

CONTINUIDAD DE FUNCIONES

CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Una función **f es continua en a** si y sólo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

- 1) Existe $f(a)$, es decir, $a \in \text{Dom } f$.
- 2) Existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y es finito.
- 3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Si falla alguna de estas condiciones, diremos que la función es **discontinua en a** .

$$f \text{ continua en } a \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \exists f(a) \\ 2) \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ (finito)} \\ 3) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \end{cases}$$

CONTINUIDAD LATERAL

Una función **f es continua por la izquierda en a** si y sólo si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

Teorema

Una función es continua en un punto si y sólo si la función es continua por la izquierda y por la derecha en dicho punto.

Una función **f es continua por la derecha en a** si y sólo si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

CONTINUIDAD EN UN INTERVALO

Una función **f es continua en un intervalo abierto (a, b)** si y sólo si es continua en cada uno de los puntos del intervalo

Una función **f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$** si y sólo si:

- f es continua en el intervalo abierto (a, b) .
- f es continua por la derecha en a .
- f es continua por la izquierda en b .

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS

1. La función constante $f(x) = k$ es continua en todo su dominio $D(f) = \mathbb{R}$.
2. La función identidad $f(x) = x$ es continua en todo su dominio $D(f) = \mathbb{R}$.
3. Si f y g son funciones continuas en a , se cumple:
 - a) $f + g$, $f - g$ y $f \cdot g$ son continuas en a .
 - b) f / g es continua en a si y sólo si $g(a) \neq 0$.
 - c) f^g es continua en a si y sólo si $f(a) > 0$.
4. Si f es continua en a y g continua en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es continua en a .

CONTINUIDAD DE FUNCIONES ELEMENTALES

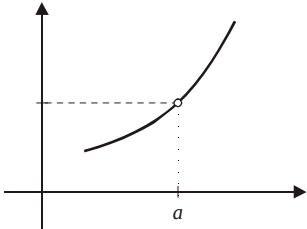
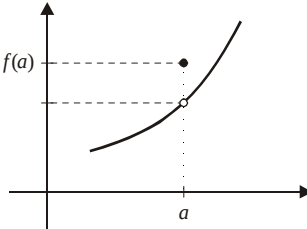
Las siguientes funciones son continuas en su dominio.

- 1) Las funciones polinómicas $f(x) = P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ son continuas en todo $\mathbb{R}$.
- 2) Las funciones racionales $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ son continuas en todo $\mathbb{R}$ excepto en los puntos que anulan al denominador, o sea, las discontinuidades de una función racional están en las raíces del denominador, $Q(x) = 0$.
- 3) Las funciones irracionales $f(x) = \sqrt[n]{x}$ son continuas en $(0, +\infty)$ si n es par y en $\mathbb{R}$ si n es impar.
- 4) Las funciones exponenciales $f(x) = a^x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$, son continuas en $\mathbb{R}$.
- 5) Las funciones logarítmicas $f(x) = \log_a x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$, son continuas en $(0, +\infty)$.
- 6) Las funciones trigonométricas seno y coseno, $f(x) = \sin x$ y $g(x) = \cos x$, son continuas en $\mathbb{R}$, y la función tangente $h(x) = \tan x$ es continua en $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z} \right\}$. Los puntos $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ son los puntos de discontinuidad de la función tangente.
- 7) Las funciones definidas a intervalos pueden presentar discontinuidades en los extremos de los intervalos.

TIPOS DE DISCONTINUIDADES

Si f no es continua en a puede ser debido a una de las siguientes causas:

- 1) Existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y es finito, pero o no existe $f(a)$ o si existe no coincide con el valor del límite. En este caso diremos que f tiene una **discontinuidad evitable** en a .

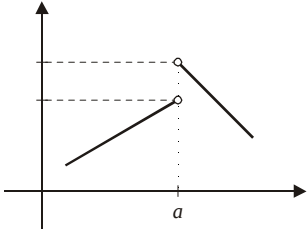
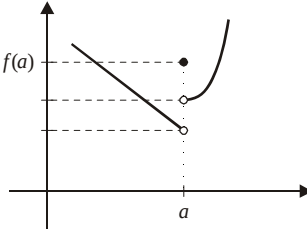
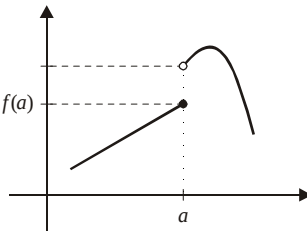
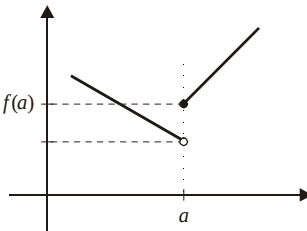
	
$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ y } \nexists f(a)$	$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x), \exists f(a) \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$

- 2) Existen los límites laterales y son finitos, pero distintos. Diremos, en tal caso, que f tiene una **discontinuidad de salto finito** en a .

$$\exists \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \text{ (finito)} \text{ y } \exists \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \text{ (finito)}$$

