



**EXAMEN FINAL
MATEMÁTICAS II**

**2º BACH. A+C
CURSO 2007-2008**



INSTRUCCIONES:

- Para recuperar 3 evaluaciones se responderán a las tres primeras preguntas de dichas evaluaciones.
- Para recuperar 2 evaluaciones se responderán a todas las preguntas de tales evaluaciones.
- Para recuperar 1 evaluación se responderán a todas las preguntas de esa evaluación.
- Para subir nota de una o varias evaluaciones hay que hacer todas las preguntas de cada evaluación en cuestión.
- Copia en el primer folio el siguiente cuadro y sombrea las casillas a las que **NO te presentes**. Por ejemplo, si un alumno/a tiene que recuperar las dos últimas evaluaciones:

	1ª EVAL.	2ª EVAL.	3ª EVAL.
RECUPERAR:			
SUBIR NOTA:			

(en los espacios en blanco el profesor pondrá la calificación)

1ª EVALUACIÓN:

1. Calcular: **a)** $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \text{sen}x}{(\pi - 2x) \text{cos}x}$ **b)** $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

2. Dada $f(x) = \begin{cases} 3 - ax^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{ax} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ se pide: **a)** Hallar **a** para que sea continua.
b) Para el valor o valores obtenidos anteriormente, estudiar su derivabilidad. (Los alumnos/as que quieran subir nota deberán, además, representarla)

3. Dada $f(x) = \frac{x^2 + 11}{x + 5}$ hallar: **a)** Dom(f) y posibles cortes con los ejes.
b) Posibles máximos y mínimos. Intervalos de monotonía.
c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
d) Representación gráfica.
e) Ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en x=-1

4. Aplicar, si es posible, el teorema del valor medio de Lagrange a la función

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } -2 \leq x \leq -1 \\ \frac{x^2 - 3}{2} & \text{si } -1 < x \leq 0 \end{cases}$$

en el intervalo [-2,0]

2ª EVALUACIÓN:

1. Calcular: a) $\int \frac{3x-15}{x^3-3x-2} dx$

b) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$

2. Calcular: a) $\int (x^2+1)e^x dx$

b) $\int \frac{2x+5}{x^2-4x+13} dx$

3. Dada $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$ se pide: a) Dom(f) y corte con los ejes.

b) M y m, e intervalos de crecimiento (sin usar decimales).

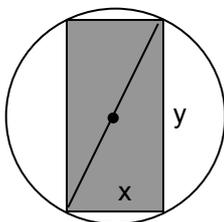
c) P.I. e intervalos de curvatura (sin decimales)

d) Asintotas.

e) Representación gráfica.

f) Área del recinto limitado por la gráfica anterior, el eje x y la recta vertical que pasa por el máximo (sin usar decimales).

4.



Calcular la base x y la altura y del rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de radio 2 cm. Interpretar el resultado.

3ª EVALUACIÓN:

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

resolver la ecuación matricial $AX-BCX=A$

2. Dado el sistema $\begin{cases} x-ay+z=-1 \\ -x+y-z=a \\ x-y-z=0 \end{cases}$ se pide: a) Discutirlo en función del parámetro a
b) Resolverlo para el caso en que no tenga solución única.

3. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

determinar, si es posible, un valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ para el que la matriz $(A-\lambda I)^2$ sea la matriz nula.

4. Dibujar las gráficas de $f(x)=5x^3-4x$ y $g(x)=|x|$, y hallar el área del recinto que definen.

1º EVAL

1) a) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{(1-2x) \cos x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{-\cos x}{-2 \cos x - (1-2x) \sin x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin x}{2 \sin x - [2 \sin x + (1-2x) \cos x]} = \frac{1}{2 - (-2)} = \frac{1}{4}$ 0.25/

b) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{1/x} = 1 = \text{ind} \frac{0}{0} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x} \ln x}$ 0.25/ (*)

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{-1} = -1$ 0.25/
 sustituyendo \Rightarrow soluc: $e^{-1} = \frac{1}{e}$ 0.25/

2) $f(x) = \begin{cases} 3-ax^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{ax} & \text{si } x > 1 \end{cases}$
 a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3-ax^2) = 3-a$
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{ax} = \frac{2}{a}$
 Soluc: $f(x)$ continua y LR $\Leftrightarrow a=1, a=2$ 0.25/

b) Estudiamos la derivabilidad para los dos valores anteriores de a , puesto que, para que sea derivable ha de ser previamente continua:

$a=1 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 3-x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$
 $f'(1^-) = -2x \Big|_{x=1} = -2$
 $f'(1^+) = -\frac{2}{x^2} \Big|_{x=1} = -2$
 \Rightarrow para $a=1$ $f(x)$ es derivable y LR 0.375/

$a=2 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 3-2x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$
 $f'(1^-) = -4x \Big|_{x=1} = -4$
 $f'(1^+) = -\frac{1}{x^2} \Big|_{x=1} = -1$
 $\Rightarrow \nexists f'(1)$ si $a=2$ 0.375/

x	-∞	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
y=3-x²	-∞	...	-22	-13	-6	-1	2	3	2

↑
V(0,3)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	...	∞
y=2/x	2	1	0.66	0.5	0.4	0.33	0.29	0.25	...	0+



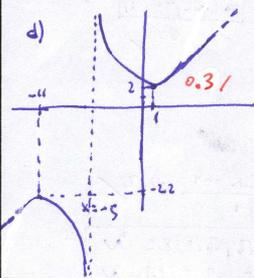
3) $f(x) = \frac{x^2+11}{x+5}$ a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-5\}$
 corte con x: $y=0 \Rightarrow \frac{x^2+11}{x+5} = 0 \Rightarrow x^2+11=0$; $x^2+11=0$; \nexists soluc.
 corte con y: $x=0 \Rightarrow y=11/5 \Rightarrow (0, 11/5)$
0.2/

b) $f'(x) = \frac{2x(x+5) - (x^2+11)}{(x+5)^2} = \frac{x^2+10x-11}{(x+5)^2} = 0 \Rightarrow x^2+10x-11=0 \Rightarrow x=1$
 $x=-11$ 0.4/

$f''(x) = \frac{(2x+10)(x+5)^2 - (x^2+10x-11) \cdot 2(x+5)}{(x+5)^4} = \frac{2x^2+10x+50-2x^2-20x+22}{(x+5)^3} = \frac{-7x-28}{(x+5)^3}$ 0.3/

$f''(1) = \frac{-7-28}{4^3} < 0 \Rightarrow$ $M(-11, -22)$
 $f''(-11) = \frac{7-28}{(-6)^3} > 0 \Rightarrow$ $M(-11, 11)$
 $\Rightarrow f(x) \nexists$ $\forall x \in (-\infty, -11) \cup (1, \infty)$
 $f(x) \nexists$ $\forall x \in (-11, 1) - \{-5\}$ 0.2/

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+11}{x+5} \sim \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+11}{x+5} \sim \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ 0.1/



e) $x=-1 \Rightarrow f(-1) = \frac{12}{4} = 3 \Rightarrow P(-1, 3)$
 $f'(-1) = \frac{x^2+10x-11}{(x+5)^2} \Big|_{x=-1} = \frac{-20}{16} = -\frac{5}{4}$
 $y-3 = -\frac{5}{4}(x+1)$ 0.3/

4) $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } -2 \leq x \leq -1 \\ \frac{x^2-3}{2} & \text{si } -1 < x \leq 0 \end{cases}$
 $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x} = -1$
 $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2-3}{2} = -1$
 $\Rightarrow f(x)$ continua en $x=-1 \Rightarrow f(x)$ continua en $[-2, 0]$ 0.25/

$f'(x) = \begin{cases} -1/x^2 & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ x & \text{si } -1 < x \leq 0 \end{cases}$
 $f'(-1^-) = -\frac{1}{x^2} \Big|_{x=-1} = -1$
 $f'(-1^+) = x \Big|_{x=-1} = -1$
 $\Rightarrow \exists f'(-1) \Rightarrow f(x)$ derivable en $(-2, 0)$ 0.5/

se verifican las hipótesis del teorema Lagrange $\Rightarrow \exists c \in (-2, 0) / \frac{f(0)-f(-2)}{0-(-2)} = f'(c); \frac{-\frac{3}{2}-(-\frac{1}{2})}{2} = -1/2$ 0.25/

1º rama: $-\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$
 $x = \sqrt{2}$ descarta p. q. \notin 1º rama
 2º rama: $x = -1/2$ 0.5/

2º eval:

1) a) $\int \frac{3x-15}{x^2-3x-2} dx$; $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ & -1 & 1 & 2 \\ & 1 & -1 & -2 \\ & & & \square \end{vmatrix}$ $\frac{3x-15}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$
 Sencillos + 1 doble $\rightarrow \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix}$ $3x-15 = A(x+1)^2 + B(x-2)(x+1) + C(x-2)$
 $x=2 \rightarrow -9 = 9A$; $A = -1$; $x=-1 \rightarrow -18 = -3C$; $C = 6$; $x=0 \rightarrow -15 = A-2B-2C$; $-15 = -1-2B-12$
 $2B = 2$; $B = 1$ 0,25/

$I = \int \frac{-1}{x-2} dx + \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{6}{(x+1)^2} dx = -\ln|x-2| + \ln|x+1| + 6 \int (x+1)^{-2} dx = \ln \left| \frac{x+1}{x-2} \right| + 6 \frac{(x+1)^{-1}}{-1} =$
 $= \ln \left| \frac{x+1}{x-2} \right| - \frac{6}{x+1} + C$ 0,25/ 0,25/ 0,5/

b) $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx = \int t^2 (1-t^2)^2 \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int t^2 (1-t^2)^2 \cdot dt = \int t^2 (1-t^2) dt = \int (t^2 - t^4) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} =$
 integrando impar en $\cos x \Rightarrow$ cambio de var. $\sin x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$
 $\cos x = \sqrt{1-t^2} \Rightarrow \sqrt{1-t^2}$
 $\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$

2) a) $\int (x^2+1)e^x dx = (x^2+1)e^x - 2 \int x e^x dx = (x^2+1)e^x - 2 [x e^x - \int e^x dx] = (x^2+1)e^x - 2(x e^x - e^x) =$
 $u = x^2+1 \rightarrow du = 2x dx$ $u = x \rightarrow du = dx$
 $dv = e^x dx \rightarrow v = e^x$ $dv = e^x dx \rightarrow v = e^x$
 $= (x^2+1)e^x - 2x e^x + 2e^x = (x^2-2x+3)e^x$ 0,25/ 0,25/ 0,75/

b) $\int \frac{2x+5}{x^2-4x+13} dx = \int \frac{2x-4+9}{x^2-4x+13} dx = \int \frac{2x-4}{x^2-4x+13} dx + 9 \int \frac{dx}{x^2-4x+13}$ (*)

$\frac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$ cambio de var. $x-2 = 3t \Rightarrow x = 3t+2$
 $dx = 3 dt$
 $\int \frac{dx}{x^2-4x+13} = \int \frac{3 dt}{(3t+2)^2 - 4(3t+2) + 13} = \int \frac{3 dt}{9t^2 + 12t + 4 - 12t - 8 + 13} = 3 \int \frac{dt}{9t^2 + 9} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} t = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{3}$ 0,75/
 $I = \ln|x^2-4x+13| + 3 \operatorname{arctg} \frac{x-2}{3} + C$ 0,25/

3) f(x) = $\frac{x}{x^2+2}$ a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ p.q. $x^2+2 \neq 0 \forall \mathbb{R}$; $\text{cont. en } x: y=0 \Rightarrow \frac{x}{x^2+2} = 0; x=0 \rightarrow (0,0)$ 0,1/

b) $f'(x) = \frac{x^2+2 - x \cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{-x^2+2}{(x^2+2)^2} = 0 \Rightarrow x^2=2; x = \pm\sqrt{2}$ posibles Mom 0,3/

$f''(x) = \frac{-2x(x^2+2)^2 - (-x^2+2) \cdot 2(x^2+2) \cdot 2x}{(x^2+2)^4} = \frac{-2x^3-4x - (-4x^3+8x)}{(x^2+2)^3} = \frac{2x^3-12x}{(x^2+2)^3}$ 0,2/

$f''(\sqrt{2}) = \frac{2(\sqrt{2})^3 - 12\sqrt{2}}{(2+2)^3} = \frac{4\sqrt{2} - 12\sqrt{2}}{64} = \frac{-8\sqrt{2}}{64} < 0 \Rightarrow M(\sqrt{2}, \sqrt{2}/4)$; $f''(-\sqrt{2}) = \frac{-2(-\sqrt{2})^3 - 12(-\sqrt{2})}{(2+2)^3} = \frac{4\sqrt{2} + 12\sqrt{2}}{64} = \frac{16\sqrt{2}}{64} > 0 \Rightarrow m(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}/4)$ 0,1/ 0,1/

