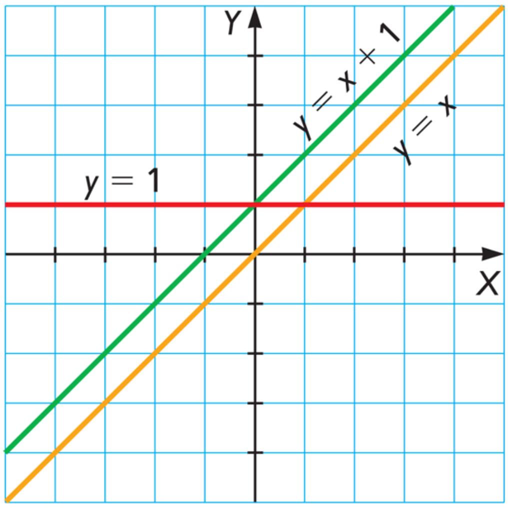
DERIVADAS



MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC. SS. II

Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas

I) INTRODUCCIÓN. UTILIDAD DEL OPERADOR DERIVADA

En este tema vamos a conocer y emplear un operador matemático muy útil, llamado ***derivada de una función***, que opera sobre una función y da como resultado otra función (normalmente más simple). Su utilidad radica en que, como veremos más adelante, el signo de la derivada de una función en un punto nos dirá si la función es creciente o decreciente en dicho punto; ello nos permitirá deducir, por tanto, los máximos y mínimos de la función, algo muy importante en infinidad de funciones extraídas de situaciones reales del campo de las Ciencias Sociales: pensemos en una función que represente los beneficios de una empresa, o el coste de fabricación de un determinado producto, etc.

Pero para ello, en primer lugar, tendremos que aprender a derivar, lo cual veremos en el siguiente apartado. La notación que seguiremos será la siguiente:

- Si la función a derivar se llama f(x), entonces su derivada la denotaremos como f '(x)
- " " " " " " " y, " " " " " " y '

Utilizaremos indistintamente ambas notaciones.

II) DERIVADAS DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

II.1) Función constante: $\boxed{y = K \rightarrow y' = 0}$ Es decir, **«La derivada de una constante es siempre cero»**

NOTA: Esta derivada, y todas las de este apartado, pueden ser demostradas; como ello excede los límites de esta unidad didáctica, nos remitimos a las demostraciones que figuran en el libro de texto. Todas estas reglas de derivación están recogidas en la tabla del final del tema.

Ejercicio 1: Hallar la derivada de las siguientes funciones constantes:

a) y = 2
b) y = -3
c) $y = \frac{1}{2}$
d) y = 0
e) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$
f) $y = \pi$

II.2) Función identidad: $\boxed{y = x \rightarrow y' = 1}$ (Ver demostración en el libro)

II.3) Función de proporcionalidad directa: $\boxed{y = K \cdot x \rightarrow y' = k}$

Ejercicio 2: Hallar la derivada de las siguientes funciones de proporcionalidad directa:

a) y = 2x
b) y = -5x
c) y = 0,01x
d) $y = \frac{x}{2}$
e) y = x
f) $y = \frac{2}{3}x$
g) y = -x
h) $y = -\frac{5x}{3}$
i) y = 7x

II.4) Derivada de una potencia: $\boxed{y = x^n \rightarrow y' = n \cdot x^{n-1}}$ (donde n ∈ IR)

Ejercicio 3: Hallar la derivada de las siguientes potencias:

a) $y=x^2$
b) $y=x^3$
c) $y=x^4$
d) $y=x^5$
e) $y=x^{100}$

II.5) Función compuesta: $\boxed{y = K \cdot u \rightarrow y' = k \cdot u' \quad \text{donde u es función}}$

