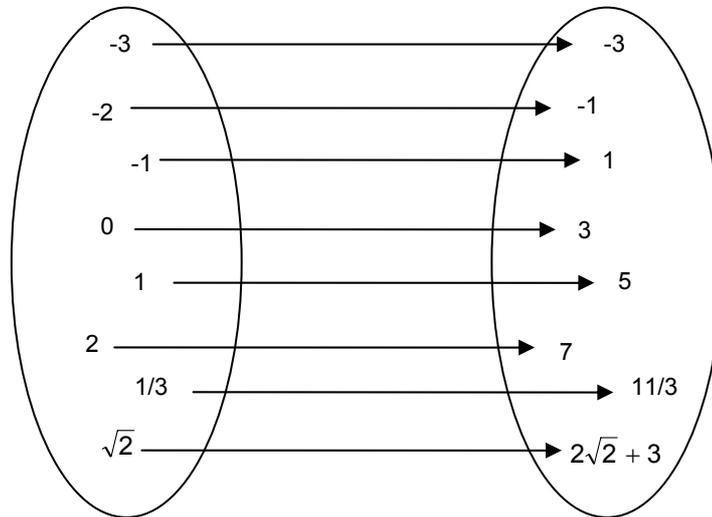


FUNCIONES, LÍMITES Y CONTINUIDAD

I) CONCEPTO DE FUNCIÓN:

“Una función es una aplicación que hace corresponder a cada elemento –llamado x , o variable independiente- de un conjunto un único elemento a lo sumo –llamado imagen de x , o $f(x)$ - de otro conjunto”

Por ejemplo, la función $f(x)=2x+3$ se puede representar, utilizando diagramas de conjuntos, así:



Ahora bien, en la práctica, lo anterior se suele indicar más bien mediante tabla de valores:

x	-3	-2	-1	0	1	2	1/3	$\sqrt{2}$
f(x)	-3	-1	1	3	5	7	11/3	$2\sqrt{2} + 3$

(NOTA: más adelante veremos que para esta función, por tratarse de una recta, basta con dar dos valores...)

Por ejemplo, se dice que la imagen de 2 a través de la función anterior es 7, y se designa como $f(2)=7$

¡Muy importante!: **Para que una función esté bien definida, un x no puede tener más de una imagen.**

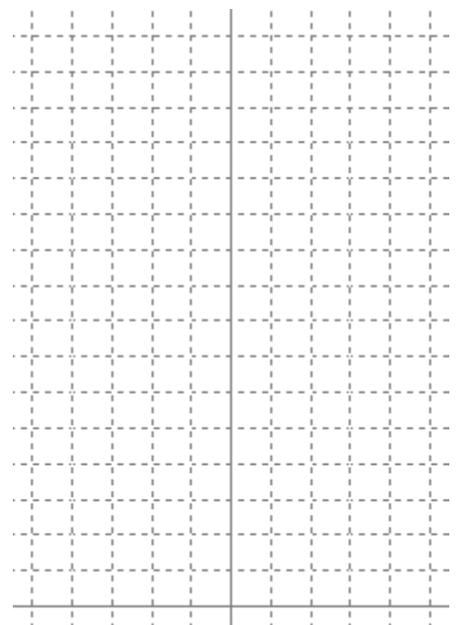
La imagen $f(x)$ también se denota como y , y se llama variable dependiente; en el ejemplo anterior, se diría $y=2x+3$

- El conjunto formado por todos los x posibles, es decir, para los que existe imagen, se llama **Dominio de definición**, y se designa como $\text{Dom}(f)$; en el ejemplo anterior, sería lógicamente $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$

- “La gráfica de una función $f(x)$ está formada por todos los puntos (x,y) que satisfacen la expresión $y=f(x)$ ”

Ejemplo 1: Construir la gráfica de la función $f(x)=x^2$ mediante tabla de valores apropiada

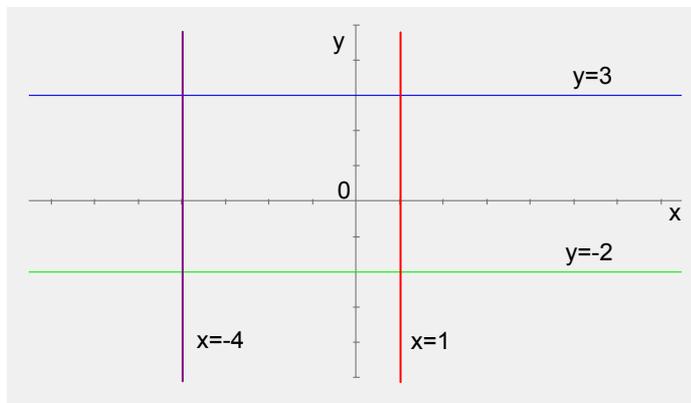
x	
$f(x)=x^2$	



II) GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES MÁS HABITUALES:

