SOLUCIONES

Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. No usar bolígrafo rojo.

Nota ortografía, caligrafía y sintaxis (0 a 4)

Nota lenguaje matemático (0 a 4)

Nota limpieza y orden (0 a 4)

1. *(Jun 2004)* Resolver la ecuación matricial C(A+X)B=$\mathbb{1}$, donde *(2,5 ptos.)*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ \text{y}\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$C(A+X)B = \mathbb{1}$

$C^{-1}C(A+X)B = C^{-1}$

$(A+X)\cdot B = C^{-1}$

$(A+X)B\cdot B^{-1} = C^{-1}\cdot B^{-1}$

$A+X = C^{-1}\cdot B^{-1}$ 0,5/

$\boxed{X = (B\cdot C)^{-1} - A}$ (*)

$B\cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = D$; $|D| = 2-1 = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists D^{-1}$

0,5/

$D_{11} = 1 \quad D_{12} = -1$

$D_{21} = -1 \quad D_{22} = 2$

$\mathrm{Adj}(D) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow {}^t\mathrm{Adj}(D) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$

$\rightarrow D^{-1} = \frac{1}{\underbrace{|D|}_{1}}\cdot {}^t\mathrm{Adj}(D) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ 0,5/

Sustituimos en (*):

$\boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}}$ 1/

2,5

2. *(Jun 2000)* Estudiar la compatibilidad del siguiente sistema según los valores del parámetro **a**, y resolverlo cuando sea posible: *(2,5 ptos.)*

$$\left.\begin{array}{rcl} x - y & = & 5 \\ y + z & = & a \\ x \quad - 2z & = & 3 \\ 2x \quad - 3z & = & a \end{array}\right\}$$

I) Discusión:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & a \end{array}\right)}_{M} = M^*$$

¿rg M?

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg\,M \geq 2$$

$$|F_1 F_2 F_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2-1 \neq 0 \Rightarrow rg\,M = 3 \ \forall a \qquad 0{,}25$$

¿rg M*?

$$|M^*| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & a \end{vmatrix} \underset{\substack{F_1+F_2 \\ \text{la que cambia} \quad \text{no cambia}}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & a+5 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & a \end{vmatrix} \underset{\text{desarrollamos por } C_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & a+5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & a \end{vmatrix} = -2a+6-3(a+5)+4(a+5)+9-a$$

$$= -2a+6-3a-15+4a+20+9-a$$

$$= -2a+20 = 0 \Rightarrow a = 10 \qquad 0{,}5$$

Soluc:

I) $a=10 \Rightarrow rg\,M = 3 = rg\,M^* =$ nº incógnitas $\xRightarrow{\text{TH. ROUCHÉ-FROBENIUS}}$ sist. compat. dtdo. (soluc. única)

II) $a \neq 10 \Rightarrow rg\,M = 3 \neq rg\,M^* = 4 \Longrightarrow$ sist. incompatible $\qquad 0{,}5$

II) Resolución: A la vista de la discusión, sólo se puede resolver si $a=10$, en cuyo caso es compatible dtdo, es decir, tipo Cramer. Según acabamos de ver al estudiar rg M, $|F_1,F_2,F_3| \neq 0 \Rightarrow$ cogemos F_1, F_2 y F_3, y prescindimos de F_4. 0,25

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right) \quad 0{,}25 \ ; \quad |M| \overset{\text{visto antes}}{=} -3$$

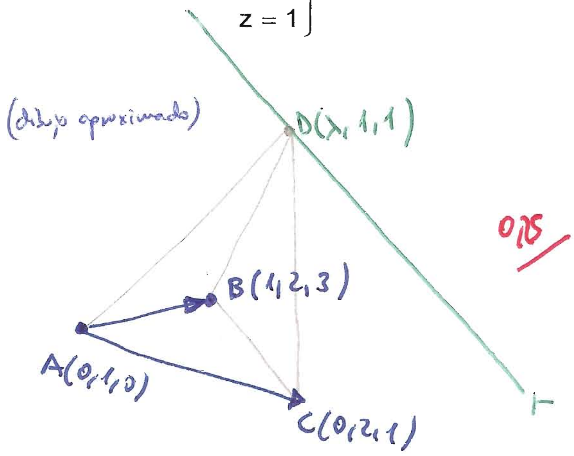
$$\boxed{x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 10 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-10-3-20}{-3} = \frac{-33}{-3} = 11} \qquad 0{,}25$$

$$\boxed{y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 10 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-20+5-3}{-3} = \frac{-18}{-3} = 6} \qquad 0{,}25$$

$$\boxed{z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{3-10-5}{-3} = \frac{-12}{-3} = 4} \qquad 0{,}25$$

$\boxed{1{,}25+1{,}25}$

3. Un tetraedro tiene por vértices A(0,1,0), B(1,2,3), C(0,2,1) y el cuarto vértice está situado en determinado punto D de la recta $\left.\begin{array}{l}x=\lambda\\ y=1\\ z=1\end{array}\right\}$ de forma que su volumen es $\frac{5}{2}\,u^3$. Hallar dicho punto. *(2,5 ptos.)*



El tetraedro queda determinado por los siguientes tres vectores:

0,25/

$\vec{AB}=(1,1,3)$

$\vec{AC}=(0,1,1)$

$\vec{AD}=(\lambda,0,1)$

0,25/ 0,25 enunciado

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|[\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}]\right|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}1&1&3\\0&1&1\\\lambda&0&1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\left|1+\lambda-3\lambda\right|=\frac{1}{6}\left|1-2\lambda\right|\stackrel{\downarrow}{=}\frac{5}{2}$$

0,25/ 0,25/

$\Rightarrow |1-2\lambda|=15$ 0,25

$1-2\lambda=15;\ -14=2\lambda;\ \lambda=-7 \rightarrow \boxed{D_1(-7,1,1)}$

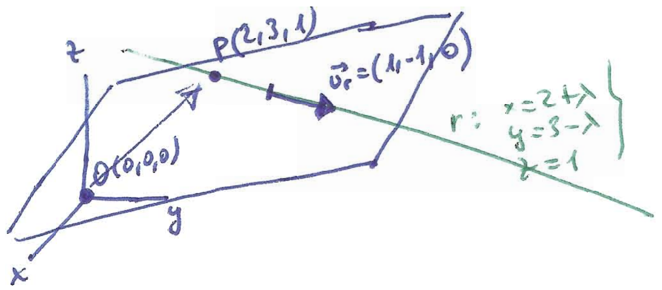
$1-2\lambda=-15;\ 16=2\lambda;\ \lambda=8 \rightarrow \boxed{D_2(8,1,1)}$ 0,5/

0,25/ 0,25/

$\boxed{2{,}5}$

4. Hallar la ecuación general del plano que pasa por el origen y contiene a la recta $\left.\begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 1 \end{array}\right\}$ *(2,5 ptos.)*

(dibujo aproximado)



Como puede verse en el dibujo, el plano pedido se puede obtener mediante un punto de él (tenemos dos, el origen O y el punto P de la recta), y dos vectores direccionales; uno de ellos es el de la recta, $\vec{u}_r$, y el otro $\vec{OP}$:

0,5

$$\left.\begin{array}{l} O(0,0,0) \\ \vec{u}_r = (1,-1,0) \\ \vec{OP} = (2,3,1) \end{array}\right\} \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \; ; \; -x - y + 5z = 0 \; ; \; \boxed{x + y - 5z = 0}$$

1,5

0,5

desarrollo por Laplace por F_1

2,5