$; $4x = 8$; $x = 2$ 0,25/

Comprobamos que se trata de un mínimo:

$f''(x) = 4$; $f''(2) = 4 > 0 \Rightarrow$ es un mínimo 0,5/

Calculamos la otra coordenada, la y , sustituyendo en la restricción:

$y = 4 - 2 = 2$ 0,5/

Solución: $\boxed{(2,2)}$ 0,5/

Alumno/a: SOLUCIONES

INSTRUCCIONES:

- Para recuperar 3 evaluaciones se responderán a las tres primeras preguntas de dichas evaluaciones.
- Para recuperar 2 evaluaciones se responderán a todas las preguntas de tales evaluaciones.
- Para recuperar 1 evaluación se responderán a todas las preguntas de esa evaluación.
- Para subir nota hay que hacer las tres últimas preguntas de cada una de las tres evaluaciones.

1. Calcular $\int (x^2 + 1) \sin 2x \, dx = \mathbf{I}$

(2,5 puntos)

$$u = x^2 + 1 \longrightarrow du = 2x \, dx$$

$$dv = \sin 2x \cdot dx \longrightarrow v = \int \sin 2x \cdot dx = \frac{1}{2} \int 2 \sin 2x \cdot dx = \frac{1}{2} (-\cos 2x) \quad 0,25/$$

$$\mathbf{I} = -\frac{\cos 2x}{2} (x^2 + 1) - \int \frac{-\cos 2x}{2} \cdot 2x \, dx = -\frac{(x^2 + 1) \cdot \cos 2x}{2} + \underbrace{\int x \cos 2x \, dx}_{\mathbf{I}_1} \quad (1) \quad 0,5/$$

$$u_1 = x \longrightarrow du_1 = dx$$

$$dv_1 = \cos 2x \, dx \longrightarrow v_1 = \int \cos 2x \cdot dx = \frac{1}{2} \int 2 \cos 2x \cdot dx = \frac{1}{2} \sin 2x \quad 0,25/$$

$$\mathbf{I}_1 = \frac{x \sin 2x}{2} - \int \frac{\sin 2x}{2} \cdot dx = \frac{x \sin 2x}{2} - \frac{1}{2} \int \sin 2x \cdot dx = \frac{x \sin 2x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int 2 \sin 2x \cdot dx =$$

$$= \frac{x \sin 2x}{2} - \frac{1}{4} (-\cos 2x) \quad 0,5/$$

Substituir en (1):

$$\mathbf{I} = -\frac{(x^2 + 1) \cos 2x}{2} + \frac{x \sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} = \left(-\frac{x^2 + 1}{2} + \frac{1}{4} \right) \cos 2x + \frac{x \sin 2x}{2} =$$

$$= -\frac{2x^2 + 1}{4} \cos 2x + \frac{x}{2} \sin 2x = \boxed{-\frac{1 + 2x^2}{4} \cos 2x + \frac{x}{2} \sin 2x + C_1}$$

2. a) Esbozar las gráficas de $f(x)=2x^2$ y $g(x)=-x^2+3$, indicando el recinto que determinan.

(0,5 puntos)

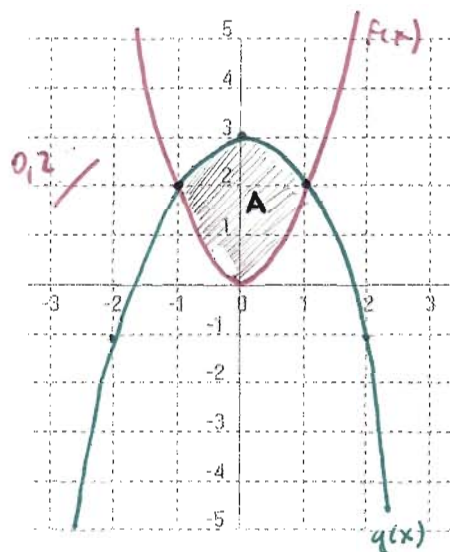
Veamos primero dónde se cortan ambas parábolas:

$$2x^2 = -x^2 + 3; \quad 3x^2 = 3; \quad x^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \rightarrow y = 2 \\ x = 1 \rightarrow y = 2 \end{cases}$$

Hagamos sencillas tablas de valores para completar la gráfica de ambas parábolas:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x) = 2x^2$	8	2	0	2	8

x	-2	-1	0	1	2
$g(x) = -x^2 + 3$	-1	2	3	2	-1



b) Calcular el área de dicho recinto.