II.1) FUNCIÓN CONSTANTE ($y=k$)

Su gráfica, lógicamente, es una recta horizontal, que corta al eje vertical a la altura de k unidades; ejemplos:



De forma parecida, $x=K$ representa una recta vertical, la cual corta al eje x a la altura de k unidades; en el gráfico anterior puede verse un par de ejemplos de este caso. ¿Qué ecuación tendrán entonces los ejes de coordenadas?

II.2) FUNCIÓN AFÍN ($y=mx+n$)

La gráfica de una función de 1^{er} grado es siempre una recta. Ya vimos en el tema de Programación Lineal que la forma más rápida de representarla es dar dos valores: $x=0$ e $y=0$, correspondientes a los cortes con los ejes.

II.3) FUNCIÓN CUADRÁTICA ($y=ax^2+bx+c$)

La gráfica de una función de 2^o grado es siempre una parábola. Recordar de cursos anteriores que la forma rápida de representarla es hallar los siguientes elementos:

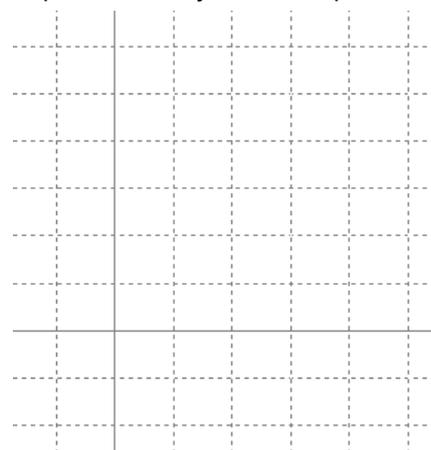
1º) **Vértice:** Su abscisa viene dada por $x_v = -\frac{b}{2a}$; la ordenada y_v se obtiene sustituyendo x_v en la ecuación de la parábola.

2º) **Cortes con los ejes:** El corte con el eje x se obtiene haciendo $y=0$, e decir, resolviendo la ecuación de 2º grado asociada a la parábola; nótese que la parábola no tiene por qué cortar necesariamente a dicho eje.

El corte con el eje y se obtiene simplemente sustituyendo $x=0$ en la ecuación de la parábola. Siempre se va a cortar a dicho eje.

Finalmente, recordar que las ramas de la parábola son simétricas respecto a un eje vertical que pase por su vértice.

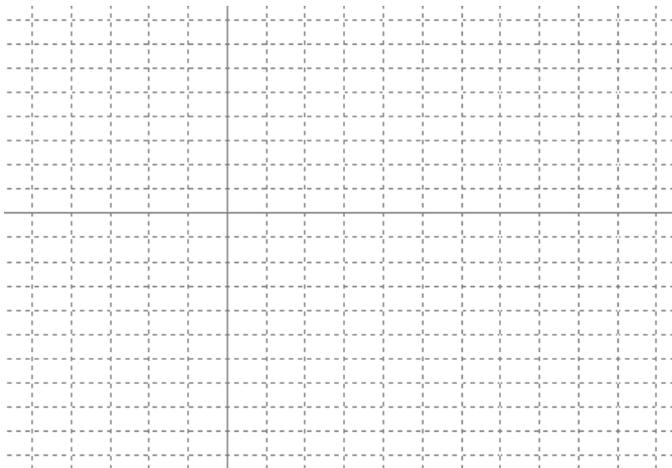
Ejemplo 2: Representar la parábola $y=x^2-4x+3$



II.4) FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

Se representan sencillamente dibujando cada rama en su intervalo de definición:

Ejemplo 3: Representar $f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{si } x \leq -2 \\ 7 & \text{si } -2 < x \leq 1 \\ x^2 - 10x + 16 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

