9 FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

Página 171

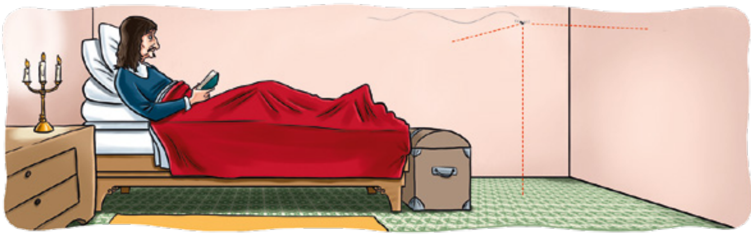
Resuelve

1 **Infórmate y resume, en unas pocas líneas, los datos más relevantes en la vida de René Descartes.**

Nació en La Haye, Francia, en 1596 y murió en Estocolmo en 1650. Su familia pertenecía a la rica burguesía, por lo que fue educado en un colegio considerado uno de los más famosos de Europa. Descartes tuvo una vida muy agitada y repleta de viajes. Tras alistarse en el ejército y dedicar varios años a la meditación, en 1629 marchó a los Países Bajos, donde conoció a Isaac Beechmann, doctor holandés que le animó a reanudar los estudios; de esta forma Descartes encontró su verdadera vocación.

Su mayor aportación a las matemáticas fue un tratado sobre geometría, *La Géométrie*. En este trabajo consigue establecer una relación entre la geometría y el álgebra, que por entonces caminaban por separado, dando lugar al nacimiento de la geometría analítica.

2 **¿Cuántos ejes de coordenadas tiene un sistema cartesiano capaz de fijar la posición de una araña que camina por una pared? ¿Y para fijar la posición de una mosca que vuela por la habitación?**



Para la araña que camina por la pared solo necesitamos dos coordenadas; para la mosca, tres.

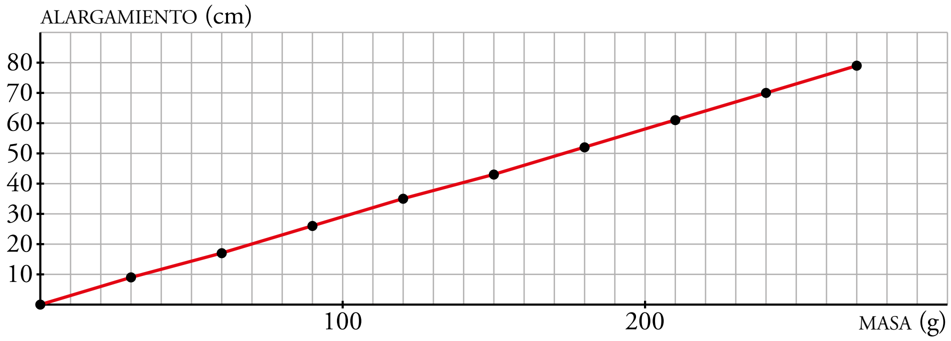
3 **Indica las coordenadas de los puntos A, B, C, D y M en el cuadro de la araña y la mosca de la página anterior. Comprueba que todos ellos responden a la ecuación mencionada.**

$A(0, 6)$; $M(10, 11)$; $B(4, 8)$; $C(6, 9)$; $D(8, 10)$

A: $y = \frac{0}{2} + 6 = 6$ $\quad$ M: $y = \frac{10}{2} + 6 = 5 + 6 = 11$ $\quad$ B: $y = \frac{4}{2} + 6 = 2 + 6 = 8$

C: $y = \frac{6}{2} + 6 = 3 + 6 = 9$ $\quad$ D: $y = \frac{8}{2} + 6 = 4 + 6 = 10$

4 **Representa sobre unos ejes cartesianos los valores de la tabla que relaciona la masa y el alargamiento del muelle. Comprueba que están alineados y que responden, aproximadamente, a la fórmula $A = 0{,}29 \cdot M$.**



(0, 0): $A = 0{,}29 \cdot 0 = 0$

(30, 9): $A = 0{,}29 \cdot 30 = 8{,}7 \approx 9$

(60, 17): $A = 0{,}29 \cdot 60 = 17{,}4 \approx 17$

(90, 26): $A = 0{,}29 \cdot 90 = 26{,}1 \approx 26$

Se puede comprobar que los demás pares también cumplen, aproximadamente, la fórmula.

1 FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD $y = mx$

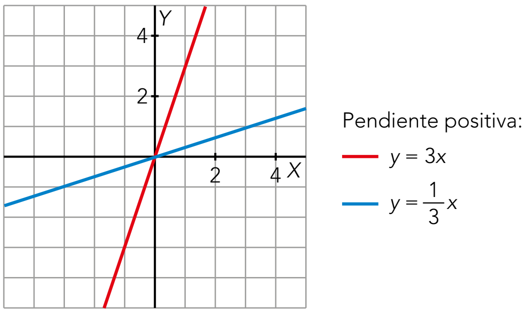
Página 172

1 **Dibuja sobre unos ejes cartesianos, en papel cuadriculado, dos rectas que pasen por el origen y que tengan pendientes positivas y otras dos con pendientes negativas.**

Para que las rectas pasen por el origen, deben ser de la forma $y = mx$, siendo m la pendiente de la recta.

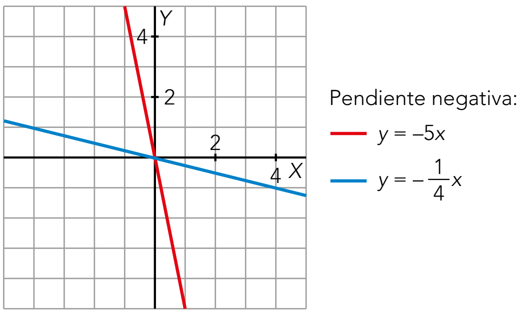
Ejemplos de rectas con pendiente positiva:

- $y = 3x$, con pendiente 3 e $y = \frac{1}{3}x$, con pendiente $\frac{1}{3}$.



Ejemplos de rectas con pendiente negativa:

- $y = -5x$, con pendiente -5 e $y = \frac{-1}{4}x$, con pendiente $\frac{-1}{4}$.



Página 173

2 **Representa las funciones siguientes:**

a) $y = x$ **b)** $y = 2x$ **c)** $y = -x$

d) $y = -2x$ **e)** $y = \frac{1}{3}x$ **f)** $y = -\frac{1}{3}x$

g) $y = \frac{3}{2}x$ **h)** $y = \frac{-3}{2}x$ **i)** $y = \frac{2}{3}x$

Representamos las funciones:

a)

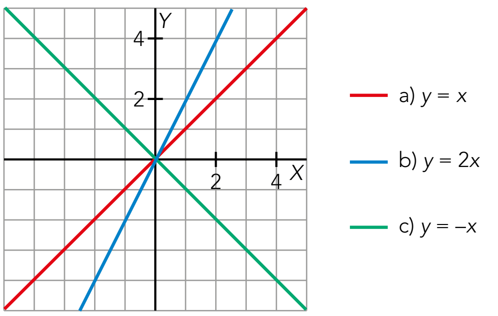
x	$y = x$
–3	–3
0	0
3	3

b)

x	$y = 2x$
–2	–4
0	0
2	4

c)

x	$y = -x$
–2	2
0	0
2	–2



d)

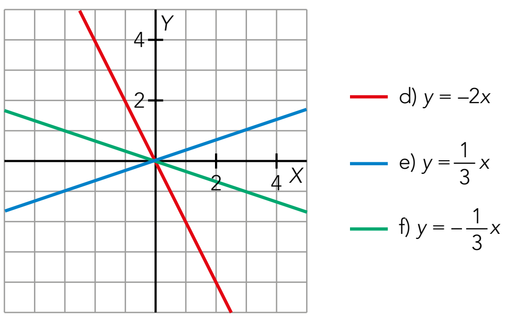
x	$y = -2x$
–1	2
0	0
1	–2

e)

x	$y = 1/3x$
–3	–1
0	0
3	1

f)

x	$y = -1/3\ x$
–3	1
0	0
3	–1



g)