Ejercicio 4: Hallar la derivada de las siguientes funciones compuestas:

a) $y = 3x^2$
b) $y = 4x^3$
c) $y = -2x^4$
d) $y = \frac{x^2}{2}$
e) $y = -x^5$
f) $y = \frac{2}{3}x^6$
g) $y = -x$
h) $y = -\frac{3x^4}{2}$
i) $y = -2x^7$
j) $y = \frac{x^3}{3}$

II.6) Derivada de la suma (resta): $\boxed{y = u \pm v \rightarrow y' = u' \pm v' \quad \text{donde } \mathbf{u} \text{ y } \mathbf{v} \text{ son funciones}}$

Es decir: **«La derivada de la suma** (resta) **es la suma** (resta) **de las derivadas»**

Esta regla, combinada con las anteriores, es muy útil para derivar polinomios (que son las funciones que más aparecen en la PAU), como puede verse en el siguiente ejemplo:

Ejercicio 5: Hallar la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = x^2 + x^3$
b) $y = x^4 + 5$
c) $y = x^2 - 2$
d) $y = x - 2$
e) $f(t) = 3t - 5$
f) $y = 3x^2 - x^4$
g) $y = 2x^3 - 3x^4$
h) $y = 2x^4 - x^2 + 3$
i) $y = -3x^5 + 4x^3 - x + 2$
j) $y = x^3 - 3x^2 + 5x - 8$
k) $y = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
l) $y = \frac{x^4}{2} + 5x$
m) $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{5} - \frac{1}{2}$
n) $y = x^5 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^3}{6} - 3x^2 + \frac{x}{3}$
o) $y = \frac{x^4 + x^2}{2}$
p) $y = 0{,}05x^3 - 0{,}001x^2 + 0{,}1x - 0{,}02$
q) $y = \frac{3x^6 - x^3 + 6x - 5}{3}$

¡CUIDADO!: ¡La derivada del producto no es el producto de derivadas! Para derivar un producto, tenemos que operar hasta transformar en un polinomio:

r) $y = (x-2)(x+3)$
s) $y = (x+2)^2$
t) $y = (2x+3)(x-5)$
u) $y = (2x-3)^2$
v) $y = (x^2-5)(3x-1)+7$
w) $y = (1,2-0,001x^2)x$
x) $f(t) = 300t(1-t)$

Lo que hemos calculado hasta ahora es la función derivada de una función dada, o más comúnmente llamada derivada de una función. Por lo tanto, por tratarse de una función, podemos también evaluar la derivada en un punto dado, obteniendo como resultado un número (en el siguiente apartado veremos el significado de este número). Veamos ahora un ejemplo:

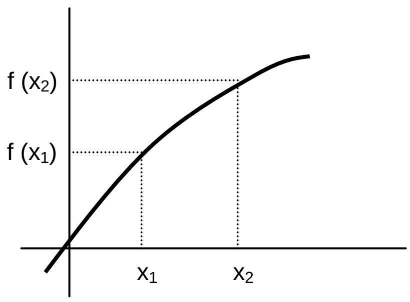
Ejercicio 6: Para cada una de las funciones que figuran a continuación, hallar el valor de su derivada en el punto indicado:

a) $f(x)=x^2$ en $x=2$
b) $f(x)=2x-5$ en $x=1$
c) $f(x)=x^3$ en $x=-2$
d) $f(x)=x^2+x+1$ en $x=0$
e) $f(x)=x^2-x$ en $x=-1$

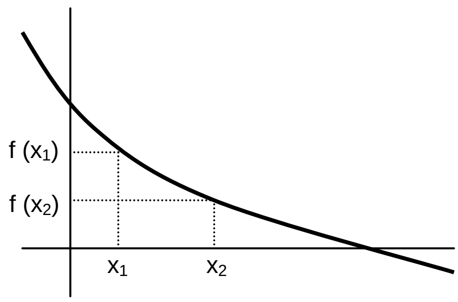
III) <u>INTERVALOS DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO. M y m</u>

(Ver págs. 171 a 173 del libro)