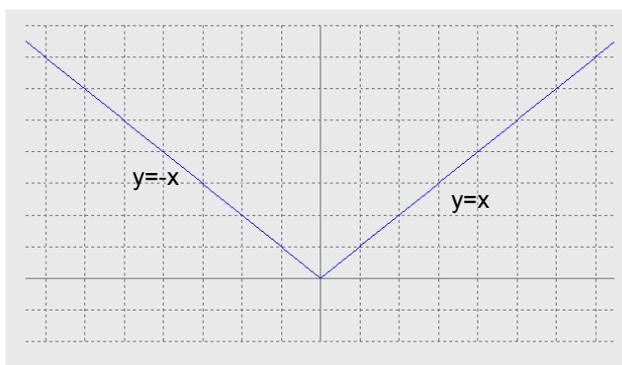


II.5) FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

En primer lugar, tenemos que recordar la definición de valor absoluto de un número:

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, su representación gráfica será:

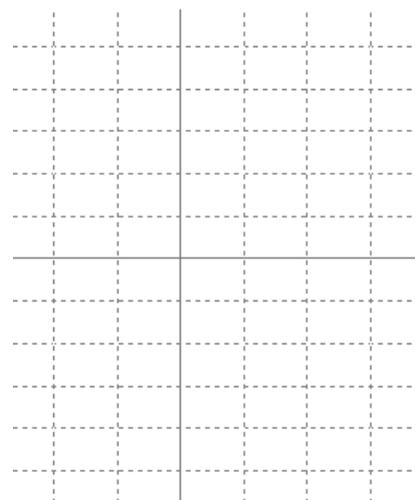


En general, para representar $|f(x)|$, seguiremos los siguientes pasos:

- 1º) Representamos la función que figura dentro del valor absoluto, es decir, $f(x)$
- 2º) Las partes positivas (es decir, por encima del eje x) de $f(x)$ se dejan igual, mientras que las negativas se reflejan respecto al eje x .

De esta forma, nótese que $|f(x)|$ siempre estará por encima del eje x , es decir, será siempre positiva. Por lo tanto, todo gira en torno a en qué puntos se anula la función que figura dentro del valor absoluto, esto es, $f(x)$. Véase el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4: Representar la función $f(x)=|2x-4|$ y obtener su expresión analítica como función definida por ramas.



NOTA: En el anexo final de este tema se puede ver una serie de ejemplos de gráficas representativas.

Ejercicio: 7

III) IDEA INTUITIVA DE $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ (Ver pág. 138 del libro de texto)

Ejemplo 5: Estudiar el comportamiento de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

en las proximidades de $x=1$, completando las siguientes tablas (mediante calculadora), y explicar gráficamente la situación:

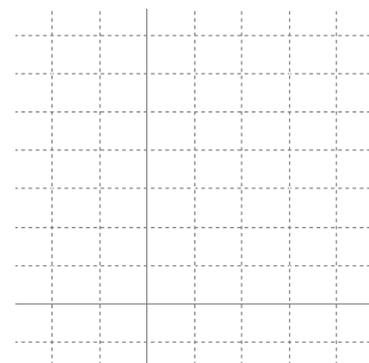
$x \rightarrow 1^-$	0,9	0,99	0,999...
$f(x) \rightarrow$			

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$$

$x \rightarrow 1^+$	1,1	1,01	1,001...
$f(x) \rightarrow$			

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) =$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$$



En la práctica, los límites no se suelen calcular de esta forma, sino operando:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

En definitiva, vemos que cuando las x se acercan a 1^- (1ª tabla), las imágenes correspondientes tienden a 2^- , mientras que cuando las x se acercan a 1^+ (2ª tabla) las imágenes correspondientes tienden a 2^+ . Y todo ello es independiente de que, exactamente en $x=1$, la función vale 2.

■ **Observaciones:**

- 1º Para que exista límite han de coincidir los límites laterales (o, dicho al revés, si no coinciden los límites laterales, entonces el límite no existe).
- 2º **A efectos de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, no hay que tener en cuenta lo que ocurre exactamente en $x=a$, sino en las proximidades;** de hecho, hay casos en los que en un punto no existe imagen pero sí límite (como en el ejemplo que veremos a continuación), y esta es precisamente la utilidad del concepto de límite.
- 3º De todos modos, normalmente existen límite e imagen, y ambos coinciden, como en el ejemplo que acabamos de ver.

Ejemplo 6: Dada $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 2 \\ x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

- a) Obtener $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ numéricamente, completando (mediante calculadora) las tablas que figuran a continuación.
- b) Obtener analíticamente dicho límite.
- c) Explicar gráficamente la situación.