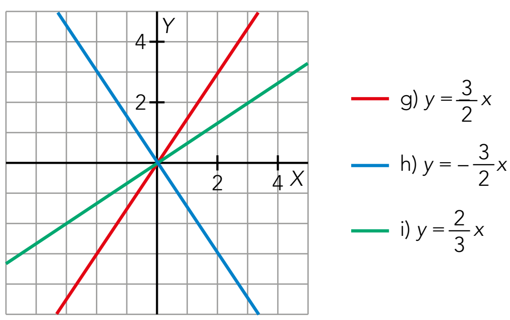
x	$y = 3/2x$
–2	–3
0	0
2	3

h)

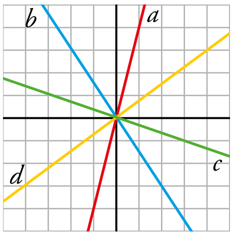
x	$y = -3/2x$
–2	3
0	0
2	–3

i)

x	$y = 2/3x$
–3	–2
0	0
3	2



3 **Relaciona cada recta con su ecuación:**



i) $y = 4x$

ii) $y = \frac{3}{4}x$

iii) $y = -\frac{3}{2}x$

iv) $y = -\frac{1}{3}x$

a) → i) b) → iii)

c) → iv) d) → ii)

2 ▶ FUNCIÓN LINEAL $y = mx + n$

Página 174

1 **Representa en unos ejes cartesianos, sobre papel cuadriculado, las rectas de ecuaciones:**

a) $y = 3x - 2$ **b)** $y = 3 - 2x$ **c)** $y = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}x$

d) $y = \frac{2}{3}x - 5$ **e)** $y = -2$ **f)** $y = \frac{5x - 3}{2}$

Representamos las funciones:

a)

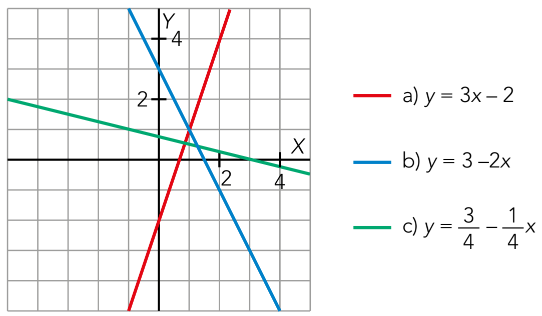
x	$y = 3x - 2$
–1	–5
0	–2
1	1

b)

x	$y = 3 - 2x$
–1	5
0	3
1	1

c)

x	$y = 3/4 - 1/4x$
–1	1
0	3/4
3	0



d)

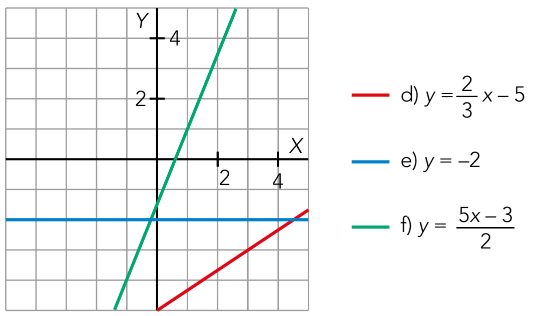
x	$y = 2/3x - 5$
0	–5
3	–3
6	–1

e)

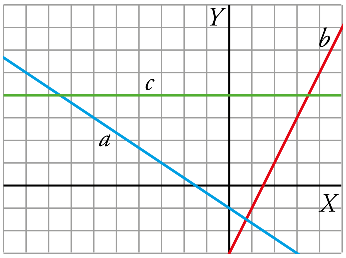
x	$y = -2$
–2	–2
0	–2
2	–2

f)

x	$y = (5x - 3)/2$
–1	–4
0	–3/2
1	1



2 **Escribe la ecuación de cada una de las rectas de la derecha:**



Las ecuaciones de las rectas son de la forma $y = mx + n$. Buscamos, para cada una, el punto de corte con el eje y y otro punto con coordenadas enteras.

- La recta a pasa por (0, –1) y (3, –3):

$$\left.\begin{array}{l} m = -\dfrac{2}{3} \\ n = -1 \end{array}\right\} \to y = -\frac{2}{3}x - 1$$

- La recta b pasa por (0, –3) y (2, 1):

$$\left.\begin{array}{l} m = \dfrac{4}{2} = 2 \\ n = -3 \end{array}\right\} \to y = 2x - 3$$

- La recta c pasa por (0, 4) y (4, 4):

$$\left.\begin{array}{l} m = 0 \\ n = 4 \end{array}\right\} \to y = 4$$

Página 175

3 **Escribe, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por P y tiene pendiente m:**

a) $P(4, -3)$, $m = 4$

b) $P(0, 2)$, $m = -\frac{1}{2}$

c) $P(-3, 1)$, $m = \frac{5}{4}$

d) $P(0, 0)$, $m = -1$

e) $P(-1, 3)$, $m = -\frac{3}{5}$

f) $P(0, -2)$, $m = 0$

La ecuación de una recta en la forma punto pendiente es $y = y_0 + m(x - x_0)$.

a) $y = -3 + 4(x - 4) \rightarrow y = 4x - 19$

b) $y = 2 + \frac{-1}{2}(x - 0) \rightarrow y = 2 - \frac{1}{2}x$

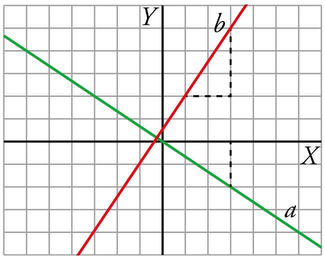
c) $y = 1 + \frac{5}{4}(x + 3) \rightarrow y = \frac{5}{4}x + \frac{19}{4}$

d) $y = 0 - 1(x + 0) \rightarrow y = -x$

e) $y = 3 + \frac{-3}{5}(x + 1) \rightarrow y = \frac{12}{5} - \frac{3}{5}x$

f) $y = -2 + 0(x + 0) \rightarrow y = -2$

4 **Escribe la ecuación de las rectas a y b dadas mediante sus gráficas. Escoge de cada una otro punto distinto al que tomaste para escribir la ecuación. Vuelve a escribir una ecuación con este otro punto. Comprueba que se trata de la misma ecuación.**



Tomamos dos puntos con coordenadas enteras:

- Recta a:

  $P(0, 0)$ y $m = \frac{-2}{3} \rightarrow y = 0 - \frac{2}{3}(x - 0) \rightarrow y = -\frac{2}{3}x$

  En lugar de (0, 0), tomamos $Q(3, -2)$:

  $Q(3, -2)$ y $m = \frac{-2}{3} \rightarrow y = -2 - \frac{2}{3}(x - 3) \rightarrow y = -2 - \frac{2}{3}x + 2 \rightarrow y = -\frac{2}{3}x$

  Obtenemos la misma ecuación.

- Recta b:

  $R(1, 2)$ y $m = \frac{3}{2} \rightarrow y = 2 + \frac{3}{2}(x - 1) \rightarrow y = 2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x$

  En lugar de R(1, 2)), tomamos S(3, 5):

  $S(3, 5)$ y $m = \frac{3}{2} \rightarrow y = 5 + \frac{3}{2}(x - 3) \rightarrow y = 5 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x$

  Obtenemos la misma ecuación.