III.1) <u>Idea intuitiva</u>:



f(x) CRECIENTE



f(x) DECRECIENTE

III.2) <u>Definiciones</u>:

f (x) es creciente en un punto si en las proximidades de dicho punto se cumple:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

f (x) es decreciente en un punto si en las proximidades de dicho punto se cumple:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

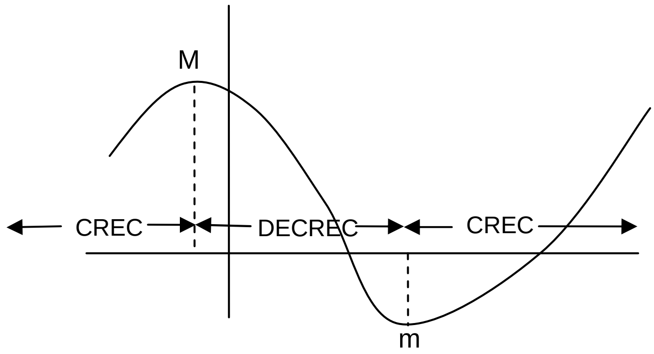
O, dicho con palabras:

"Una función es creciente en un punto si, en las proximidades de dicho punto, a medida que aumentan las x aumentan también las imágenes correspondientes".

"Una función es decreciente en un punto si, en las proximidades de dicho punto, a medida que aumentan las x disminuyen las imágenes correspondientes".

Acabamos de ver el concepto de función creciente en un punto. Ello es fácilmente ampliable a un intervalo, diciendo que **«una función es creciente en un intervalo si lo es en todos los puntos de dicho intervalo».**

- En general, las funciones no son siempre crecientes o siempre decrecientes, sino que presentan intervalos de crecimiento:



En un máximo (M), la función pasa de creciente a decreciente. Se llama máximo relativo o local.

En un mínimo (m), la función pasa de decreciente a creciente. Se llama mínimo relativo o local.

NOTA: Al final de este apartado veremos otros tipos de M o m, los absolutos.

III.3) <u>Teorema</u>: $\boxed{f'(a)>0 \Rightarrow f(x) \text{ creciente en } a}$

O, dicho con palabras: **«Si la derivada de una función en un punto es positiva, entonces la función es creciente en dicho punto".**

Observaciones:

1º) Más adelante justificaremos (ver ejercicios 6, 7 y 8) la veracidad de este teorema.

2º) El recíproco no siempre es cierto, pero esto es una cuestión que a efectos prácticos no nos interesa.

3º) Naturalmente, otra forma alternativa de enunciar este teorema es decir que:

$$\boxed{f'(a)<0 \Rightarrow f(x) \text{ decreciente en } a}$$

4º) Los intervalos de crecimiento se expresan siempre con respecto al eje x, como veremos en los ejemplos.

5º) Una consecuencia de este teorema es que **«si una función presenta un M o un m en un punto, entonces la derivada se anula en dicho punto»** (En efecto, si la función presenta un M o un m, entonces no es ni creciente ni decreciente, y por lo tanto la derivada no será ni positiva ni negativa, es decir, será nula). En lenguaje matemático sería:

$$\boxed{x=a \text{ es M o m de } f(x) \Rightarrow f'(a)=0}$$ (¡El recíproco no siempre se cumple!)

6º) Por lo tanto, el **procedimiento práctico para hallar los intervalos de crecimiento será estudiar el signo de f ’(x)** (debido al teorema anterior). Para ver como cambia el signo de f’(x), se recomienda hallar sus raíces, y construir una tabla (ver ejercicios 7, 8 y 9). De los intervalos de crecimiento deduciremos fácilmente los posibles M y m

7º) Puede haber varios **M** o **m**, no haber, o infinitos.

8º) El valor de la función en el **m** puede ser mayor que en el **M**

9º) Si la f(x) es continua, entre dos **M** siempre hay un **m**, y viceversa.