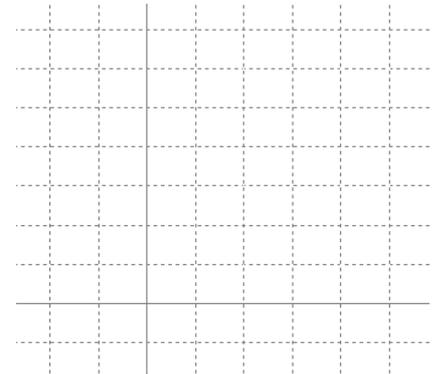
$x \rightarrow 2^-$	1,9	1,99	1,999...
$f(x) \rightarrow$			

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) =$

$x \rightarrow 2^+$	2,1	2,01	2,001...
$f(x) \rightarrow$			

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) =$

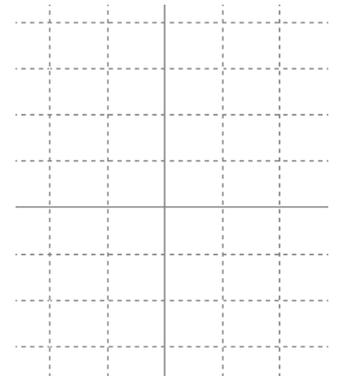
$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$



Es decir, cuando las x se acercan a 2^- (1ª tabla), las imágenes correspondientes tienden a 3^- , mientras que cuando las x se acercan a 2^+ (2ª tabla) las imágenes correspondientes tienden a 3^+ . En este caso, la función no está definida justo en $x=2$, pero ello no impide que exista límite. Recordar: **a efectos del límite, no hay que fijarse en lo que hace la función exactamente en el punto, sino en sus proximidades.**

Ejemplo 7: Dada $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

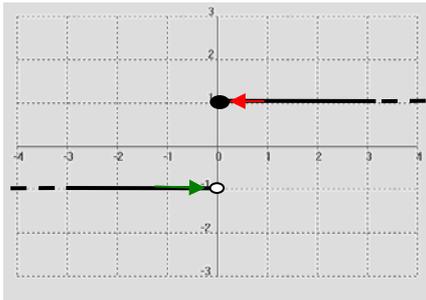
- a) Obtener analíticamente $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- b) Explicar gráficamente la situación.



Vemos que existe límite en $x=0$, pues los límites laterales coinciden en dicho punto, y dicho límite vale 0. Ahora bien, la imagen en $x=0$ es distinta del límite, es decir, en este caso el límite no coincide con la imagen, pero ello no impide que exista límite. Recordar: **a efectos del límite, no hay que fijarse en lo que la función hace exactamente en el punto, sino en sus proximidades.**

■ Veamos por último un sencillo ejemplo de función en el que no hay límite:

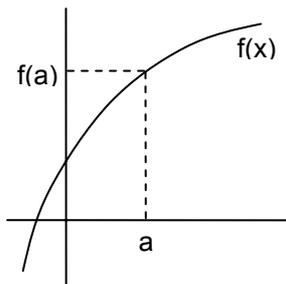
Ejemplo 8: Dada $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ se pide: **a)** Representarla. **b)** Hallar $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$



$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

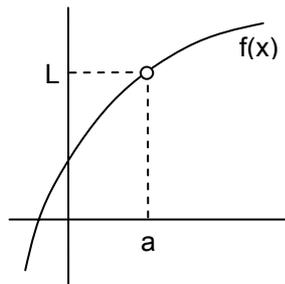
En este caso, al acercarnos a $x=0^-$ por la rama izquierda (flecha verde), las imágenes tienden exactamente a -1 (aunque precisamente en $x=0$ no tengan el valor esperado, sino 1; de nuevo, téngase en cuenta que a efectos del límite no hay que tener en cuenta lo que hace la función exactamente en el punto sino en sus proximidades...), mientras que al acercarnos a $x=0^+$ por la rama derecha (flecha roja), las imágenes tienden exactamente a 1. Por lo tanto, **como no coinciden los límites laterales, el límite global no existe.**

■ Podríamos ver más ejemplos, pero todos ellos se resumirían en alguno de los 4 casos del siguiente esquema (que corresponden, respectivamente, a los cuatro ejemplos anteriores); va a existir límite cuando $x \rightarrow a$ sólo en los tres primeros supuestos:



$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

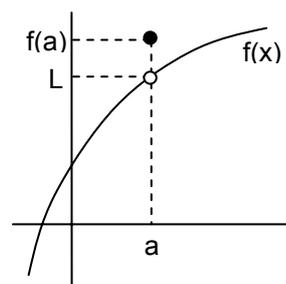
(Ejemplo 5)



$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

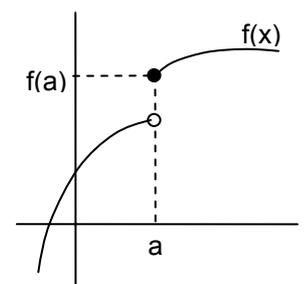
[aunque $\nexists f(a)$]

(Ejemplo 6)



$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq f(a)$$

(Ejemplo 7)



$$\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

[aunque $\exists f(a)$]

(Ejemplo 8)

IV) CONTINUIDAD

Intuitivamente, una función es continua cuando se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel.

