

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I

1º Bachillerato Capítulo 2: Matemática Financiera.

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-060663

Fecha y hora de registro: 2015-01-10 17:38:34.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es



Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo

Revisora: Nieves Zuasti

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Índice

4. PROBLEMAS DE MATEMÁTICA FINANCIERA

- 4.1. TASAS
- 4.2. NÚMEROS ÍNDICE
- 4.3. INTERÉS SIMPLE
- 4.4. INTERÉS COMPUESTO
- 4.5. ANUALIDADES DE CAPITALIZACIÓN
- 4.6. TASA ANUAL EQUIVALENTE. (T.A.E.)
- 4.7. ANUALIDADES DE AMORTIZACIÓN

Resumen

Este capítulo se ocupa del Álgebra y en él repasaremos todos los conceptos relacionados con polinomios, ecuaciones e inecuaciones, para adentrarnos en los sistemas de ecuaciones, su resolución y representaciones gráficas, basándonos en el método de resolución de sistemas de ecuaciones, “*Método de Gauss*” matemático muy importante en Álgebra pues fue el primero en dar una demostración del teorema fundamental del Álgebra: “*Toda ecuación algebraica de grado n tiene n soluciones*”.

Seguiremos con las inecuaciones y sistemas de inecuaciones que nos servirán para comprender los parámetros financieros y las anualidades de amortización y capitalización que se aplican cuando invertimos un capital o adquirimos un préstamo a un determinado interés simple o compuesto y durante un determinado tiempo.



Carl Friedrich Gauss

4. PROBLEMAS DE MATEMÁTICA FINANCIERA

Vamos a plantear y a resolver problemas de matemática financiera en los que intervienen el interés simple y compuesto, y se utilizan tasas, margen de beneficio, amortizaciones, capitalizaciones y números índice. Parámetros económicos y sociales.

Pondremos un ejemplo de cada uno y lo resolveremos exponiendo las fórmulas y conceptos que hacen falta para ello.

Vamos allá:

Empezaremos por las tasas y los números índice entre los que destacaremos la tasa de natalidad y mortalidad y los índices de las bolsas y el de precios al consumo (I.P.C.) respectivamente, para después continuar con intereses y préstamos bancarios y sus amortizaciones.

4.1. Tasas

La tasa de natalidad es un indicador social. En toda tasa se da la cantidad que interesa en relación a una cantidad de referencia.

Ejemplos:

- ✚ Tasa de natalidad: 21'64 0/00 $\Rightarrow$ Nacen 21'64 bebés por cada 1000 habitantes.
- ✚ Tasa de paro: 12 % $\Rightarrow$ 12 parados por cada 100 personas en edad laboral.
- ✚ Tasa de alcoholemia: 0'15 $\Rightarrow$ 0'15 cm³ de alcohol por litro de sangre.

4.2. Números índice

Un número índice, NI , es una herramienta o parámetro creada para estudiar la variación en el tiempo de una determinada magnitud económica.

$$NI = \frac{\text{Medida actual de la magnitud}}{\text{Medida antigua de la magnitud}}$$

Destacamos:

El índice de las bolsas refleja el valor global de las empresas que se cotizan en ellas. El valor del Índice en cada momento se obtiene mediante cálculos muy complejos en los que se valoran las cotizaciones de las acciones y la cantidad que se comercializa de cada una. Más que su valor concreto, se puede prestar atención a su variación porcentual respecto a una fecha anterior:

- ✚ *El IBEX 35 ha subido un 0'80 % durante esta semana.*

Especialmente importante es el **índice de precios al consumo (IPC)**: No tiene, en cada momento, un valor determinado, sino que se evalúa en referencia al año (o al mes) anterior:

- ✚ *El IPC ha subido en mayo un 0'28 %, con lo que acumula un crecimiento anual del 3'56 %.*

Para calcular la variación mensual del IPC, se tiene en cuenta la variación del precio de cada uno de los bienes de consumo y la cantidad invertida en el mismo durante ese mes. El índice de precios al consumo es un número índice que se utiliza para medir la variación de la inflación. Se calcula tomando

el precio de una serie de artículos representativos de consumo habitual (cesta de la compra), $p_1, p_2, p_3, \dots$ Y multiplicando dichos precios por su correspondiente peso o ponderación, $q_1, q_2, q_3, \dots$ según la importancia asignada en el momento

$$IPC = \frac{\text{Medida actual de la magnitud}}{\text{Medida antigua de la magnitud}} = \frac{p_{11}q_{11} + p_{21}q_{21} + p_{31}q_{31} + \dots}{p_{10}q_{10} + p_{20}q_{20} + p_{30}q_{30} + \dots}$$

4.3. Interés simple

Cuando depositamos una determinada cantidad de dinero capital en un banco lo que hacemos es prestar este capital a la entidad bancaria y ésta, a cambio, nos da un tanto por ciento del dinero que depositamos.