Página 176

5 **Halla, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q:**

a) $P(2, 5)$, $Q(-3, 6)$ **b)** $P(3, -4)$, $Q(-2, -1)$

c) $P(-1, 0)$, $Q(5, 5)$ **d)** $P(-7, 1)$, $Q(3, 4)$

e) $P(3, 1)$, $Q(-2, 1)$ **f)** $P(2, -2)$, $Q(2, 5)$

En cada caso, hallamos la pendiente a partir de los puntos dados y, después, usamos la ecuación punto-pendiente para escribir la ecuación de la recta.

a) $m = \dfrac{6-5}{-3-2} = -\dfrac{1}{5}$

Recta que pasa por $P(2, 5)$ y tiene pendiente $-\dfrac{1}{5} \to y = 5 - \dfrac{1}{5}(x-2) \to y = \dfrac{27}{5} - \dfrac{1}{5}x$

b) $m = \dfrac{-1-(-4)}{-2-3} = -\dfrac{3}{5}$

Recta que pasa por $P(3, -4)$ y tiene pendiente $-\dfrac{3}{5} \to y = -4 - \dfrac{3}{5}(x-3) \to y = -\dfrac{11}{5} - \dfrac{3}{5}x$

c) $m = \dfrac{5-0}{5-(-1)} = \dfrac{5}{6}$

Recta que pasa por $P(-1, 0)$ y tiene pendiente $\dfrac{5}{6} \to y = 0 + \dfrac{5}{6}(x+1) \to y = \dfrac{5}{6}x + \dfrac{5}{6}$

d) $m = \dfrac{4-1}{3-(-7)} = \dfrac{3}{10}$

Recta que pasa por $P(-7, 1)$ y tiene pendiente $\dfrac{3}{10} \to y = 1 + \dfrac{3}{10}(x+7) \to y = \dfrac{3}{10}x + \dfrac{31}{10}$

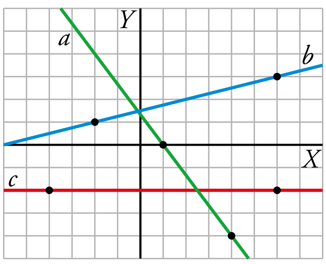
e) $m = \dfrac{1-1}{-2-3} = 0$

Recta que pasa por $P(3, 1)$ y tiene pendiente $0 \to y = 1 - 0(x-3) \to y = 1$

f) $m = \dfrac{5-(-2)}{2-2} = \dfrac{7}{0} \to$ Es una recta vertical (pendiente infinita).

La ordenada de cualquier abscisa es $2 \to x = 2$.

6 **Halla las ecuaciones de las rectas a, b y c. Utiliza los puntos marcados para calcular las pendientes.**



- En la recta a:

$$\left.\begin{array}{l} m = \dfrac{-4}{3} \\ P(1, 0) \end{array}\right\} \to y = 0 + \left(\dfrac{-4}{3}\right)(x-1) \to y = \dfrac{4}{3} - \dfrac{4}{3}x$$

- En la recta b:

$$\left.\begin{array}{l} m = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4} \\ P(-2, 1) \end{array}\right\} \to y = 1 + \dfrac{1}{4}(x+2) \to y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{2}$$

- En la recta c:

$$\left.\begin{array}{l} m = 0 \\ P(-4, -2) \end{array}\right\} \to y = -2 + 0(x+4) \to y = -2$$

3 ▶ APLICACIONES DE LA FUNCIÓN LINEAL. PROBLEMAS DE MOVIMIENTOS

Página 177

1 **Un robot va a una velocidad de 7 m por minuto (7 m/min). ¿Qué distancia recorre en t min?**

Si llamamos d a la distancia que recorre, $d = 7t$.

2 **Un robot marcha a 7 m/min. Lo pusimos en marcha hace 2 min. ¿A qué distancia estará de nosotros dentro de t min?**

Si llamamos d a la distancia que recorre, $d = 7t$.

En 2 minutos recorre $d = 7 \cdot 2 = 14$ m.

Dentro de t min estará a una distancia $d = 14 + 7t$.

3 **Un robot está a 40 m de nosotros y se nos acerca a 5 m/min. ¿A qué distancia estará dentro de t min?**

Si llamamos d a la distancia que estará de nosotros, $d = 40 - 5t$

4 **A las 10:00 alquilamos una bici a 5 €/h y dejamos 100 € de adelanto. ¿Cuánto nos han de devolver si la llevamos de vuelta a las t horas de ese día?**

Si llamamos D al dinero que han de devolvernos, $D = 100 - 5(t - 10)$.

4 ESTUDIO CONJUNTO DE FUNCIONES LINEALES

Página 178

1 Un tren AVE ha salido a las 10 de la mañana de una ciudad situada a 750 km de la nuestra y viene hacia aquí a 200 km/h. Por otro lado, un tren de mercancías salió dos horas antes de nuestra ciudad y va a 50 km/h por una vía paralela a la del AVE.

a) Expresa mediante dos funciones la distancia a nuestra ciudad de cada tren al cabo de t horas.

b) Representa las dos rectas correspondientes a las funciones en unos ejes de coordenadas.

c) Indica en qué punto se cortan las dos rectas y di qué significa cada una de sus coordenadas.

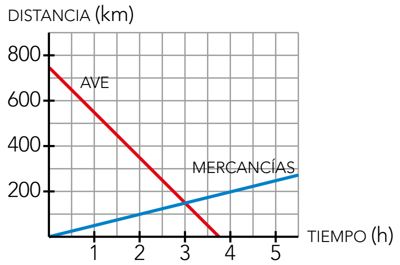
d) Calcula mediante un sistema de ecuaciones la hora a la que se cruzan los trenes y a qué distancia de nuestra ciudad se encuentran.

a) Si llamamos d a la distancia que hay desde nuestra ciudad a cada tren al cabo de t horas:

$d_{\text{AVE}} = 750 - 200t$

$d_{\text{MERCANCÍAS}} = 50t$

b)



c) Se cortan en el punto (3, 150), lo que significa que se cruzarán a las 3 horas, a 150 km de distancia de nuestra ciudad.

d) $\left.\begin{array}{l} d_{\text{AVE}} = 750 - 200t \\ d_{\text{MERCANCÍAS}} = 50t \end{array}\right\} \rightarrow 750 - 200t = 50t \rightarrow 750 = 250t \rightarrow t = 3 \text{ horas}$

Para $t = 3$ horas, $d_{\text{AVE}} = d_{\text{MERCANCÍAS}} = 150$ km

Se encuentran a las 3 horas, a 150 km de nuestra ciudad.

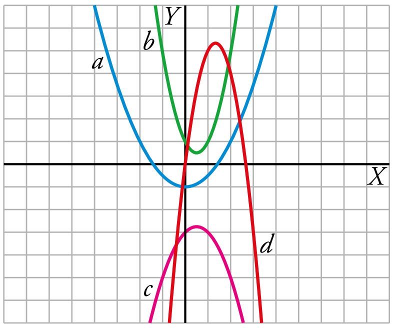
5 PARÁBOLAS Y FUNCIONES CUADRÁTICAS

Página 179

1 **Asocia estas expresiones analíticas de funciones cuadráticas con sus correspondientes parábolas representadas a la derecha:**

I) $y = 2x^2 - 2x + 1$ II) $y = -x^2 + x - 3$

III) $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$ IV) $y = -3x^2 + 8x$



I) $y = 2x^2 - 2x + 1 \rightarrow b$

II) $y = -x^2 + x - 3 \rightarrow c$

III) $y = \frac{1}{2}x^2 - 1 \rightarrow a$

IV) $y = -3x^2 + 8x \rightarrow d$

Página 180

2 **Representa las siguientes parábolas:**

a) $y = x^2 - 2x + 3$ **b)** $y = x^2 - 6x + 5$

Calculamos, para cada caso, el vértice, los cortes con los ejes y algún valor cercano al vértice:

a) $p = \dfrac{-(-2)}{2 \cdot 1} = 1$

$x^2 - 2x + 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} \rightarrow$ No tiene soluciones reales.