Más formalmente, se define **función continua en un punto** de la siguiente forma:

$$f(x) \text{ continua en } x = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Es decir: "Una función es continua en un punto si el límite coincide con la imagen en dicho punto".

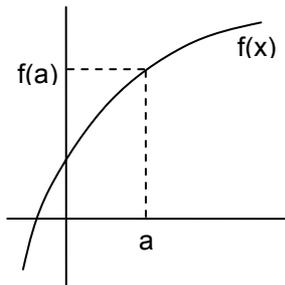
A efectos prácticos, para estudiar si una función es continua en un punto, hay que comprobar:

- 1) que exista imagen
- 2) que exista límite
- 3) y que ambos coincidan

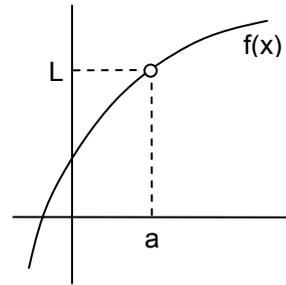
(En caso de no ser continua en un punto, se dice que es discontinua).

Por extensión, diremos que una función es **continua en un intervalo** cuando lo es en todos los puntos de dicho intervalo.

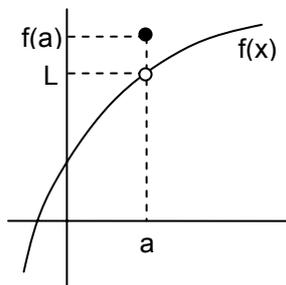
Vamos a recordar de nuevo el esquema-resumen visto en el apartado anterior, e investigar en cada uno de los cuatro casos si la función es continua en $x=a$, para lo cual aplicaremos los tres requisitos de la continuidad arriba mencionados; observamos que la función es continua en $x=a$ sólo en el primer supuesto:



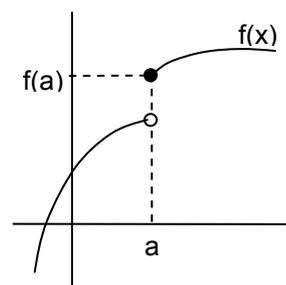
$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Rightarrow f(x) \text{ CONTINUA en } x=a$$



$$\left. \begin{array}{l} \nexists f(a) \\ \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \text{ DISCONTINUA en } x=a$$



$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq f(a) \Rightarrow f(x) \text{ DISCONTINUA en } x=a$$

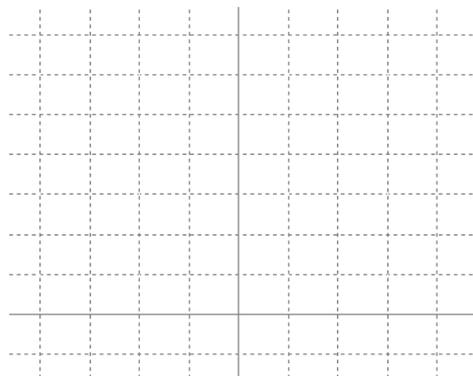


$$\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Rightarrow f(x) \text{ DISCONTINUA en } x=a$$

Nótese que en el último caso la función es discontinua, independientemente de que exista o no imagen.

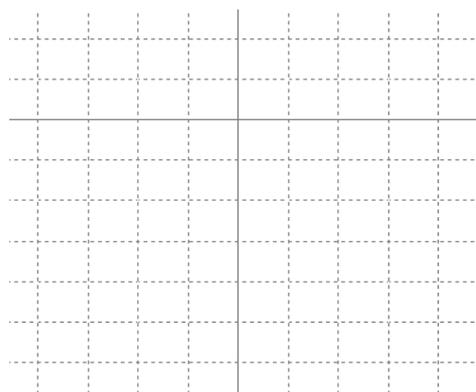
Ejemplo 9: Dada $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 5 & \text{si } x \leq -1 \\ -x^2 + 2x + 5 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

- a) Estudiar su continuidad.
b) Representarla gráficamente.