Por ejemplo,

✚ Si depositamos 50000 € en una libreta de ahorro al 1'5% cada año recibimos:

$$\frac{50000 \cdot 1'5}{100} = 50000 \cdot 0'015 = 750 \text{ €}$$

La cantidad que hemos depositado, 50000 € es el **capital**: El beneficio obtenido, 750 €, se llama **interés**. La cantidad que producen 100 € cada año, 1'5 €, se llama **rédito o tanto por ciento**. Y la cantidad que produce 1 € anualmente, 0'015€, se llama **tanto por uno**.

Un capital colocado al R % en un año produce $\frac{C \cdot R}{100}$ de interés, luego en t años producirá un interés de:

$$I = \frac{C \cdot R \cdot t}{100} = Crt$$

- **Capital, C** , es la cantidad de dinero que depositamos en una entidad financiera.
- **Interés, I** , es la cantidad de dinero producida por un capital de un interés determinado.
- **Rédito o tanto por ciento, R** , es la ganancia que producen 100 € en un año.
- **Tanto por uno, r** , es la ganancia que produce 1 € en un año.
- Se verifica: $r = \frac{R}{100}$

INTERES SIMPLE			
FORMA GENERAL PARA CALCULAR INTERES:		$I = C \cdot i \cdot t$	
1.- TIEMPO EN AÑOS	$I = C \cdot \frac{i}{100} \cdot t$	4.- TIEMPO EN SEMESTRE	$I = C \cdot \frac{i}{200} \cdot t$
2.- TIEMPO EN MESES	$I = C \cdot \frac{i}{1200} \cdot t$	5.- TIEMPO EN TRIMESTRE	$I = C \cdot \frac{i}{400} \cdot t$
3.- TIEMPO EN DÍAS	$I = C \cdot \frac{i}{36000} \cdot t$	6.- TIEMPO EN BIMESTRE	$I = C \cdot \frac{i}{600} \cdot t$
CALCULO DEL MONTO I	$M = C + I$	CALCULO DEL MONTO II.	$M = C (1 + i \cdot t)$
MATEMATICA_EDKEN			

Actividades resueltas

- ✚ Colocamos en un banco 10000 € al 2 %, percibiendo los intereses semestralmente. Si hemos cobrado 600 € en concepto de intereses. ¿Cuánto tiempo hemos tenido el dinero en el banco?

Al ser el cobro de intereses semestral, la fórmula que aplicamos es:

$$I = \frac{CrT}{2} \Rightarrow T = \frac{2I}{Cr} = \frac{2.600}{10000.0,02} = 6 \text{ semestres.}$$

Esto significa que el dinero ha estado depositado en el banco 6 semestres, o lo que es lo mismo, 36 meses.

4.4. Interés compuesto

Cuando no cobramos los intereses en los distintos periodos de tiempo sino que éstos se van sumando al capital, éste se va incrementando. A este proceso le llamamos **capitalización** y afirmamos que hemos colocado el capital a interés compuesto.

Colocar un capital a **interés compuesto** significa que el capital se va incrementando con los intereses producidos en cada periodo de tiempo.

Al capital existente en cada momento, le llamamos **montante**.

Cuando colocamos un capital, C , al tanto por uno, r , al final del primer año tenemos un montante de:

$$M_1 = C + Cr = C(1 + r)^1.$$

Al final del segundo año, tendremos:

$$M_2 = C(1 + r) + C(1 + r)r = C(1 + r)(1 + r) = C(1 + r)^2.$$

Al final del tercer año, tendremos:

$$M_3 = C(1 + r)^2 + C(1 + r)^2r = C(1 + r)^2(1 + r) = C(1 + r)^3.$$



Razonando y siguiendo la misma pauta, llegamos a obtener que el montante, al cabo de t años, es:

$$M = C(1 + r)^t$$

De forma análoga, obtenemos el montante cuando capitalizamos n veces al año o en n periodos cada año:

$$M = C \left(1 + \frac{r}{n} \right)^T$$

Siendo T el número de periodos.

