I.E.S. "Fernando de Mena" Socuéllamos (Ciudad Real)	PARCIAL 3ª EVALUACIÓN MATEMÁTICAS II	2º BACH. A CURSO 2013-2014	Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha Consejería de Educación y Ciencia

Alumno: SOLUCIONES

Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. No usar bolígrafo rojo.

Nota ortografía, caligrafía y sintaxis (0 a 4)

Nota lenguaje matemático (0 a 4)

Nota limpieza y orden (0 a 4)

1. *(sept 2001)* Resolver la ecuación matricial AX−BCX=A, donde *(2,5 ptos.)*

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&3\\-1&0&-3\\-1&2&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\\0&1\end{pmatrix}\quad \text{y}\quad C=\begin{pmatrix}0&-1&2\\-2&1&-1\end{pmatrix}$$

$AX-BCX=A$; $(A-BC)X=A$; renombramos $A-BC=D \Rightarrow DX=A \Rightarrow X=D^{-1}\cdot A$ 0,5

$$D=\begin{pmatrix}1&-1&3\\-1&0&-3\\-1&2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&2\\-2&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\-1&0&-3\\-1&2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&-1&2\\-4&3&-4\\-2&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\3&-3&1\\1&1&2\end{pmatrix}$$ 0,25

$|D|=-6+3+3-1=-1\neq 0 \Rightarrow \exists D^{-1}$ 0,25

$D_{11}=\begin{vmatrix}-3&1\\1&2\end{vmatrix}=-7$ $\quad D_{12}=-\begin{vmatrix}3&1\\1&2\end{vmatrix}=-5$ $\quad D_{13}=\begin{vmatrix}3&-3\\1&1\end{vmatrix}=6$

0,45 (0,05 cada adjunto)

$D_{21}=-\begin{vmatrix}0&1\\1&2\end{vmatrix}=1$ $\quad D_{22}=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1$ $\quad D_{23}=-\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=-1$

$D_{31}=\begin{vmatrix}0&1\\-3&1\end{vmatrix}=3$ $\quad D_{32}=-\begin{vmatrix}1&1\\3&1\end{vmatrix}=2$ $\quad D_{33}=\begin{vmatrix}1&0\\3&-3\end{vmatrix}=-3$

$$\text{Adj}(D)=\begin{pmatrix}-7&-5&6\\1&1&-1\\3&2&-3\end{pmatrix}$$ 0,05

$$\Downarrow$$

$$^t\text{Adj}(D)=\begin{pmatrix}-7&1&3\\-5&1&2\\6&-1&-3\end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$D^{-1}=\frac{1}{\underbrace{|D|}_{-1}}\cdot {}^t\text{Adj}(D)=\begin{pmatrix}7&-1&-3\\5&-1&-2\\-6&1&3\end{pmatrix}$$ 0,25

NOTA: si no se indican los menores de orden 2 y se escriben directamente los adjuntos cabría pensar que se han obtenido por medio de la calculadora, y se restará nota.

$$X=D^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}7&-1&-3\\5&-1&-2\\-6&1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&3\\-1&0&-3\\-1&2&1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}11&-13&21\\8&-9&16\\-10&12&-18\end{pmatrix}}$$ 0,75

NOTA: Si no se llega al resultado correcto debido a algún pequeño fallo de cálculo (no de procedimiento) pero el procedimiento está bien, se puntuará con 1,25

2,5

2. a) *(sept 2009)* Discutir, en función de $\lambda \in \mathbb{R}$, el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \lambda x + y - z = 2 \\ 5x + 3y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + \lambda z = 1 \end{cases}$ (1,5 ptos.)