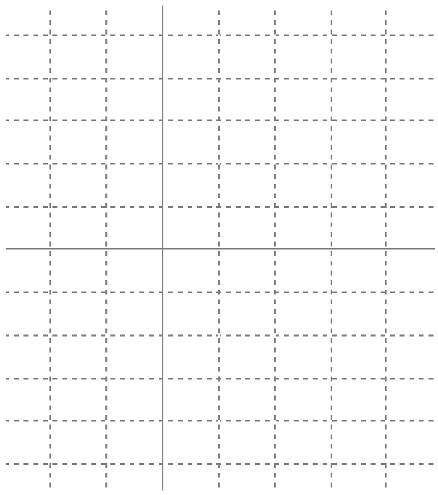
10º) Los candidatos a **M** o **m** son los que anulan f ’(x)

11º) Si f ‘(x) no se anula nunca, no hay **M** ni **m**

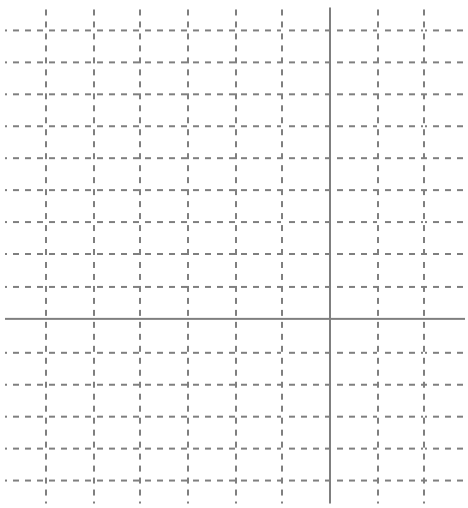
Ejercicio 7: Dada la parábola $y = x^2-2x-3$ se pide:

a) Representarla gráficamente

b) Estudiar el signo de f ‘(x) y deducir sus intervalos de crecimiento y el M, comprobando que coinciden con la información de la gráfica.

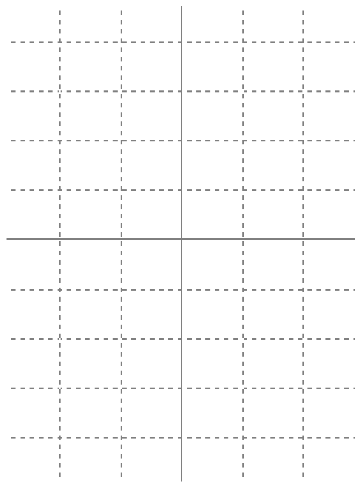


Ejercicio 8: Ídem con la parábola $y = x^2-2x-3$



Ejercicio 9: Dada la función $y = x^3 - 3x$ se pide: **a)** Representarla gráficamente mediante tabla de valores

b) Estudiar el signo de f ‘(x) y deducir sus intervalos de crecimiento y M y m, comprobando que coinciden con la información de la gráfica.



III.4) M o m absolutos:

Dada una función continua en un intervalo [a,b], pueden darse varias situaciones en dicho intervalo, que se resumen en las siguientes:

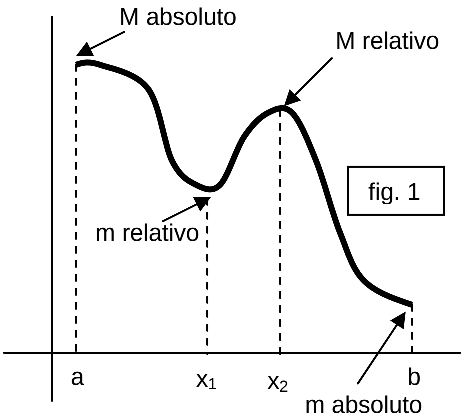


fig. 1

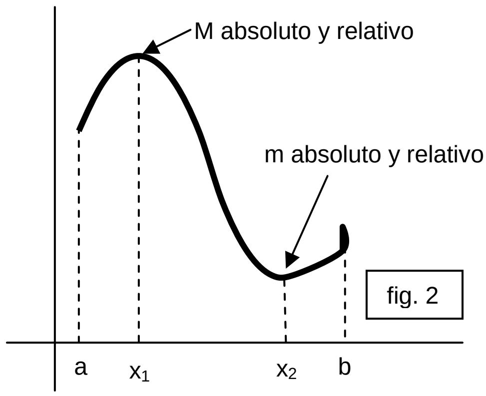


fig. 2

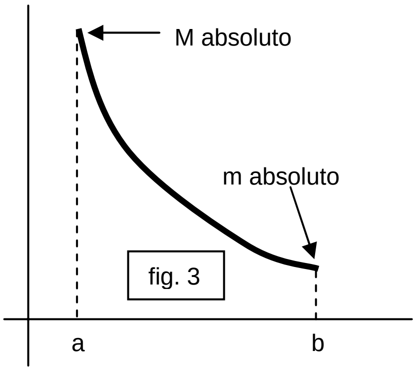


fig. 3

En resumen:

- Los M y m relativos (los que hemos visto en los subapartados anteriores) son máximos "locales", mientras que para los absolutos hay que tener en cuenta todo el intervalo.
- Puede haber varios extremos relativos, o puede no haberlos (fig. 3), pero siempre hay M y m absolutos.
- Puede coincidir el M (o el m) absoluto y relativo (fig. 2); en caso contrario el M (o el m) absoluto lógicamente estará en un extremo (figs. 1 y 3)

IV) PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

En este tipo de problemas (Ejercicios 3B de la PAU, o ejercicio 43 del final del tema) nos dan una función que suele representar una cantidad relacionada con las Ciencias Sociales (beneficios, costes, rendimiento, producción, etc.), y se trata de ver en qué caso es máxima (o mínima, dependiendo de la situación concreta), es decir, de optimizarla. Procederemos siguiendo los siguientes pasos:

1) Hallar los M (o m) de la función a optimizar.
2) Interpretar las soluciones.
3) A veces, también tendremos que calcular el valor de ese máximo (o mínimo)

Ejercicio 10 *(PAU UCLM sept 2008)***:** Una empresa ha realizado un estudio acerca de los costes de producción llegando a la conclusión de que producir x unidades de un objeto dado tiene un coste (en euros) expresado por $f(x)=0{,}25x^2-25x+700$. **1)** ¿Cuántas unidades han de producirse para tener un coste de 175 euros? **2)** Halla el número de unidades que se deben producir para que el coste sea mínimo. **3)** ¿Cuál es ese coste mínimo?

☞ ***Ejercicios libro:*** *30, 34 y 36 pág. 184 (problemas de optimización)*
33 y 37 pág. 184 (problemas de optimización de funciones definidas a trozos)

V) REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

A veces, en los problemas de optimización de PAU nos piden también que representemos la función que nos dan. Recordando cursos anteriores, a la hora de representar una función vamos a hallar, por este orden, los siguientes aspectos:

1º) Dom(f):
- Recordar que es el conjunto formado por todos los x para los que existe imagen f(x)
- Las reglas para hallarlo son prácticamente las mismas que las vistas para estudiar la continuidad de las funciones más usuales. Ahora bien, **en la PAU suelen ser funciones polinómicas, cuyo Dom(f) es IR**

2º) Corte con los ejes:

CORTE CON:	¿CÓMO SE CALCULA?	¿CUÁNTOS CORTES PUEDE HABER?
eje x	haciendo y=0 (habrá que resolver una ecuación)	ninguno, uno, o varios
eje y	sustituyendo x=0	uno o ninguno

Ejercicio 11: Hallar el posible corte con los ejes de las siguientes funciones:

a) $y = x^2 + 2x - 3$

b) $y = x^3 + 4x^2 + x - 6$

3º) <u>Intervalos de crecimiento ⟹ M y m</u>: Se obtienen, como hemos visto en el apartado III, estudiando el signo de f ‘(x)

4º) A veces puede ser útil completar la información anterior confeccionando una pequeña **tabla de valores** con los valores más imprescindibles.