Actividades resueltas

- ✚ ¿Durante cuánto tiempo ha de invertir un capital de 12000 € al 2 % de interés compuesto para llegar a obtener un montante de 12325 € si la capitalización se produce trimestralmente?

Como la capitalización es trimestral, n es 4. Por tanto:

$$M = C \left(1 + \frac{r}{4}\right)^T \Rightarrow \log M = \log C + T \log \left(1 + \frac{r}{4}\right) \Rightarrow T = \frac{\log M - \log C}{\log \left(1 + \frac{r}{4}\right)} = 5'5 \text{ trimestres.}$$

Por lo tanto el capital ha de invertirse durante 5'5 trimestres = 16 meses y medio.

4.5. Anualidades de capitalización

En muchas situaciones se plantea el problema de conseguir u obtener un capital al cabo de un número determinado t de años. Para ello, hacemos unos pagos o aportaciones, siempre iguales, al principio de cada uno de los años. Estos pagos o aportaciones se llaman **anualidades de capitalización**.

Recuerda que:

Las anualidades de capitalización son pagos o aportaciones fijas que hacemos al principio de cada año para formar, junto con sus intereses compuestos, un capital al cabo de un número determinado de t años.

Supongamos que la anualidad de capitalización es a , que el tanto por uno anual es r y el tiempo de capitalización es de t años.

Utilizando la expresión de interés compuesto, obtenemos que la anualidad que entregamos al inicio del primer año se convierte o capitaliza en el siguiente montante:

$$a (1 + r)^t$$

La segunda anualidad, entregada al principio del segundo año, capitaliza al cabo de $t - 1$ años el montante:

$$a (1 + r)^{t-1}$$

La tercera anualidad capitaliza en $t - 2$ años el montante:

$$a (1 + r)^{t-2}$$

y así sucesivamente, la anualidad t -ésima, que entregamos al comienzo del t -ésimo año o último, capitaliza en 1 año el siguiente montante:

$$a (1 + r)^1$$

La suma de todos estos montantes da lugar a la capitalización del capital C :

$$C = a (1 + r)^1 + a (1 + r)^2 + \dots + a (1 + r)^{t-1} + a (1 + r)^t$$

Aplicando la expresión de la suma de n términos consecutivos de una sucesión o progresión geométrica a la progresión anterior de razón $(1 + r)$ y números de términos t , obtenemos:

$$C = \frac{a(1+r)^t(1+r) - a(1+r)}{(1+r) - 1} = \frac{a(1+r) \cdot [(1+r)^t - 1]}{r}$$

Recuerda que:

Una sucesión: $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ se llama sucesión o progresión **geométrica** si cada término, excepto el primero, se obtiene multiplicando el anterior por una cantidad constante, r , llamada razón de la progresión: $a_2 = a_1 \cdot r$; $a_3 = a_2 \cdot r$; $a_n = a_{n-1} \cdot r$.

Por tanto la suma de los n primeros términos $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ vale: $S_n = \frac{a_n \cdot p - a_1}{n - 1}$

Cuando los pagos o aportaciones los hacemos al principio de cada mes, la capitalización no es anual, lo que capitalizamos cada mes es:

$$C = \frac{a \left(1 + \frac{r}{12}\right) \left[\left(1 + \frac{r}{12}\right)^T - 1 \right]}{\frac{r}{12}}$$

siendo a la aportación mensual y T el tiempo de capitalización en meses.

En general, cuando los pagos los hacemos n veces al año, el capital obtenido es:

$$C = \frac{a \left(1 + \frac{r}{n}\right) \left[\left(1 + \frac{r}{n}\right)^T - 1 \right]}{\frac{r}{n}}$$

siendo T el número de periodos de capitalización.

Actividades resueltas

- ✚ Una persona, al cumplir los 40 años, decide hacer un plan de ahorro. Llega con el banco a un acuerdo de capitalizar trimestralmente al 3 % anual, depositando 90 € al inicio de cada trimestre. ¿Qué capital obtendrá al cumplir los 60 años?