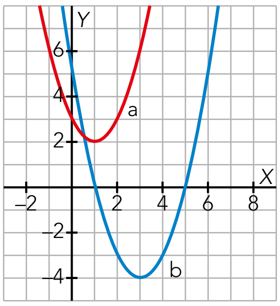
La parábola no corta al eje X.

x	–1	0	1	2	3
y	6	3	2	3	6

b) $p = \dfrac{-(-6)}{2 \cdot 1} = 3$

$x^2 - 6x + 5 = 0 \rightarrow x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \dfrac{6 \pm 4}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 5 \rightarrow (5, 0) \\ x = 1 \rightarrow (1, 0) \end{cases}$

x	0	1	2	3	4	5	6
y	5	0	–3	–4	–3	0	5



3 **Dibuja estas funciones:**

a) $y = \frac{1}{4}x^2 + x - 2$ **b)** $y = 2x^2 - 10x + 8$

Calculamos, en ambos casos, el vértice, los cortes con los ejes y algún valor cercano al vértice:

a) $p = \dfrac{-1}{2 \cdot \frac{1}{4}} = -2$

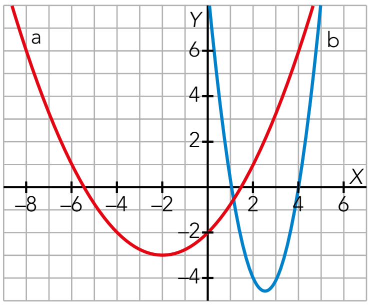
$$\frac{1}{4}x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+2}}{\frac{1}{2}} = -2 \pm 2\sqrt{3} \rightarrow \begin{cases} x = -2 + 2\sqrt{3} \rightarrow (-2+2\sqrt{3}, 0) \\ x = -2 - 2\sqrt{3} \rightarrow (-2-2\sqrt{3}, 0) \end{cases}$$

x	–6	$-2-2\sqrt{3}$	–4	–2	0	$-2+2\sqrt{3}$	2
y	1	0	–2	–3	–2	0	1

b) $p = \dfrac{-(-10)}{2 \cdot 2} = \dfrac{5}{2}$

$$2x^2 - 10x + 8 = 0 \rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100-64}}{4} = \frac{10 \pm 6}{4} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \rightarrow (4, 0) \\ x = 1 \rightarrow (1, 0) \end{cases}$$

x	0	1	2	$\frac{5}{2}$	3	4	5
y	8	0	–4	$-\frac{9}{2}$	–4	0	8



EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 181

1. Carrera de tortugas

Hazlo tú

- **Halla las ecuaciones de los primeros tramos de las tortugas azul y roja. Si las tres hubieran seguido el ritmo del primer tramo, ¿cuándo llegaría cada una?**

  - Tortuga azul: Es una recta que pasa por (0, 0) y (5, 16). Su pendiente es: $m = \frac{16}{5}$. Su ecuación es: $y = \frac{16}{5}x$.

    Llegaría a la meta cuando $y = 18$: $18 = \frac{16}{5}x \ \rightarrow \ x = \frac{5 \cdot 18}{16} = 5{,}625 \text{ min}$.

  - Tortuga roja: Es una recta que pasa por (0, 0) y (5, 9). Su pendiente es: $m = \frac{9}{5}$. Su ecuación es: $y = \frac{9}{5}x$.

    Llegaría a la meta cuando $y = 18$: $18 = \frac{9}{5}x \ \rightarrow \ x = \frac{18 \cdot 5}{9} = 10 \text{ min}$.

  - La tortuga verde llegaría cuando $x = 18$ min.

2. La flecha y el globo

Hazlo tú

- **Responde a las mismas preguntas suponiendo que el globo sube a 10 m/s y que a los 12 s se lanza la flecha.**

a) Tomamos el origen del tiempo ($t = 0$) cuando se lanza la flecha; en ese momento el globo se encuentra a $10 \cdot 12 = 120$ metros. La expresión de la función de la altura del globo es, pues $y = 120 + 10\,t$.

b) Resolvemos el sistema con las ecuaciones de la flecha y el globo:

$$\left.\begin{array}{l} a = 120 + 10\,t \\ a = 60t - 5t^2 \end{array}\right\} \rightarrow 120 + 10t = 60t - 5t^2 \rightarrow 5t^2 - 50t + 120 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow t^2 - 10t + 24 = 0 \ \left\langle \begin{array}{l} t_1 = 4 \\ t_2 = 6 \end{array}\right.$$

Es decir, a los 4s la flecha pincha el globo a una altura de:

$$a = 120 + 10 \cdot 4 = 160 \text{ m}$$

c) Si no pincha el globo al subir, lo haría al bajar a los 6 s a una altura de:

$$a = 120 + 10 \cdot 6 = 180 \text{ m}$$

d) La gráfica de la flecha es la misma que la del problema resuelto original.

La gráfica del globo es una recta que pasa por (0, 120), (4, 160) y (6, 180).

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Página 182

Practica

Funciones lineales. Rectas

1 **Asocia cada recta con su ecuación:**

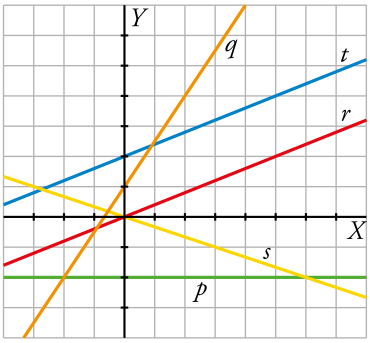
a) $y = -\frac{1}{3}x$

b) $y = \frac{3}{2}x + 1$

c) $y = \frac{2}{5}x$

d) $y = \frac{2}{5}x + 2$

e) $y = -2$



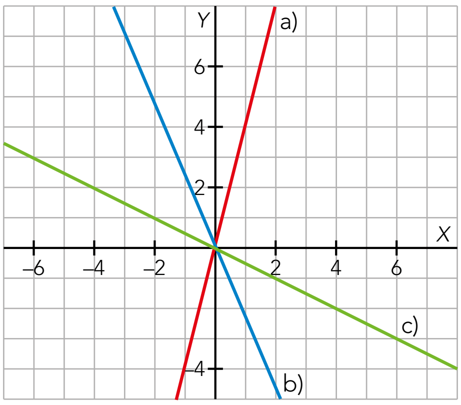
a) *s* b) *q* c) *r* d) *t* e) *p*

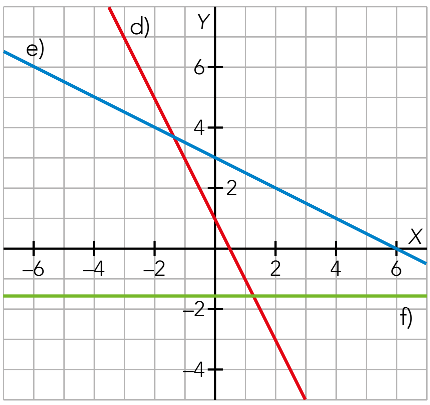
2 **Representa las rectas siguientes:**

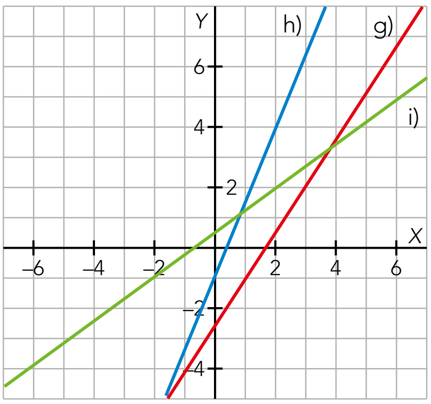
a) $y = 4x$ **b)** $y = -2{,}4x$ **c)** $y = -\frac{x}{2}$

d) $y = -2x + 1$ **e)** $y = -\frac{x}{2} + 3$ **f)** $y = -\frac{8}{5}$

g) $y = \frac{3x - 5}{2}$ **h)** $y = 2{,}5x - 1$ **i)** $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$