$\Rightarrow f(x) \searrow \forall x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$ 0,1/
 $f(x) \nearrow \forall x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

c) $f'''(x) = \frac{2x^3-12x}{(x^2+2)^3} = 0 \Rightarrow 2x^3-12x=0; 2x(x^2-6)=0 \rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ x=\pm\sqrt{6} \end{matrix}$ posibles p.i. 0,2/

$f^{(4)}(x) = \frac{(6x^2-12)(x^2+2)^3 - (2x^3-12x) \cdot 3(x^2+2)^2 \cdot 2x}{(x^2+2)^6} = \frac{6x^4-24 - (12x^4-32x^2)}{(x^2+2)^4} = \frac{-6x^4+32x^2-24}{(x^2+2)^4}$ 0,2/

$f^{(4)}(0) = \frac{-24}{16} < 0 \Rightarrow (0,0)$ p.i. \int (concavo-convexo); $f^{(4)}(\pm\sqrt{6}) = \frac{-216+432-24}{64} = \frac{192}{64} > 0 \Rightarrow (\sqrt{6}, \sqrt{6}/8)$ p.i. \searrow
 $(-\sqrt{6}, -\sqrt{6}/8)$ p.i. \nearrow 0,2/

d) ¿A.N.? $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0^+ \Rightarrow [y=0 \text{ A.N.}] \Rightarrow \text{Z.A.O.}$ 0,1/

¿A.V.? \exists p.q. $x^2+2 \neq 0 \forall \mathbb{R}$ 0,1

3º EVALUACIÓN:

① $AX - BCX = A$; $(A - BC)X = A$; (llamamos $A - BC = D \Rightarrow DX = A$; $D^{-1}DX = D^{-1}A$; $X = D^{-1}A$) (*)

$D = A - BC = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $|D| = -1 \Rightarrow \exists D^{-1}$

$b_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7$ $b_{12} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5$ $b_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6$ $\text{Adj}(D) = \begin{pmatrix} -7 & -5 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$; $t \cdot \text{Adj}(D) = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

$b_{21} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$ $b_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$ $b_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$ $b_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 3$ $b_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2$ $b_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3$ $D^{-1} = \frac{1}{|D|} \cdot t \cdot \text{Adj}(D) = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -3 \\ 5 & -1 & -2 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Substituir en (*): $X = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -3 \\ 5 & -1 & -2 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -13 & 21 \\ 8 & -9 & 16 \\ -10 & 12 & -18 \end{pmatrix}$

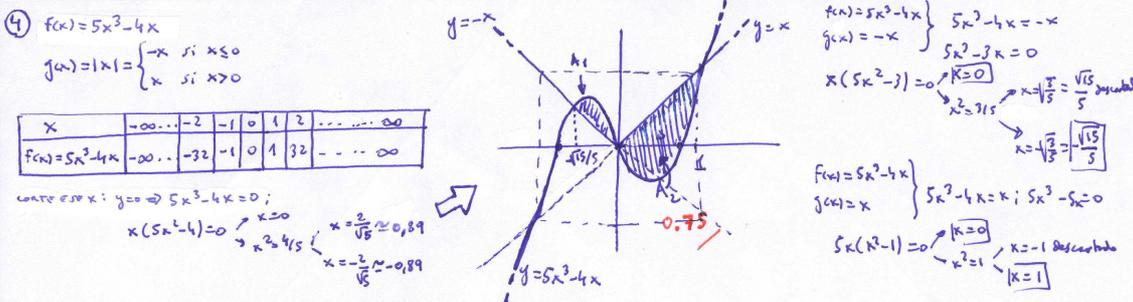
② $\begin{cases} x - ay + z = -1 \\ -x + y - z = a \\ x - y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & a \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2+R_1, R_3-R_1} \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 & -1 \\ 0 & 1-a & -2 & a-1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ a) $\text{d} \text{rg } M = \begin{vmatrix} 1 & -a & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + a + 1 - 1 - 1 + a = 2a - 2 = 0 \Rightarrow a = 1$ 0.25

Discusión: $a \neq 1 \Rightarrow \text{rg } M = \text{rg } M^* = 3 = n \Rightarrow$ n incógnitas \Rightarrow Sist. comp. OTDO (Soluc. Única)
 $a = 1 \Rightarrow \text{rg } M = \text{rg } M^* = 2 < n$ \Rightarrow incógnitas \Rightarrow Sist. comp. INDDO (Uniparamétrica)

b) Suprimimos f_1 y pasamos la x como parámetro: $\begin{cases} y - z = 1 + \lambda \\ -y - z = -\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2$; $\frac{y}{-2} = \frac{1 + \lambda}{-2} = \frac{-1 - \lambda}{2}$; $\frac{z}{-2} = \frac{1 + \lambda}{-2} = \frac{-1 - \lambda}{2} \Rightarrow \frac{z}{2} = \frac{1 + \lambda}{2} \Rightarrow X = \lambda$ 0.5