(2 puntos)

$$A = \int_{-1}^1 [g(x) - f(x)] dx = \int_{-1}^1 [(-x^2 + 3) - 2x^2] dx = \int_{-1}^1 (3 - 3x^2) dx = 3x - 3 \frac{x^3}{3} = 0,5$$

$$= 3x - x^3 \Big|_{-1}^1 = (3 - 1) - (-3 + 1) = 2 + 2 = \boxed{4 \text{ u}^2}$$

3. Calcular $\int \frac{e^x}{e^{2x}-1} dx$, haciendo previamente el cambio $e^x=t$

(2,5 puntos)

$$e^x = t$$

$\Downarrow$

$$e^x dx = dt$$

$$dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$$

0,25/

$$I = \int \frac{e^x}{(e^x)^2-1} dx = \int \frac{\cancel{t}}{t^2-1} \frac{dt}{\cancel{t}} = \int \frac{dt}{t^2-1}$$

0,25/

$\hookrightarrow$ raíces $t = \pm 1$

Como el denominador tiene raíces reales simples, se trata de una integral por descomposición en fracciones simples del integrando:

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-1} \Rightarrow 1 = A(t-1) + B(t+1)$$

$$t=1 \rightarrow 1 = 2B ; B = 1/2$$

0,25/

$$t=-1 \rightarrow 1 = -2A ; A = -1/2$$

0,25/

$$I = \int \frac{-1/2}{t+1} dt + \int \frac{1/2}{t-1} dt = -\frac{1}{2} \ln(t+1) + \frac{1}{2} \ln(t-1) =$$

0,5/

$$= -\ln \sqrt{t+1} + \ln \sqrt{t-1} = \ln \sqrt{\frac{t-1}{t+1}} = \boxed{\ln \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}} + C_1}$$

1/

4. Resolver el sistema de ecuaciones matriciales $3X - 2Y = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 16 & 4 \end{pmatrix}$ y $X + 3Y = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -2 & 27 \end{pmatrix}$. (2,5 puntos)

$$\left. \begin{array}{l} 3X - 2Y = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 16 & 4 \end{pmatrix} \\ X + 3Y = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -2 & 27 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \xrightarrow{\otimes -3} \begin{array}{l} 3X - 2Y = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 16 & 4 \end{pmatrix} \\ -3X - 9Y = \begin{pmatrix} -18 & -36 \\ 6 & -81 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$-11Y = \begin{pmatrix} -11 & -33 \\ 22 & -77 \end{pmatrix}$$

$$Y = -\frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} -11 & -33 \\ 22 & -77 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \quad 1,25$$

Substituyendo en E2:

$$X + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -2 & 27 \end{pmatrix}; \quad X + \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -2 & 27 \end{pmatrix};$$

$$X = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -2 & 27 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \quad 1,25$$

 I.E.S. "Fernando de Mena" Segorbe (Cuenca)	EXAMEN FINAL JUNIO MATEMÁTICAS II 3ª EVALUACIÓN	2º Bach. A CURSO 2010-2011	 Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha Consejería de Educación y Ciencia
---	--	---	---

Alumno/a: SOLUCIONES

INSTRUCCIONES:

- Para recuperar 3 evaluaciones se responderán a las tres primeras preguntas de dichas evaluaciones.
- Para recuperar 2 evaluaciones se responderán a todas las preguntas de tales evaluaciones.
- Para recuperar 1 evaluación se responderán a todas las preguntas de esa evaluación.
- Para subir nota hay que hacer las tres últimas preguntas de cada una de las tres evaluaciones.

1. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Construir la matriz $A \cdot B$, y estudiar su rango en función de λ . (2,5 puntos)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 1+2\lambda & 3+2\lambda \\ 1-\lambda & 1 \end{pmatrix} \quad 0,5$$

$$\begin{vmatrix} 1+2\lambda & 3+2\lambda \\ 1-\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1+2\lambda - (1-\lambda)(3+2\lambda) = 1+2\lambda - (3-\lambda-2\lambda^2) = 2\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} \begin{cases} \nearrow \lambda = 1/2 \\ \searrow \lambda = -2 \end{cases} \quad 0,5$$

Solución:

I.) $\lambda \neq 1/2$ y $\lambda \neq -2 \Rightarrow r_g(A \cdot B) = 2$	0,75
II.) $\lambda = 1/2$ o $\lambda = -2 \Rightarrow r_g(A \cdot B) = 1$	0,75

2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, resolver la ecuación $AX - BCX = A$

(2,5 puntos)

$$AX - BCX = A$$

$$(A - BC)X = A$$

$$A - BC \equiv D \Rightarrow DX = A; \quad D^{-1}DX = D^{-1}A; \quad \boxed{X = D^{-1}A} \text{ donde } D = A - BC \quad (1)$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad 0,25$$