3 **Di la pendiente de estas rectas y represéntalas en los mismos ejes. ¿Qué conclusión sacas?**

a) $\boldsymbol{y = 2x}$ **b)** $\boldsymbol{y = 2x - 3}$

c) $\boldsymbol{2x - y + 1 = 0}$ **d)** $\boldsymbol{4x - 2y + 5 = 0}$

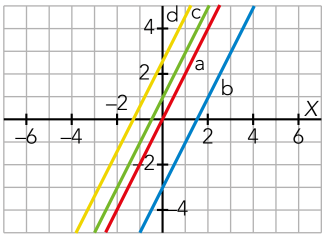
Las pendientes de las rectas son:

a) $m = 2$

b) $m = 2$

c) $2x - y + 1 = 0 \;\rightarrow\; y = 2x + 1 \;\rightarrow\; m = 2$

d) $4x - 2y + 5 = 0 \;\rightarrow\; y = 2x + \frac{5}{2} \;\rightarrow\; m = 2$



Las cuatro rectas son paralelas. Las rectas paralelas tienen la misma pendiente.

4 **Indica la pendiente y la ordenada en el origen de cada una de las rectas de los ejercicios 1 y 2. ¿Cuáles de ellas corresponden a funciones de proporcionalidad?**

1\. a) $m = -\frac{1}{3};\; n = 0$ 1. b) $m = \frac{3}{2};\; n = 1$

1\. c) $m = \frac{2}{5};\; n = 0$ 1. d) $m = \frac{2}{5};\; n = 2$

1\. e) $m = 0;\; n = -2$ 2. a) $m = 4;\; n = 0$

2\. b) $m = -2{,}4;\; n = 0$ 2. c) $m = -\frac{1}{2};\; n = 0$

2\. d) $m = -2;\; n = 0$ 2. e) $m = -\frac{1}{2};\; n = 3$

2\. f) $m = 0;\; n = -\frac{8}{5}$ 2. g) $m = \frac{3}{2};\; n = -\frac{5}{2}$

2\. h) $m = 2{,}5;\; n = -1$ 2. i) $m = \frac{3}{4};\; n = \frac{1}{2}$

Son funciones de proporcionalidad 1. a); 1. c); 2. a); 2. b); 2. c); 2. d).

5 **Escribe la ecuación de la recta de la que conocemos un punto y la pendiente, en cada caso:**

a) $\boldsymbol{P(-2, 5),\; m = 3}$ **b)** $\boldsymbol{P(0, -5),\; m = -2}$

c) $\boldsymbol{P(0, 0),\; m = \frac{3}{2}}$ **d)** $\boldsymbol{P(-2, -4),\; m = -\frac{2}{3}}$

a) $y = 5 + 3(x + 2)$ b) $y = -5 - 2(x - 0) \;\rightarrow\; y = -2x - 5$

c) $y = 0 + \frac{3}{2}(x - 0) \;\rightarrow\; y = \frac{3}{2}x$ d) $y = -4 - \frac{2}{3}(x + 2)$

6 **Escribe las pendientes de las rectas que pasan por los siguientes pares de puntos:**

a) $A(0, 0)$ **y** $B(1, 1)$

b) $A(0, 0)$ **y** $B(1, -2)$

c) $A(1, 3)$ **y** $B(5, 3)$

d) $A(0, 2)$ **y** $B(2, 0)$

e) $A(-5, -2)$ **y** $B(-1, 3)$

f) $A(3, -2)$ **y** $B(0, -1)$

g) $A\left(\frac{4}{5}, 1\right)$ **y** $B\left(3, -\frac{2}{3}\right)$

h) $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ **y** $B\left(\frac{4}{3}, -\frac{3}{5}\right)$

a) $A(0, 0);\ B(1, 1);\ \to\ m = \frac{1-0}{1-0} = 1$

b) $A(0, 0);\ B(1, -2);\ \to\ m = \frac{-2-0}{1-0} = -2$

c) $A(1, 3);\ B(5, 3);\ \to\ m = \frac{3-3}{5-1} = 0$

d) $A(0, 2);\ B(2, 0);\ \to\ m = \frac{0-2}{2-0} = -1$

e) $A(-5, -2);\ B(-1, 3);\ \to\ m = \frac{3-(-2)}{-1-(-5)} = \frac{5}{4}$

f) $A(3, -2);\ B(0, -1);\ \to\ m = \frac{-1-(-2)}{0-3} = \frac{-1}{3}$

g) $A\left(\frac{4}{5}, 1\right);\ B\left(3, -\frac{2}{3}\right);\ \to\ m = \dfrac{-\frac{2}{3}-1}{3-\frac{4}{5}} = \dfrac{-\frac{5}{3}}{\frac{11}{5}} = \frac{-25}{33}$

h) $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right);\ B\left(\frac{4}{3}, -\frac{3}{5}\right);\ \to\ m = \dfrac{-\frac{3}{5}-\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{-\frac{14}{15}}{\frac{11}{6}} = \frac{-14\cdot 6}{15\cdot 11} = \frac{28}{55}$

7 **Obtén la ecuación de la recta que pasa por** A **y** B**.**

a) $A(2, -1),\ B(3, 4)$

b) $A(-5, 2),\ B(-3, 1)$

c) $A\left(\frac{3}{2}, 2\right),\ B\left(1, \frac{2}{3}\right)$

d) $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right),\ B\left(\frac{1}{3}, 1\right)$

a) $m = \frac{4-(-1)}{3-2} = 5$

$y = -1 + 5(x-2)$

b) $m = \frac{1-2}{-3-(-5)} = \frac{-1}{2}$

$y = 2 - \frac{1}{2}(x+5)$

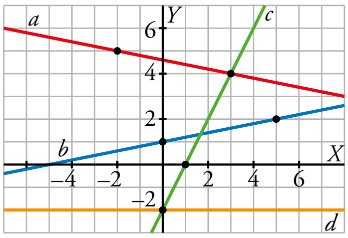
c) $m = \dfrac{\frac{2}{3}-2}{1-\frac{3}{2}} = \dfrac{\frac{-4}{3}}{\frac{-1}{2}} = \frac{8}{3}$

$y = 2 + \frac{8}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)$

d) $m = \dfrac{1-\frac{3}{4}}{\frac{1}{3}-\left(\frac{-1}{2}\right)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{6}} = \frac{3}{10}$

$y = \frac{3}{4} + \frac{3}{10}\left(x + \frac{1}{2}\right)$

8 **Escribe la ecuación de cada una de estas rectas. Ayúdate de los puntos representados:**



Utilizamos los puntos marcados para hallar la pendiente de cada recta.

- La recta a tiene pendiente $m = \frac{-1}{5}$ y pasa por el punto (3, 4).

  Su ecuación es $y = 4 - \frac{1}{5}(x - 3)$.

- La recta b tiene pendiente $m = \frac{1}{5}$ y pasa por el punto (0, 1).

  Su ecuación es $y = \frac{1}{5}x + 1$.

- La recta c tiene pendiente $m = \frac{4}{2} = 2$ y pasa por (0, –2).

  Su ecuación es $y = 2x - 2$.

- La ecuación de la recta d es $y = -2$.

9 **¿Cuáles de las funciones de la actividad anterior son crecientes? ¿Y decrecientes? Comprueba el signo de la pendiente en cada caso.**

Las funciones b y c son crecientes, y tienen pendiente positiva.

La función a es decreciente, y tiene pendiente negativa.

La función d es constante, y su pendiente es 0.