③ $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & -2 \\ -1 & -\lambda & -2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$; $(A - \lambda I)^2 = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & -2 \\ -1 & -\lambda & -2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & -2 \\ -1 & -\lambda & -2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 - 1 & 2\lambda - 2 & 4\lambda - 4 \\ 2\lambda - 2 & \lambda^2 - 1 & 4\lambda - 4 \\ 2 - 2\lambda & 2 - 2\lambda & -4 + (3-\lambda)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 0.5

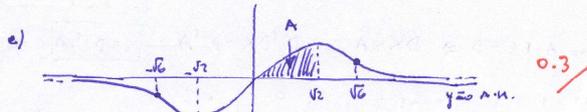
$\Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$ $2\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ $2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1$
 $2\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ $\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$ $2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1$
 $4\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ $4\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ $-4 + (3-\lambda)^2 = -4 + 9 - 6\lambda + \lambda^2 = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$
 La única solución que verifica todas las condiciones es $\lambda = 1$ 0.5



$A_2 = \int_0^1 [x - (5x^2 - 4x)] dx = \int_0^1 (-5x^2 + 5x) dx = -\frac{5x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} \Big|_0^1 = -\frac{5}{3} + \frac{5}{2} = \frac{5}{6} u^2$ 0.25

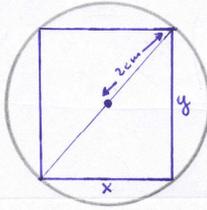
$A_1 = \int_{-\frac{\sqrt{5}}{5}}^0 (5x^2 - 4x) dx = \int_{-\frac{\sqrt{5}}{5}}^0 (5x^2 - 3x) dx = \left[\frac{5x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right]_{-\frac{\sqrt{5}}{5}}^0 = - \left[\frac{5}{3} \left(\frac{\sqrt{5}}{5} \right)^3 - \frac{3}{2} \left(\frac{\sqrt{5}}{5} \right)^2 \right] = - \left[\frac{5}{3} \cdot \frac{5\sqrt{5}}{125} - \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{5} \right] = - \left[\frac{\sqrt{5}}{6} - \frac{3}{2} \right] = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{6} = \frac{9}{6} - \frac{\sqrt{5}}{6} = \frac{9 - \sqrt{5}}{6} u^2$ 0.125

$\Rightarrow A_T = A_2 + A_1 = \frac{5}{6} + \frac{9 - \sqrt{5}}{6} = \frac{14 - \sqrt{5}}{6} u^2$



$$f) A = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x}{x^2+2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2x}{x^2+2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+2) = \ln \sqrt{x^2+2} \Big|_0^{\sqrt{2}} = \ln \sqrt{4} - \ln \sqrt{2} = \ln \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}} = \ln \sqrt{2} \quad 0.3$$

4)



0.5/

Restricción: $x^2 + y^2 = 16 \rightarrow y = \sqrt{16 - x^2}$ (6)

P.A. máxima: $A = x \cdot y \quad A(x) = x \sqrt{16 - x^2} = \sqrt{16x^2 - x^4}$

$$A'(x) = \frac{32x - 4x^3}{2\sqrt{16x^2 - x^4}} = 0 \Rightarrow 32x - 4x^3 = 0; 4x(8 - x^2) = 0$$

$x=0$ descartado
 $x^2=8 \rightarrow x=2\sqrt{2}$ cm
 // substituir en (6)

$$A''(x) = \frac{(16 - 2x^3)'}{(\sqrt{16x^2 - x^4})'} = \frac{-6x^2 \sqrt{16x^2 - x^4} - (16 - 2x^3) \cdot \frac{32x - 4x^3}{\sqrt{16x^2 - x^4}}}{16x^2 - x^4}$$

$$y = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ cm} \quad 0.5/$$

$$A''(2\sqrt{2}) = \frac{-48\sqrt{128-64}}{128-64} < 0 \Rightarrow \text{se trata de un máximo q.e.u en M} \quad 0.5/$$

Soluc: se trata de un cuadrado de lado $2\sqrt{2}$ cm