La capitalización es trimestral, con lo cual el número de periodos en un año es $n = 4$. El tiempo de capitalización es $60 - 40 = 20$ años, que expresado en periodos de capitalización o trimestres, es de $4 \cdot 20 = 80$ trimestres. Se trata de una capitalización no anual.

El capital que obtendrá según la fórmula que hemos visto antes será:

$$C = \frac{a \left(1 + \frac{r}{4}\right) \left[\left(1 + \frac{r}{4}\right)^T - 1 \right]}{\frac{r}{4}} = \left(\frac{0'03}{4} \right) / 90 \cdot \left(1 + \frac{0'03}{4}\right) \cdot \left[\left(1 + \frac{0'03}{4}\right)^{80} - 1 \right] = 989'015$$

- ✚ ¿Qué anualidad tendríamos que abonar al principio de cada año durante 12 años para capitalizar o conseguir 18000 € al 3 % anual?

Se trata de una capitalización anual, por lo tanto según la fórmula siguiente obtendremos:

$$C = \frac{a \cdot (1+r) \left[(1+r)^t - 1 \right]}{r} \Rightarrow a = \frac{rC}{(1+r) \cdot \left[(1+r)^t - 1 \right]} \Rightarrow a = \frac{0'03 \cdot 18000}{(1+0'03) \cdot \left[(1+0'03)^{12} - 1 \right]} = 223'21\text{€}$$

4.6. Tasa anual equivalente. (T.A.E.)

En cuentas de ahorro, llamamos **TAE** al tanto por ciento de crecimiento total del capital durante un año cuando los periodos de capitalización son inferiores a un año. En préstamos bancarios, la TAE, también es superior al rédito declarado. Al calcularla se incluyen los pagos fijos (comisiones, gastos) que cobra el banco para conceder el préstamo

Pago mensuales de intereses:

$$1 + \frac{C}{100} = \left(1 + \frac{r}{1200}\right)^n$$

siendo C el capital y n el número de meses

Actividades resueltas

✚ Si colocamos 600 € al 2 % anual con capitalización trimestral, en un año genera un montante de:

$$M = 600 \cdot \left(1 + \frac{0'02}{4}\right)^4 = 612'090.$$

Si ahora nos preguntamos, ¿a qué tanto por ciento anual hemos de colocar el mismo capital para generar el mismo montante con capitalización anual?

$$612'090 = 600 \cdot \left(1 + \frac{T.A.E.}{100}\right)^1$$

Operando, obtenemos el T.A.E. = 2'015

Esto indica que el T.A.E. es el tanto por ciento anual, que genera el mismo montante que una capitalización en n periodos de tiempo al año al r % anual.

4.7. Anualidades de amortización

En la vida real es muy frecuente pedir prestado a un banco o una entidad financiera una cantidad de dinero que llamamos **deuda**. Esta deuda la devolvemos o la amortizamos mediante pagos siempre iguales, durante un número t de años consecutivos, haciendo cada pago o aportación al final de cada año. Estos pagos o aportaciones iguales se llaman **anualidades de amortización**.

Las **anualidades de amortización** son pagos o aportaciones fijas que hacemos al final de cada año, para amortizar o cancelar una deuda, junto con sus intereses compuestos, durante un número determinado, t de años.

La deuda D , al cabo de t años, al tanto por uno anual, r , capitaliza el siguiente montante:

$$M = D(1 + r)^t$$

Las anualidades, a , que aportamos al final de cada año, capitalizan los siguientes montantes:

La primera anualidad en $t - 1$ años se convierte en: $a(1 + r)^{t-1}$

La segunda anualidad en $t - 2$ años se convierte en: $a(1 + r)^{t-2}$

La tercera anualidad en $t - 3$ años se convierte en: $a(1 + r)^{t-3}$

Y así sucesivamente, la anualidad t -ésima, que aportamos al final del último año, es: a