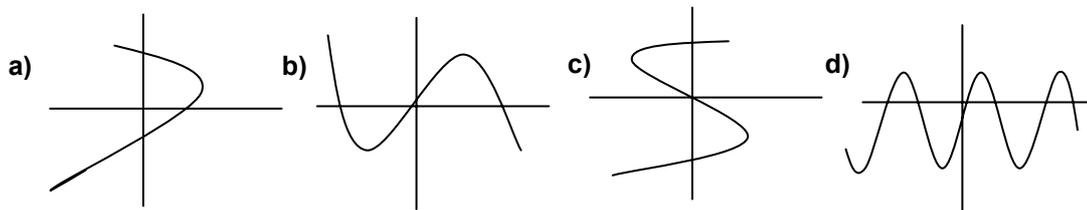
Ejemplo 10: Dada $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 5 & \text{si } x \in (-\infty, 1] \\ x + 2 & \text{si } x \in (1, \infty) \end{cases}$

- a) Estudiar su continuidad.
b) Representarla gráficamente.



EJERCICIOS

1. ¿Cuáles de estas representaciones corresponden a la gráfica de una función? (Razonar la respuesta):



2. En cada apartado, representar las rectas sobre los mismos ejes:

a) $y=3x$
 $y=3x+2$
 $y=3x-7$

b) $y=-3x$
 $y=-3x+2$
 $y=-3x-7$

c) $y = \frac{1}{3} x$
 $y = \frac{1}{3} x + 2$
 $y = \frac{1}{3} x - 7$

d) $y=0$
 $y=x$
 $y=-x$

3. Representar sobre los mismos ejes las siguientes parábolas. ¿Qué conclusiones podemos extraer?: a) $y=x^2$ b) $y=2x^2$ c) $y=x^2/2$ d) $y=-x^2$ e) $y=-4x^2$

4. Dadas las siguientes parábolas, hallar: i) Vértice
 ii) Puntos de corte con los ejes
 iii) Representación gráfica

a) $y=x^2-6x+8$
 b) $y=x^2-2x-3$
 c) $y=-x^2-4x-3$
 d) $y=x^2-4x+7$
 e) $y=x^2-6x$
 f) $y=x^2+x+1$
 g) $y=3x^2+15x+18$
 h) $y=-x^2-2x-2$
 i) $y=x^2+2x-1$

j) $y=x^2-4$
 k) $y=x^2+4$
 l) $y=x^2+4x+5$
 m) $y=x^2+4x+3$
 n) $y=-x^2-8x-4$
 o) $y=2x^2+4x+6$
 p) $y=-x^2-1$
 q) $y=(x+5)^2-8$
 r) $y=2(x-1)^2-8$

s) $y=(x-5)^2+8$
 t) $y=-2(x-1)^2+8$
 u) $y = \frac{1}{2} (x+2)^2 - 5$
 v) $y=x^2-2x+1$
 w) $y=x^2-4x+2$
 x) $y=2x^2-8x+6$
 y) $y=-3x^2-6x+12$
 z) $y=x^2-2x+3$

α) $y=x^2-6x+5$
 β) $y = \frac{1}{4} x^2 + x - 2$
 γ) $y=2x^2-10x+8$
 δ) $y = \frac{1}{2} x^2 - x - \frac{3}{2}$
 ε) $y=x^2-8x+7$

5. En cada apartado, representar las parábolas sobre los mismos ejes:

a) $y=x^2$
 $y=(x-4)^2$
 $y=(x+5)^2$

b) $y=x^2$
 $y=x^2+4$
 $y=x^2-5$

c) A la vista de lo anterior, ¿cómo sería la parábola $y=(x-4)^2+5$? ¿Cuál es su vértice?