Ejercicios

- Hallar las derivadas **simplificadas** de las siguientes funciones:

1. y=3 *(y’=0)*
2. y=x *(y’=1)*
3. y=5x *(y’=5)*
4. $y=x^3$ *($y'=3x^2$)*
5. $y=x^4+x^3+x^2+x+1$ *($y'=4x^3+3x^2+2x+1$)*
6. $y= 4x^4-x^3+3x^2-7$ *($y'=16x^3-3x^2+6x$)*
7. $y=-\frac{1}{5}x^5+4x^4-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2-3$ $\left(y'=-x^4+16x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right)$
8. y = 5 *(y'=0)*
9. y = 3/2 *(y'=0)*
10. y = 3x *(y'=3)*
11. y = 2x-3 *(y'=2)*
12. y = -x *(y'=-1)*
13. $y=\frac{x}{2}-5$ *(y'=1/2)*
14. $y = x^4$ *($y'=4x^3$)*
15. $y = 2x^5$ *($y'=10x^4$)*
16. $y=\frac{x^3}{2}$ $(y'=\frac{3x^2}{2})$
17. $y = x^3+x^2+x+1$ *($y'=3x^2+2x+1$)*
18. $y = 2x^4-3x^2+5x-8$ *($y'=8x^3-6x+5$)*
19. $y=\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{4}-\frac{x}{7}+5$ $(y'=x^4-x^2-\frac{x}{2}-\frac{1}{7})$
20. $y=-x^4+\frac{1}{7}$ *($y'=-4x^3$)*
21. $y=3(x^2+x+1)$ *($y'=3(2x+1)$)*
22. $y=4(3x^3-2x^2+5)+x^2+1$ *($y'=36x^2-14x$)*
23. $y=\frac{2x^3-3x^2+4x-5}{2}$ *($y'=3x^2-3x+2$)*
24. $y=(x^2+1)(2x^3-4)$ *($y'=10x^4+6x^2-8x$)*
25. $y=\frac{x^3-2x^2+5}{3}$ $(y'=\frac{3x^2-4x}{3})$
26. $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2$ *($y'=-3x^3+x^2+x$)*
27. $y = (x^2+1)^2$ *($y'=4x^3+4x$)*
28. $y=3(x^2-x+1)(x^2+x-1)$ *($y'=3(4x^3-2x+2)$)*

29. $y = (2x^2-3)(x^2-3x+1)$ *($y'=8x^3-18x^2-2x+9$)*

30. $y = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$ *($y'=4x^3+2x$)*

31. $y = (x^2+1)(x-3)(x^2+x)$ *($y'=5x^4-6x^3-6x^2-4x-3$)*

32. $y = x^6-10x^4+8x-3$ *($y' = 6x^5-40x^3+8$)*

33. $y = 5x^4+x^3-x+6$ *($y' = 20x^3+3x^2-1$)*

34. $y = x^4-10x^2+8$ *($y' = 4x^3-20x$)*

35. $y=x/2$ *($y'=1/2$)*

36. $y=(2x^2-1)(x^2-2)(x^3+1)$ *($y'=14x^6-25x^4+8x^3+6x^2-10x$)*

37. $y=\dfrac{x^4-2x^2+1}{5}$ $\left(y'=\dfrac{4x^3-4x}{5}\right)$

38. $y=\dfrac{3x^4}{4}-\dfrac{2x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x}{5}$ *($y'=3x^3-2x^2+x-1/5$)*