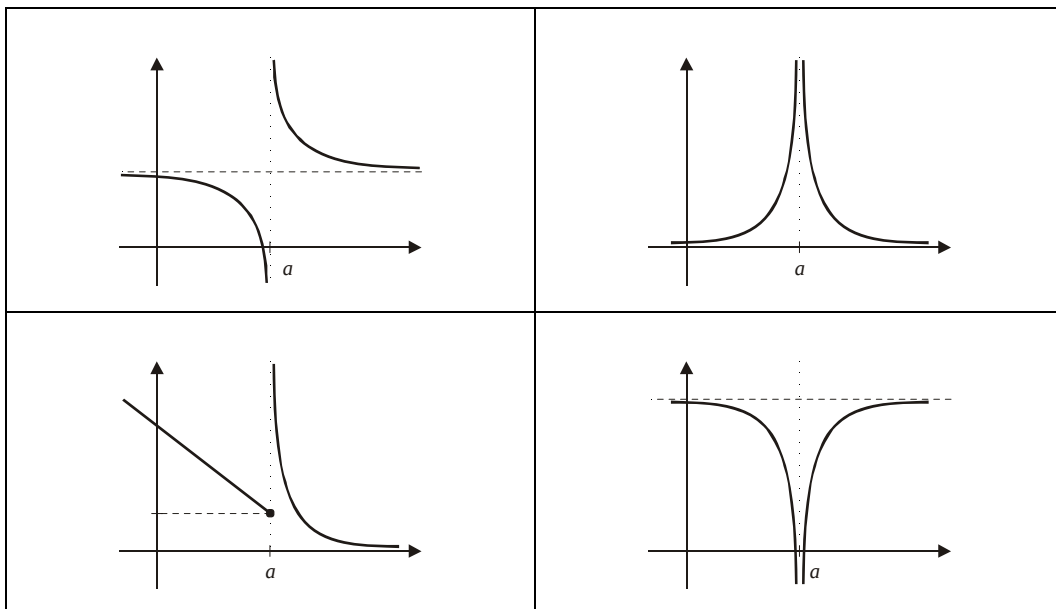
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

$$\text{Salto en } a = \left| \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \right|$$

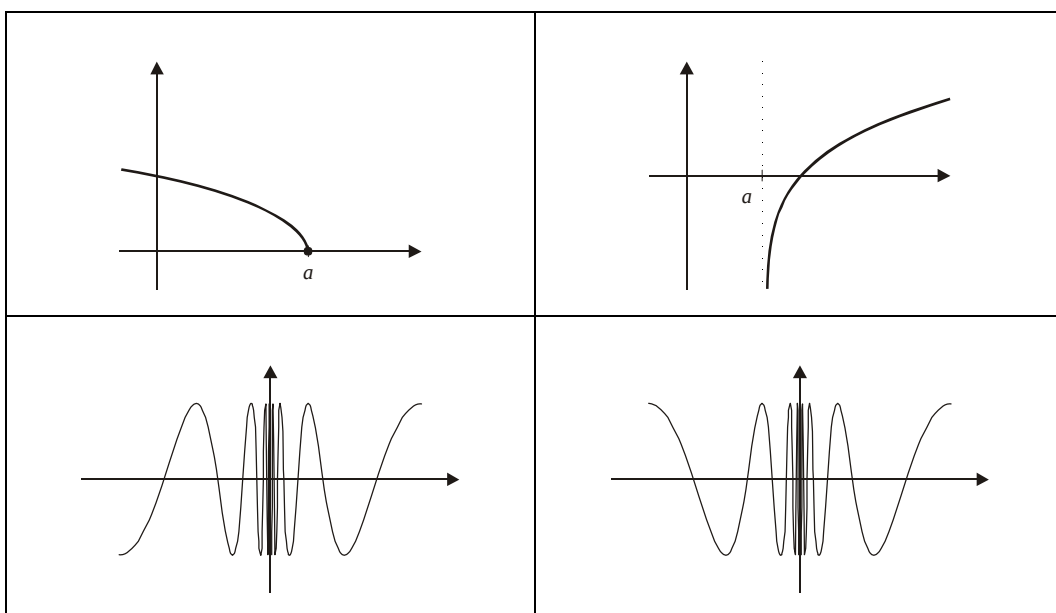
- 3) Los límites laterales existen, pero, al menos, uno de ellos es infinito ($+\infty$ ó $-\infty$). En este caso diremos que la función f tiene una **discontinuidad de salto infinito** en a .

$$\left(\exists \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \text{ y } \exists \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right) \text{ y } \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ \text{ó} \\ -\infty \end{cases} \text{ ó } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ \text{ó} \\ -\infty \end{cases} \right)$$



- 4) Alguno de los límites laterales en a no existe. Diremos entonces que f tiene una **discontinuidad esencial** en a .

$$\nexists \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \text{ ó } \nexists \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$



TEOREMAS RELATIVOS A LA CONTINUIDAD

Teorema de conservación del signo

Si una función f es continua en un punto a y $f(a) \neq 0$, entonces existe un entorno de a , en el que la función f tiene el mismo signo que $f(a)$.

Teorema de Bolzano

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Una de las aplicaciones más importantes del teorema de Bolzano es la determinación de ceros de funciones y raíces de ecuaciones.

Teorema de los valores intermedios

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces la función f toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$. Es decir, para cualquier valor d comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

Teorema de Weierstrass

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces la función f tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto en el intervalo $[a, b]$. Es decir, existen dos valores c y d pertenecientes a $[a, b]$ tales que para todo $x \in [a, b]$ se cumple que $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$.

$m = f(c)$ y $M = f(d)$ serán, respectivamente, el mínimo y el máximo absolutos en $[a, b]$.

Teorema de acotación

Si f es una función continua en $[a, b]$, entonces $f([a, b]) = [m, M]$. Por lo tanto, la función f está acotada en $[a, b]$: $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$.

Teorema

Si f es una función continua en $[a, b]$ y, además, f es creciente o decreciente en $[a, b]$, f alcanza el máximo y el mínimo absolutos en los extremos del intervalo.

Teorema de continuidad de la función recíproca.

Si una función f es continua e inyectiva en un intervalo I , entonces:

- f es estrictamente creciente o decreciente en I .
- f^{-1} es continua y estrictamente creciente o decreciente en $f(I)$, según que f sea estrictamente creciente o decreciente en I .