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & \lambda & 1 \end{array}\right)}_{M} = M^* \qquad ¿\text{rg } M?$$

0,25

$$|M| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = 3\lambda^2 + 9 - 10 + 9 - 6\lambda - 5\lambda = 3\lambda^2 - 11\lambda + 8 = 0 \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = \frac{8}{3} \end{cases} \quad (*)$$

$$\lambda = 1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right); \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg } M = 2; \; ¿\text{rg } M^*? \quad |C_1, C_2, C_4| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 20 - 18 - 5 = 0 \Rightarrow \text{rg } M^* = 2$$

0,25

NOTA: se baja 0,25 si se calculan más menores de los necesarios

$$\lambda = \frac{8}{3} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 8/3 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 8/3 & 1 \end{array}\right); \quad \begin{vmatrix} 8/3 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg } M = 2; \; ¿\text{rg } M^*? \quad |C_1, C_2, C_4| = \begin{vmatrix} 8/3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 8 + 20 - 18 - 5 = 5 \neq 0 \Rightarrow \text{rg } M^* = 3$$

0,25

Soluc.:

I) $\boxed{\lambda \neq 1 \text{ y } \lambda \neq \frac{8}{3}} \Rightarrow \text{rg } M = \text{rg } M^* = 3 = \text{nº incógnitas} \xRightarrow[\text{TH. ROUCHÉ-FROBENIUS}]{} \boxed{\text{sist. compat. dtdo (soluc. única)}}$ 0,25

II) $\boxed{\lambda = 1} \Rightarrow \text{rg } M = \text{rg } M^* = 2 < 3 = \text{nº incógnitas} \Longrightarrow \boxed{\text{sist. compat. indtdo. (uniparamétrico)}}$ 0,25

III) $\boxed{\lambda = 8/3} \Rightarrow \text{rg } M = 2 \neq \text{rg } M^* = 3 \Longrightarrow \boxed{\text{sist. incompatible}}$ 0,25

b) Resolverlo para λ=0 $\Rightarrow$ sist. compat. dtdo. (soluc. única) $\xrightarrow[\text{en } (*)]{\text{sustituimos}} |M| = 8$ (1 pto.)

0,25

se baja por tanto 0,25 si se vuelve a calcular $|M|$, en vez de utilizar (*)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\boxed{x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{|M|} = \frac{3 + 3 - 12}{8} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}} \quad 0{,}25$$

$$\boxed{y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|M|} = \frac{18 - 5}{8} = \frac{13}{8}} \quad 0{,}25$$

$$\boxed{z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{|M|} = \frac{20 - 18 - 5}{8} = \frac{-3}{8}} \quad 0{,}25$$

1,5+1

2,5

3. *(jun 2008)* Dados los puntos A(1,1,1), B(1+λ,2,1−λ) y C(1+λ,1+λ,2+λ), donde $\lambda\in\mathbb{R}$:

a) Probar que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ forman un ángulo de 90°, independientemente del valor de λ. *(1 ptos.)*

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=B-A=(1+\lambda,2,1-\lambda)-(1,1,1)=(\lambda,1,-\lambda)\\ \overrightarrow{AC}=C-A=(1+\lambda,1+\lambda,2+\lambda)-(1,1,1)=(\lambda,\lambda,1+\lambda)\end{array}\right\}\ 0{,}25$$

Probar que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son ⊥ equivale a ver que su producto escalar es 0 : 0,25

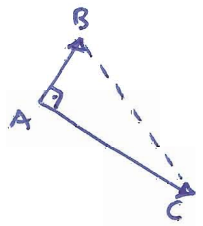
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(\lambda,1,-\lambda)\cdot(\lambda,\lambda,1+\lambda)=\lambda^2+\lambda-\lambda(1+\lambda)=\cancel{\lambda^2}+\cancel{\lambda}-\cancel{\lambda}-\cancel{\lambda^2}=0\quad\forall\lambda\quad(\text{C.Q.D.})$$

0,25 0,25

NOTA: Se baja 0,25 si se llega al mismo resultado pero por un procedimiento más extenso, p.ej. aplicando $\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{AC}\|}$

b) Determinar los valores de λ para que la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo de vértices A, B y C sea igual a 3. *(1,5 ptos.)*

Acabamos de probar lo siguiente:



La hipotenusa es $\overrightarrow{BC}=C-B=(1+\lambda,1+\lambda,2+\lambda)-(1+\lambda,2,1-\lambda)=(0,\lambda-1,1+2\lambda)$ 0,25

$$\|\overrightarrow{BC}\|=3\Rightarrow\sqrt{0^2+(\lambda-1)^2+(1+2\lambda)^2}=3\quad 0{,}25$$

$$\lambda^2-2\lambda+1+1+4\lambda+4\lambda^2=9\quad 0{,}25$$

$$(*)\quad 5\lambda^2+2\lambda+2=9$$

$$5\lambda^2+2\lambda-7=0\ \begin{cases}\boxed{\lambda=1} & 0{,}25\\ \boxed{\lambda=-7/5} & 0{,}25\end{cases}$$

0,25

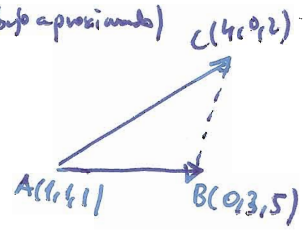
NOTA: -se baja 0,25 si se llega a la ec. (*) por un procedimiento mucho más largo (Pitágoras, etc...)
-se puntúa 0,5 si el procedimiento es correcto pero hay algún pequeño fallo de cálculo (no procedimental)

(1 + 1,5)

$\boxed{2{,}5}$

4. a) *(jun 2005)* Hallar el área del triángulo cuyos vértices son A(1,1,1), B(0,3,5) y C(4,0,2). (resultado con 2 decimales) (1 pto.)

(dibujo aproximado)



$\vec{AB} = B - A = (0,3,5) - (1,1,1) = (-1,2,4)$

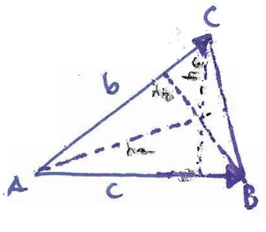
$\vec{AC} = C - A = (4,0,2) - (1,1,1) = (3,-1,1)$ 0,25

$$\boxed{S_{ABC} = \frac{1}{2}\|\vec{AB}\times\vec{AC}\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 2 & 4\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\|(6,13,-5)\| = \frac{1}{2}\sqrt{36+169+25} = \frac{\sqrt{230}}{2}\ u^2} \approx 7{,}58\ u^2$$

0,5 0,25

b) Hallar las longitudes de las tres alturas de dicho triángulo. *(Ayuda: Utilizar que $A_{triángulo} = \frac{1}{2}bh$)* (1,5 ptos)
(resultado con 2 decimales)

(dibujo aproximado)



altura correspondiente al lado c:

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\|\vec{AB}\|\cdot h_c \Rightarrow \frac{\sqrt{230}}{\cancel{2}} = \frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{21}\cdot h_c \Rightarrow \boxed{h_c = \sqrt{\frac{230}{21}}} \approx 3{,}31\ u$

0,5

$\|\vec{AB}\| = \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21}$

altura correspondiente al lado b:

0,5

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\|\vec{AC}\|\cdot h_b \Rightarrow \frac{\sqrt{230}}{\cancel{2}} = \frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{11}\cdot h_b \Rightarrow \boxed{h_b = \sqrt{\frac{230}{11}}} \approx 4{,}57\ u$

$\|\vec{AC}\| = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}$

0,5

altura correspondiente al lado a:

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\|\vec{BC}\|\cdot h_a \Rightarrow \frac{\sqrt{230}}{\cancel{2}} = \frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{34}\cdot h_a \Rightarrow \boxed{h_a = \sqrt{\frac{230}{34}} = \sqrt{\frac{115}{17}}} \approx 2{,}60\ u$

1 + 1,5

$\boxed{2{,}5}$

$\vec{BC} = C - B = (4,0,2) - (0,3,5) = (4,-3,-3) \Rightarrow \|\vec{BC}\| = \sqrt{16+9+9} = \sqrt{34}$

NOTA: se baja 0,25 si se mezclan decimales y radicales en una misma igualdad