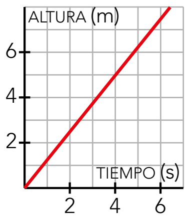
10 **Un grifo llena un depósito de 5 m de alto. La altura del agua varía con el tiempo según la función $a = (5/4)t$ (a en metros, t en segundos).**

a) Represéntala.

b) ¿Es una función de proporcionalidad?

c) Di cuál es la pendiente y explica su significado.

a) $a(t) = \frac{5}{4}t$. Es una función lineal de pendiente $\frac{5}{4}$. Pasa por los puntos (0, 0) y (4, 5).



Si la altura es 5 m, el dominio de la función es el tramo 0 – 4.

b) Sí, se trata de una función de proporcionalidad.

c) La pendiente es $\frac{5}{4}$. Significa que por cada cuatro segundos que pasen, la altura del depósito aumenta 5 metros.

11 **Una milla equivale, aproximadamente, a 1,6 km.**

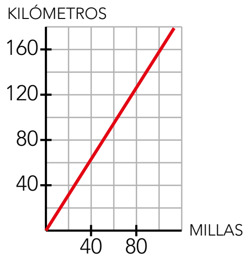
a) Haz una tabla para convertir millas en kilómetros.

b) Dibuja la gráfica y escribe su ecuación.

a)

MILLAS	1	2	3	4	5	10	20	50	100
KILÓMETROS	1,6	3,2	4,8	6,4	8	16	32	80	160

b) La ecuación es $y = 1{,}6x$



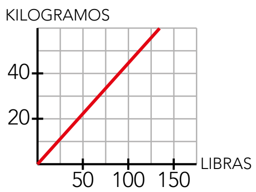
12 **Sabiendo que 100 libras equivalen a 45 kg:**

a) Escribe la ecuación que determina el número de kilos, *y*, que equivalen a *x* libras.

b) Dibuja la gráfica de la función.

a) x: libras; y: kilos $\rightarrow y = \dfrac{45}{100}x$

b) La gráfica pasa por (0, 0) y por (100, 45)



13 **Esta tabla muestra cómo varía el volumen de agua que hay en un depósito al abrir un desagüe:**

t (min)	0	1	2	3	5
V (l)	20	18	16	14	10

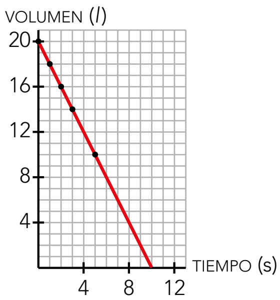
a) Representa la función *tiempo* → *volumen*.

b) Escribe su ecuación y su dominio de definición.

c) Di cuál es su pendiente y qué significa.

d) ¿Es una función de proporcionalidad?

a) Representamos los pares de puntos que se muestran en la tabla:



b) La pendiente de la función es $m = \frac{-2}{1} = -2$ y su ordenada en el origen es $n = 20$.

La ecuación de la función es $y = -2x + 20$. Su dominio de definición es el tramo 0 – 10.

c) La pendiente es $m = -2$ y significa que por cada minuto que está el desagüe abierto, el volumen de agua que hay en el depósito disminuye 2 litros.

d) No, no es una función de proporcionalidad. Es una función afín.

Página 183

14 **Esta tabla muestra las longitudes de unos postes y de sus sombras en un momento determinado:**

POSTE (m)	0,5	1	1,5	2	2,5
SOMBRA (m)	1,25	2,5	3,75	5	6,25

a) Escribe la ecuación que relaciona la longitud de la sombra con la altura del poste en ese instante.

b) ¿Qué longitud tiene la sombra de un poste de 3,5 m de altura? ¿Cuál es la altura de un poste que arroja una sombra de 3 m?

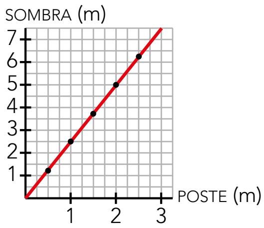
c) Representa la función *altura del poste* → *longitud de la sombra*.

a) Es una función de proporcionalidad de constante 2,5. Por tanto, la ecuación pedida es $y = 2{,}5x$.

b) • Si $x = 3{,}5$ m → $y = 2{,}5 \cdot 3{,}5 = 8{,}75$ → 8,75 m

• Si $y = 3$ m → $3 = 2{,}5 \cdot x$ → $x = 1{,}2$ → 1,2 m

c) Representamos los pares de puntos que se muestran en la tabla:



15 **Mamen anda a una velocidad de 3 km/h y su casa se encuentra a 10 km de la piscina. Asocia cada uno de estos enunciados con una de las ecuaciones de más abajo:**

a) Si empieza a andar ahora, ¿qué distancia habrá recorrido dentro de *t* horas?

b) Si empezó a andar hace 3 h, ¿qué distancia habrá recorrido dentro de *t* horas?

c) Si sale de su casa para bañarse, ¿a qué distancia estará de la piscina dentro de *t* horas?

d) Si salió desde su casa a las 10:00 h para bañarse, ¿a qué distancia se encontrará de la piscina a las *t* horas?

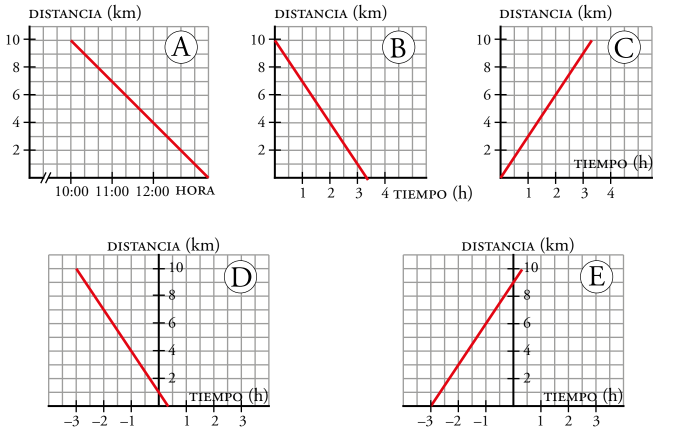
e) Si salió de su casa hace 3 horas para bañarse, ¿a qué distancia estará de la piscina dentro de *t* horas?

$d = 3t + 3$	$d = 10 + 3(t - 10)$	$d = 3(t + 3)$
$d = 3(t - 3)$	$d = 10 - 3(t - 10)$	$d = 10 - 3t$
$d = 3t$	$d = 10 - 3(t + 3)$	$d = 10 + 3(t + 3)$

a) $d = 3t$ b) $d = 3(t + 3)$ c) $d = 10 - 3t$

d) $d = 10 - 3(t - 10)$ e) $d = 10 - 3(t + 3)$

16 **Indica cuál es la gráfica correspondiente a cada uno de los enunciados de la actividad anterior.**



a) → C b) → E c) → B

d) → A b) → D

Funciones cuadráticas. Parábolas

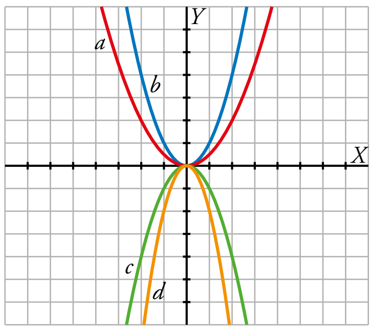
17 **Asocia cada función cuadrática con su correspondiente gráfica:**

I) $y = x^2$

II) $y = -x^2$

III) $y = -2x^2$

IV) $y = \frac{1}{2}x^2$



I) b II) c III) d IV) a

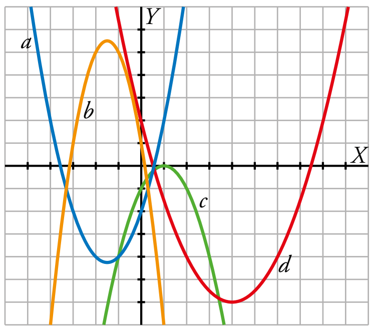
18 **Asocia cada ecuación con su correspondiente parábola:**

I) $y = x^2 + 3x - 2$

II) $y = -x^2 + 2x - 1$

III) $y = -2x^2 - 6x + 1$

IV) $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 2$



I) a II) c III) b IV) d

19 **Di cuál es el punto (abscisa y ordenada) donde se encuentra el vértice de las siguientes parábolas, señalando, en cada caso, si se trata de un máximo o un mínimo:**

a) $y = x^2 - 5$ **b)** $y = 3 - x^2$ **c)** $y = -2x^2 - 4x + 3$

d) $y = 5x^2 + 20x + 20$ **e)** $y = -\frac{5}{2}x^2 + 5x - \frac{3}{2}$

a) $p = -\frac{b}{2a} = \frac{0}{2} = 0$; $f(0) = -5$; $V(0, -5)$.