39. $y=\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x}{5}$

40. Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones, y a partir de ella obtener f '(2), f '(-1) y f '(0):

a) $f(x)=3x-2$ **b)** $f(x)=x^2+x+1$ **c)** $f(x)=x^3+1$

41. Utilizando la derivada de la función potencial, $\boxed{y=x^n \longrightarrow y'=n\cdot x^{n-1}\ (\forall n\in \mathrm{IR})}$, hallar la derivada, <u>simplificada</u>, de las siguientes funciones:

a) $y=x^2$ **b)** $y=x^3$ **c)** $y=3x^4$ **d)** $y=-2x^5$ **e)** $y=\dfrac{3}{2}x^4$

f) $y=\dfrac{x^2}{4}$

42. Utilizando la fórmula de la derivada de la suma de funciones, hallar la derivada <u>simplificada</u> de las siguientes funciones:

a) $y=x^2+x+1$ **b)** $y=2x^3-3x^2+5x-3$ **c)** $y=\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{x}{5}+1$

43. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los M y m de las siguientes funciones. Representarlas gráficamente.

a) $f(x)=x^2$

b) $f(x)=x^4-2x^2$

c) $f(x)=x^3-3x^2+1$

d) $f(x)=x^3-6x^2+9x-8$

e) $f(x)=x^3-4x^2+7x-6$

f) $f(x)=x^3$

g) $f(x)=x^4+8x^3+18x^2-10$

h) $f(x)=x^3-3x^2-9x+1$

i) $f(x)=x^4-4x^3+1$

j) $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-6x+3$

k) $f(x)=2x^3-3x^2$

l) $f(x)=x^3-3x$

m) $f(x)=x^3-3x^2$

n) $y=2x^3-9x^2$

o) $f(x)=x^3-6x^2+9x$

p) $y=x^3-12x$

*(Soluc: **a)** $\nearrow$ $(0,\infty)$ $\searrow$ $(-\infty,0)$; **b)** $\nearrow$ $(-1,0)U(1,\infty)$ $\searrow$ $(-\infty,-1)U(0,1)$; **c)** $\nearrow$ $(-\infty,0)U(2,\infty)$ $\searrow$ $(0,2)$; **d)** $\nearrow$ $(-\infty,1)U(3,\infty)$ $\searrow$ $(1,3)$; **e)** $\nearrow$ $\forall\ x\in\Re$); **f)** $\nearrow$ $\forall\ x\in\Re$; **g)** $\searrow$ $(-\infty,0)$ $\nearrow$ $(0,\infty)$; **h)** $\nearrow$ $(-\infty,-1)U(3,\infty)$ $\searrow$ $(-1,3)$; **i)** $\searrow$ $(-\infty,3)$ $\nearrow$ $(3,\infty)$)*

TABLA DE DERIVADAS ELEMENTALES

FUNCIONES SIMPLES:		FUNCIONES COMPUESTAS:	
y=k	y'=0		
y=x	y'=1		
$y=k\cdot x$	y'=k	$y=k\cdot u$	$y'=k\cdot u'$
$y=x^n$ $(n\in IR)$	$y'=n\cdot x^{n-1}$	$y=u^n$ $(n\in IR)$	$y'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$
		$y=u\pm v$	$y'=u'\pm v'$
		$y=u\cdot v$	$y'=u'\cdot v+u\cdot v'$
		$y=\frac{u}{v}$	$y'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$
$y=\frac{1}{x}$	$y'=-\frac{1}{x^2}$	$y=\frac{1}{u}$	$y'=-\frac{u'}{u^2}$
$y=\sqrt{x}$	$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y=\sqrt{u}$	$y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$y=\sqrt[n]{x}$	hacer $y=x^{1/n}$	$y=\sqrt[n]{u}$	hacer $y=u^{1/n}$

NOTA: en esta tabla **k** es cualquier constante, y **u** y **v** son funciones.