La suma de los anteriores montantes ha de coincidir con M

$$M = D(1 + r)^t = a + a(1 + r) + \dots + a(1 + r)^{t-2} + a(1 + r)^{t-1}$$

Aplicando la expresión de la suma de n términos consecutivos de una sucesión o progresión geométrica a la sucesión anterior de razón $1 + r$ y de t términos, obtenemos:

$$D \cdot (1 + r)^t = \frac{a(1 + r)^{t-1} \cdot (1 + r) - a}{(1 + r) - 1}$$

Y de aquí obtenemos la expresión que nos da la anualidad de la amortización:

$$a = \frac{Dr(1 + r)^t}{(1 + r)^t - 1}$$

Cuando los pagos o aportaciones los hacemos al final de cada mes, la amortización mensual viene dada por:

$$a = \frac{D \cdot \frac{r}{12} \cdot \left(1 + \frac{r}{12}\right)^T}{\left(1 + \frac{r}{12}\right)^T - 1}$$

donde D es la deuda y T es el tiempo de amortización en meses.

En general, cuando los pagos los hacemos n veces al año, la cuota de amortización es:

$$a = \frac{D \cdot \frac{r}{n} \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^T}{\left(1 + \frac{r}{n}\right)^T - 1}$$

siendo T el número de periodos de amortización.

Actividades resueltas

- ✚ En el Mercado de Ocasión del coche usado nos venden un coche por 1800 €. La empresa tiene una entidad financiera, la cual cobra un 2 % anual. ¿Cuál debe ser la amortización mensual para saldar la deuda en 2 años?

La amortización es mensual, por lo que el número n de periodos en un año es de 12 y la expresión que utilizamos es:

$$a = \frac{D \cdot \frac{r}{12} \cdot \left(1 + \frac{r}{12}\right)^T}{\left(1 + \frac{r}{12}\right)^T - 1} = \frac{1800 \cdot \frac{0'02}{12} \cdot \left(1 + \frac{0'02}{12}\right)^{24}}{\left(1 + \frac{0'02}{12}\right)^{24} - 1} = 76'58 \text{ €}$$

- ✚ La empresa Frío Industrial ha adquirido una máquina por la que se compromete a pagar 12000 € en el momento de la adquisición y 5000 € al final de cada año, durante 10 años. Si se aplica un 2 % de interés anual, ¿cuál es el valor de la máquina?

La deuda, D , que la empresa amortiza en 10 anualidades es:

$$D = \frac{a((1+r)^t - 1)}{r(1+r)^t} = \frac{5000 \cdot ((1+0'02)^{10} - 1)}{0'02 \cdot (1+0'02)^{10}} = 44914'47$$

Luego el valor de la máquina es: $44914'47 + 12000 = 56914'47$.

Actividades propuestas

64. Un empresario incrementa el precio de sus productos en un 5 % anual. Actualmente, uno de sus productos vale 18 €. Responde a las siguientes cuestiones:
 - a. ¿Cuánto costará el producto dentro de 4 años?
 - b. ¿Cuánto costaba hace 4 años?
 - c. ¿Cuántos años han de pasar para que el precio actual del producto se duplique?
65. Calcula el tiempo que debe de estar colocado un capital de 4500 € en una cuenta corriente al 2 % de interés compuesto anual para que el capital se duplique
66. Calcula el tiempo necesario para que un capital impuesto a interés compuesto al 3 % anual se duplique. ¿Y para que se triplique?
67. ¿Durante cuánto tiempo hemos de abonar mensualidades de 60 € al 4 % anual para conseguir capitalizar 6500 €?
68. El abuelo de Luis, al nacer éste, decidió ingresar en un banco un capital de 3600 € a interés compuesto anual del 3 %. ¿Cuánto dinero recibirá al cumplir 25 años? Si la capitalización se hubiera hecho semestral, ¿cuánto dinero hubiera recibido?
69. Una persona entrega al principio de cada mes y durante 4 años una cantidad fija de 60 €. La capitalización es mensual al 3% anual. ¿Qué capital tendrá al final de los 4 años?
70. Una persona compra un piso en 90000 €. A la firma del contrato entrega 18000 € y el resto lo paga una entidad financiera que le ha concedido el préstamo correspondiente. Esta entidad le cobra el 2 % anual y las cuotas de amortización mensuales. ¿A cuánto asciende cada una de estas cuotas si ha de saldar la deuda en 20 años?
71. Una empresa maderera compra un camión, el cual se compromete a pagar en 13 anualidades al 3 %. cada anualidad de amortización asciende a 16200 €. ¿Cuánto costó el camión?