Es un mínimo, ya que el coeficiente de x^2 es positivo.

b) $p = -\frac{b}{2a} = \frac{0}{-2} = 0$; $f(0) = 3$; $V(0, 3)$.

Es un máximo, ya que el coeficiente de x^2 es negativo.

c) $p = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot (-2)} = -1$; $f(-1) = 5$; $V(-1,-5)$.

Es un máximo, ya que el coeficiente de x^2 es negativo.

d) $p = -\frac{b}{2a} = -\frac{20}{2 \cdot 5} = -2$; $f(-2) = 0$; $V(-2, 0)$.

Es un mínimo, ya que el coeficiente de x^2 es positivo.

e) $p = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2 \cdot \frac{-5}{2}} = 1$; $f(1) = 1$; $V(1, 1)$.

Es un máximo, ya que el coeficiente de x^2 es negativo.

20 **Representa las siguientes funciones haciendo, en cada caso, una tabla de valores como esta, y di cuál es el vértice de cada parábola:**

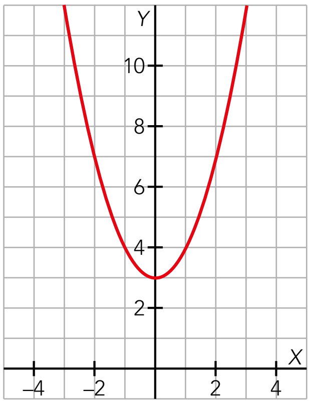
x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	…	…	…	…	…	…	…	…	…

a) $y = x^2 + 3$ **b)** $y = x^2 - 4$ **c)** $y = 2x^2$ **d)** $y = 0{,}5x^2$

a) $y = x^2 + 3$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	19	12	7	4	3	4	7	12	19

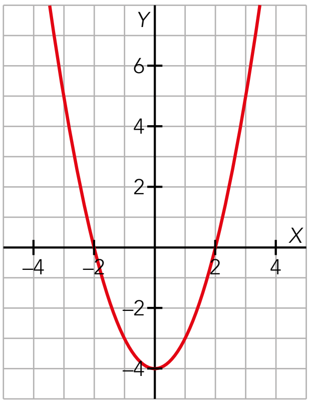
La abscisa del vértice es $p = \frac{0}{2} = 0 \rightarrow$ El vértice es (0, 3).



b) $y = x^2 - 4$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	12	5	0	–3	–4	–3	0	5	12

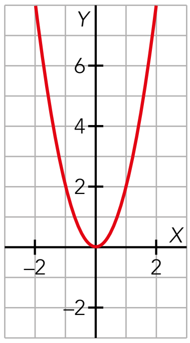
La abscisa del vértice es $p = \frac{0}{2} = 0 \rightarrow$ El vértice es (0, –4).



c) $y = 2x^2$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	32	18	8	2	0	2	8	18	32

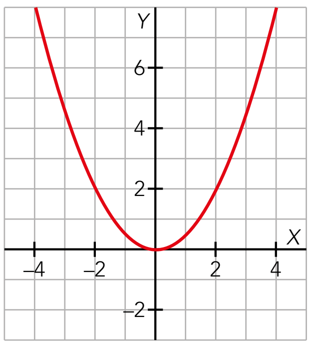
La abscisa del vértice es $p = \frac{0}{4} = 0 \rightarrow$ El vértice es (0, 0)



d) $y = 0{,}5x^2$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8

La abscisa del vértice es $p = \frac{0}{1} = 0 \rightarrow$ El vértice es (0, 0)



21 **Representa las siguientes parábolas hallando el vértice, algunos puntos próximos a él y los puntos de corte con los ejes:**

a) $y = (x+4)^2$ **b)** $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x$ **c)** $y = -3x^2 + 6x - 3$ **d)** $y = -x^2 + 5$

a) Desarrollamos la expresión: $y = (x+4)^2 \rightarrow y = x^2 + 8x + 16$

Calculamos la abscisa del vértice: $p = \frac{-8}{2} = -4$

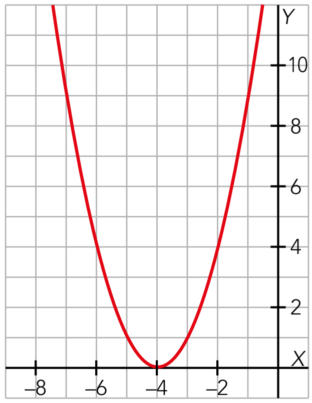
Calculamos los cortes con los ejes:

$x = 0 \rightarrow y = 0 + 0 + 16 \rightarrow (0, 16)$

$y = 0 \rightarrow (x+4)^2 = 0 \rightarrow x = -4 \rightarrow (-4, 0)$

Tomamos valores alrededor del vértice:

x	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0
y	9	4	1	0	1	4	9	16



b) Calculamos la abscisa del vértice: $p = \frac{-2}{2 \cdot \frac{1}{3}} = -3$

Calculamos los cortes con los ejes:

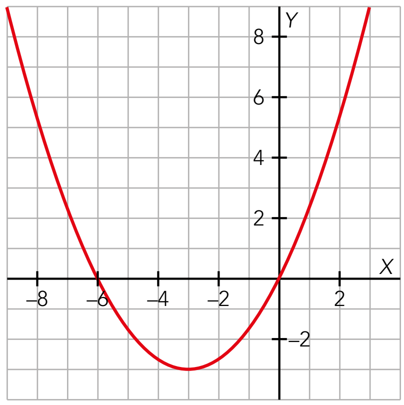
$x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

$y = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{1}{3}x^2 + 2x = 0 \rightarrow x\left(\frac{1}{3}x + 2\right) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow (0, 0) \\ x = -6 \rightarrow (-6, 0) \end{cases}$

Tomamos valores alrededor del vértice:

x	–9	–6	–4	–3	–2	0	3
y	9	0	–2,667	–3	–2,667	0	9



c) Calculamos la abscisa del vértice: $p = \frac{-6}{2 \cdot (-3)} = 1$

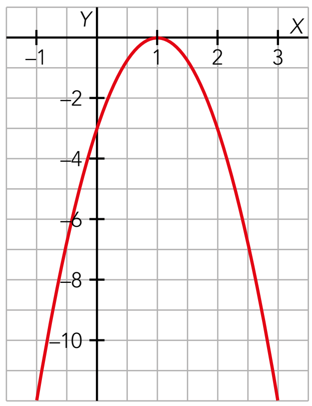
Calculamos los cortes con los ejes:

$x = 0 \rightarrow y = -3 \rightarrow (0, -3)$

$y = 0 \rightarrow -3x^2 + 6x - 3 = 0 \rightarrow -3(x-1)^2 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 0)$