6. Representar las siguientes funciones definidas a trozos:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in (-\infty, 2) \\ x & \text{si } x \in [2, \infty) \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -1 \\ 1-2x & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 3x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \in (-\infty, 2) \\ x - 2 & \text{si } x \in [2, 4] \\ 5 & \text{si } x \in (4, \infty) \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 5x - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ -2 & \text{si } x = 2 \\ x/2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } -5 \leq x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{si } x \in (-\infty, 1] \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } x \in (1, \infty) \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x < 0 \\ -2 & \text{si } x = 0 \\ \frac{4}{x-2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

h) $f(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{si } x \in (-\infty, 2] \\ x^2 - 4x & \text{si } x \in (2, \infty) \end{cases}$

i) $f(x) = \begin{cases} \frac{5}{x-5} & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ \frac{10}{x+2} & \text{si } x > 3 \end{cases}$

j) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 3x - x^2 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ x - 4 & \text{si } 3 \leq x < 6 \\ 0 & \text{si } x > 6 \end{cases}$

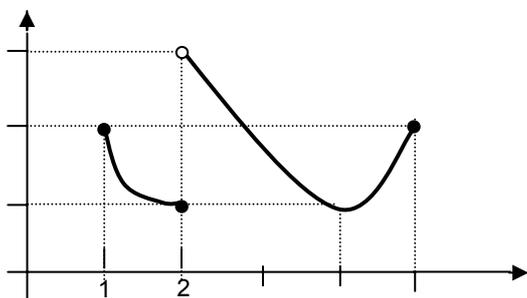
7. Dadas las siguientes **funciones valor absoluto** se pide: **i)** Representación gráfica **ii)** Definición analítica por ramas.

a) $f(x) = |-3x + 3|$ **b)** $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$ **c)** $f(x) = |x + 1|$ **d)** $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$
e) $f(x) = |-x^2 - 4x - 5|$ **f)** $f(x) = |3x + 6|$ **g)** $f(x) = \left| \frac{1}{2}x^2 - x - 4 \right|$

RECORDAR: • Para que exista límite de una $f(x)$ en un punto han de coincidir los límites laterales en dicho punto.

- A efectos del $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ no tenemos en cuenta lo que ocurre exactamente en $x=a$, sino en las proximidades. De hecho, hay casos en los que no existe $f(a)$ pero sí el lím (de ahí la utilidad de la noción de límite)

8.



Dada la gráfica de la figura, indicar si existe $\lim f(x)$ en los siguientes casos:

- Cuando $x \rightarrow 1$
- Cuando $x \rightarrow 2$
- Cuando $x \rightarrow 4$
- Cuando $x \rightarrow 5$

9. Representar la función

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ 4 - x & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ x - 2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

y calcular $\lim f(x)$ cuando $x \rightarrow 1$, $x \rightarrow 3$, $x \rightarrow 5$

10. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ ax + 3 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ bx^3 - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

calcular los valores de los parámetros **a** y **b** para que existan los límites en $x=1$ y $x=2$

(Soluc: $a=-1$, $b=3/8$)

RECORDAR:

$$f(x) \text{ continua en } x = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Es decir: "Una función es continua en un punto si el límite coincide con la imagen en dicho punto".

- A efectos prácticos, para estudiar si una función es continua en un punto, hay que comprobar:
 - 1) que exista imagen
 - 2) que exista límite
 - 3) y que coincidan

11. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \geq 0 \\ x - 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{d) } f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x - 6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\text{e) } f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

(Soluc: a) discont. en $x=0$; b) discont. en $x=0$; c) discont. en $x=2$; d) continua $\forall \mathbb{R}$; e) discont. en $x=0$ y $x=1$)

12. Dada $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ se pide: a) Representación gráfica.
b) Estudiar analíticamente la continuidad lateral en $x=0$
c) A la vista del apartado anterior, ¿es continua en $x=0$?

13. Representar la siguiente función e indicar si tiene algún punto de discontinuidad:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 3 \\ x^2 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 0 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

(Soluc: discontinua en $x=3$ y $x=4$)

14. Representar la siguiente función e indicar si tiene algún punto de discontinuidad:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(Soluc: discontinua en $x=2$)

15. Calcular cuánto debe valer a para que la siguiente función sea continua $\forall \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 2 \\ 3 - ax^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(Soluc: $a=0$)

16. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

hallar a y b para que la función sea continua y dibujar la gráfica de la función. (Soluc: $a=3$ y $b=-1$)

17. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ mx + n & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ -x^2 + 10x - 11 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

hallar los valores de m y n para que $f(x)$ sea continua (puede ser útil dibujar la gráfica).