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 3 + 3 - 1 = -1 \Rightarrow \exists D^{-1}$$

$$D_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7$$

$$D_{12} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5$$

$$D_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$$D_{21} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$D_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$D_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$D_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$D_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3$$

$$\text{Adj}(D) = \begin{pmatrix} -7 & -5 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow {}^t\text{Adj}(D) = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow D^{-1} = \frac{1}{|D|} \cdot {}^t\text{Adj}(D) = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -3 \\ 5 & -1 & -2 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad 0,25$$

Sustituimos en (1):

$$X = D^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -3 \\ 5 & -1 & -2 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 11 & -13 & 21 \\ 8 & -9 & 16 \\ -10 & 12 & -18 \end{pmatrix}} \quad 1$$

3. a) Clasificar, en función del parámetro a , el sistema

$$\begin{cases} ax - 3y - 2z = 0 \\ -x + (5+a)z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \end{cases}$$

(1,25 puntos)

$$\begin{array}{c} M^* \\ \left(\begin{array}{ccc|c} a & -3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 5+a & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{array} \right) \\ M \end{array}$$

¿ $\text{rg } M$?

$$\begin{vmatrix} a & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 5+a \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -6(5+a) + 6 - 3a(5+a) - 12 =$$

$$= -30 - 6a + 6 - 15a - 3a^2 - 12 =$$

$$= -3a^2 - 21a - 36 = 0$$

$$a^2 + 7a + 12 = 0; \quad a = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{-7 \pm 1}{2} \begin{cases} a = -3 \\ a = -4 \end{cases} \quad 0,25/$$

$$a = -3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

Podemos tachar la columna de ceros de la matriz ampliada, ya que no aporta nada a efectos de rango.

$$\text{rg } M = \text{rg } M^* = 2 \quad \text{p.f.} \quad \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$a = -4 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{rg } M = \text{rg } M^* = 2 \quad \text{p.f.} \quad \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Solución:

I) $a \neq -3$ y $a \neq -4 \Rightarrow \text{rg } M = \text{rg } M^* = 3 = \text{n.º incógnitas} \Rightarrow \text{sist. compat. d. todo.}$
 (sol. única $\rightarrow$ sol. trivial $x=0; y=0; z=0$)
 0,5/

II) $a = -3$ o $a = -4 \Rightarrow \text{rg } M = \text{rg } M^* = 2 < \text{n.º incógnitas} \Rightarrow \text{sist. compat. ind. todo.}$
 (en este caso, uniparamétrico)
 0,5/

b) Resolverlo para $a=-4$

(1,25 puntos)

Para $a=-4$, acabamos de ver que $rg M = rg M^* = 2 \Rightarrow$ resolvemos una ecuación (por ejemplo, la 3ª); además, para que el sistema sea tipo Cramer, pasamos una incógnita (la z , por ejemplo) al otro miembro como parámetro λ . El sistema quedará así:

$$\begin{cases} -4x - 3y = 2\lambda \\ -x = -\lambda \end{cases} \rightarrow \boxed{x = \lambda} \xrightarrow[\text{la 1ª ecuación}]{\text{substitución}} \begin{cases} -4\lambda - 3y = 2\lambda \\ -6\lambda = 3y \end{cases}$$

$$\boxed{y = -2\lambda} \quad \boxed{z = \lambda}$$

4. Utilizar únicamente (no vale desarrollar por Sarrus) las propiedades de los determinantes para demostrar que:

$$\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 3x+2 \\ x & 2x+3 & 3x+4 \\ x & 2x+5 & 3x+6 \end{vmatrix} = 0$$

(2,5 puntos)

$$\begin{vmatrix} x & 2x & 3x+2 \\ x & 2x & 3x+4 \\ x & 2x & 3x+6 \end{vmatrix} \xrightarrow{0 \cdot I - C_2 \alpha C_1} \begin{vmatrix} x & 1 & 3x+2 \\ x & 3 & 3x+4 \\ x & 5 & 3x+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 3x \\ x & 3 & 3x \\ x & 5 & 3x \end{vmatrix} \xrightarrow{0 \cdot I - C_3 \alpha C_1} \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x & 3 & 4 \\ x & 5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{f_2 - f_1, f_3 - f_1} \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad p q. f_3 \alpha f_2$$

(Nota: En realidad podíamos haber llegado al mismo resultado más rápidamente si hubiéramos hecho desde el principio $f_2 - f_1$ y $f_3 - f_1$...)