(Soluc: $m=3$, $n=1$)

18. Ídem:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } x \leq -2 \\ ax + 2 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 + b & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

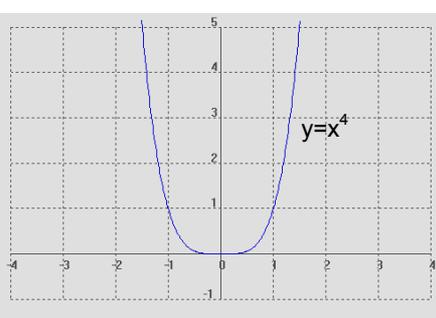
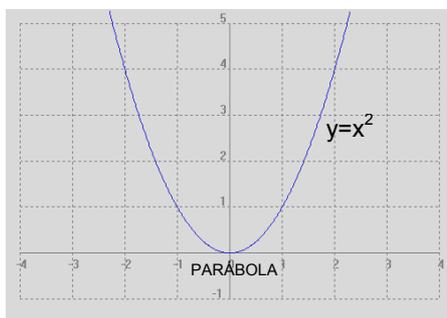
(Soluc: $a=-1/2$, $b=-3$)

19. Ídem:

$$f(x) = \begin{cases} ax + 2 & \text{si } x < -1 \\ b/x^2 & \text{si } -1 \leq x < 3 \\ cx & \text{si } 3 \leq x < 5 \\ 10 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

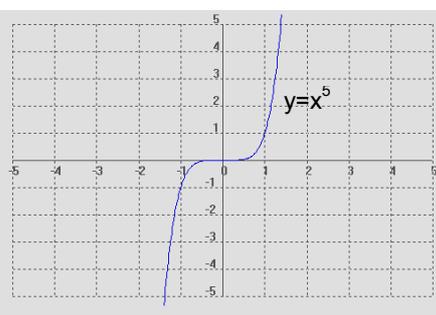
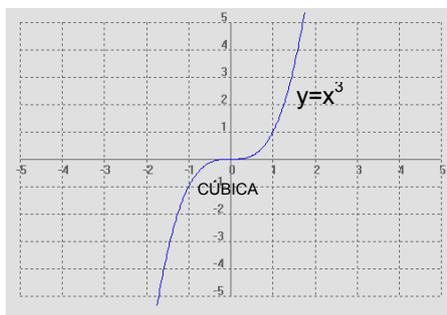
(Soluc: $a=-52$, $b=54$, $c=2$)

GRÁFICAS MÁS REPRESENTATIVAS



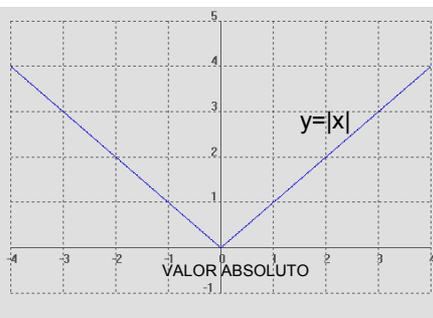
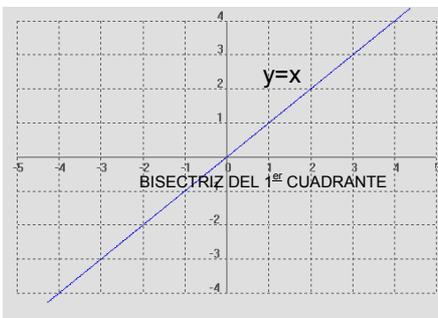
En general, las curvas $y=x^n$, siendo n positivo par, tienen esta forma.

(cuanto mayor es n, más acusada es la curvatura)

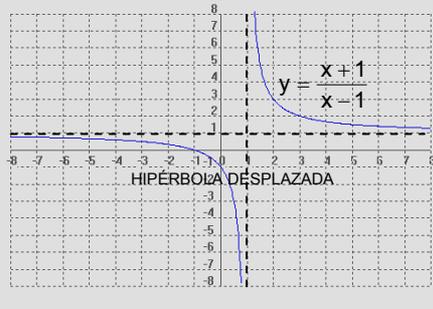
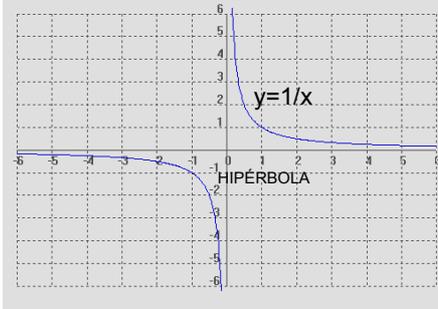


En general, las curvas $y=x^n$, siendo n positivo impar ($\neq 1$), tienen esta forma.

(cuanto mayor es n, más acusada es la curvatura)



En general, la gráfica de $y=|f(x)|$ se obtiene reflejando la de $f(x)$ respecto al eje OY en el semiplano superior.



En general,

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

donde $c \neq 0$, es una hipérbola.