Tomamos valores alrededor del vértice:

x	–1	0	1	2	3
y	–12	–3	0	–3	–12



d) Calculamos la abscisa del vértice: $p = \frac{0}{2 \cdot (-1)} = 0$

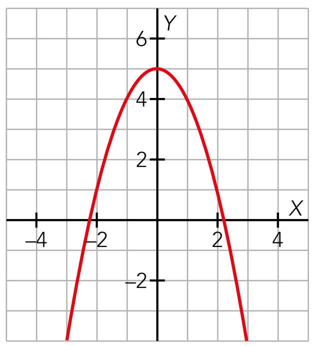
Calculamos los cortes con los ejes:

$x = 0 \rightarrow y = 5 \rightarrow (0, 5)$

$y = 0 \rightarrow -x^2 + 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{5} \rightarrow (-\sqrt{5}, 0) \\ x = \sqrt{5} \rightarrow (\sqrt{5}, 0) \end{cases}$

Tomamos valores alrededor del vértice:

x	–3	$-\sqrt{5}$	–2	–1	0	1	2	$\sqrt{5}$	3
y	–4	0	1	4	5	4	1	0	–4



Resuelve problemas

22 **a) Resuelve el sistema formado por las ecuaciones $y = x^2 - 5x + 2$ e $y = 5x - 23$, y comprueba que tiene una única solución, (5, 2). Represéntalas y observa que la recta y la parábola son tangentes en el punto (5, 2).**

b) Averigua si alguna de estas rectas es tangente a la parábola anterior:

i) $y = x - 1$ ii) $2x + y = 4$ iii) $y = -3$

iv) $y = -x - 2$ v) $x + y = -8$ vi) $x = -3y$

a) Parábola: $y = x^2 - 5x + 2$. Recta: $y = 5x - 23$.

$x^2 - 5x + 2 = 5x - 23 \rightarrow x^2 - 10x + 25 = 0$

$$x_0 = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 100}}{2} = \frac{10 \pm 0}{2} = 5$$

Si $x = 5$, $y = 5 \cdot 5 - 23 = 25 - 23 \rightarrow y = 2$

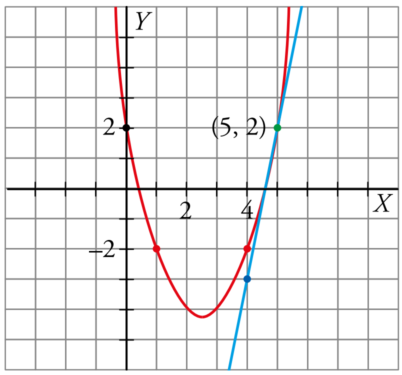
El único punto de corte de la recta y la parábola es (5, 2)

- La recta pasa por (5, 2) y (4, –3)
- Calculamos el vértice de la parábola y algunos puntos cercanos:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{5}{2} \qquad y_0 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{2}\right) + 2 = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 2 = -\frac{17}{4}$$

El vértice está en (2, 5; –4, 25)

x	0	1	2	3	4	5
y	2	–2	–4	–4	–2	2



b) i) $y = x - 1$ pasa por (0, –1) y (1, 0) $\rightarrow$ No es tangente.

ii) $2x + y = 4$ pasa por (0, 4) y (1, 2) $\rightarrow$ No es tangente.

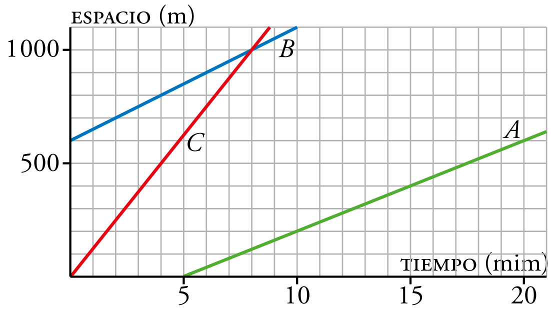
iii) $y = -3$ pasa por (0, –3) y (1, –3) $\rightarrow$ No es tangente.

iv) $x^2 - 5x + 2 = -x - 2 \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow y = -4 \rightarrow$ Sí es tangente en (2, –4).

v) $x + y = -8$ pasa por (0, –8) y (–1, –7) $\rightarrow$ No es tangente.

vi) $x = -3y$ pasa por (0, 0) y (–3, 1) $\rightarrow$ No es tangente.

23 **Esta es la gráfica del espacio que recorren tres montañeros que van a velocidad constante:**



a) ¿Qué velocidad, en m/min, lleva cada uno?

b) Escribe la expresión analítica de estas funciones.

a) La velocidad se corresponde con la pendiente de cada función.

A lleva una velocidad de $\frac{100}{3} \approx 33,3$ m/min

B lleva una velocidad de $\frac{100}{3} \approx 33,3$ m/min

C lleva una velocidad de $\frac{400}{3} \approx 133,3$ m/min

b) $A \rightarrow y = 500 + \frac{100}{3}(x - 20)$

$B \rightarrow y = \frac{100}{3}x + 500$

$C \rightarrow y = \frac{400}{3}x$

24 **En cada uno de los siguientes enunciados, halla la ecuación y representa la función lineal en unos ejes coordenados:**

a) Antonio compra naranjas a 3 €/kg. ¿Cuánto le costarán p kg de naranjas?

b) Sonia sale de viaje a las 8:00 h a 120 km/h. ¿Qué distancia habrá recorrido a las t horas?

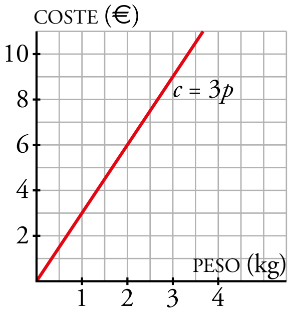
c) A Juan le cobran 5 € por alquilar unos patines, más 1 € por cada hora que esté patinando. ¿Cuánto le cobrarán por t horas de patinaje?

d) Tengo 25 € y el taxi me ha cobrado 2,50 € por la bajada de bandera más 1,20 € por kilómetro recorrido. ¿Cuánto dinero me quedará si el taxi me lleva a d km de distancia?

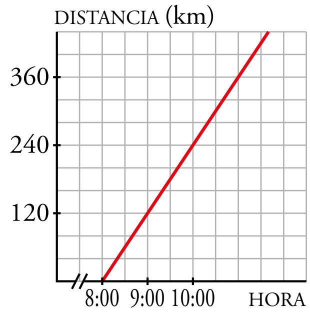
e) A las 12:00 he sacado un refresco a 10 °C de la nevera. Si cada minuto se calienta 1,5 °C, ¿a qué temperatura estará a las t horas?

f) Hace 10 min he abierto el grifo que llena la bañera. Si el nivel sube a razón de 2 cm de altura por minuto y la bañera tiene 40 cm de profundidad, ¿cuántos centímetros faltarán para que rebose el agua dentro de t minutos?

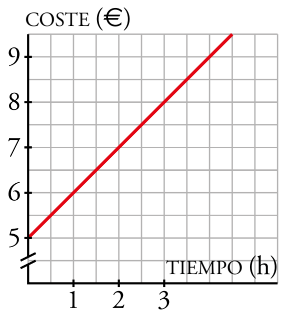
a) $c = 3p$



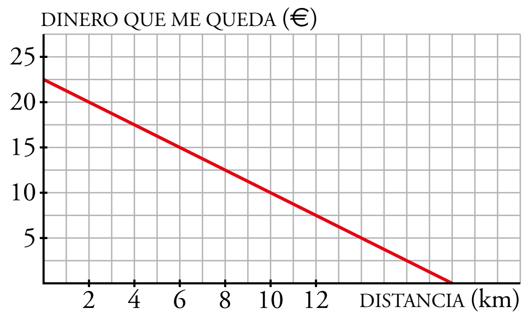
b) $d = 120(t - 8) \rightarrow d = 120t - 960$



c) $c = 5 + t$

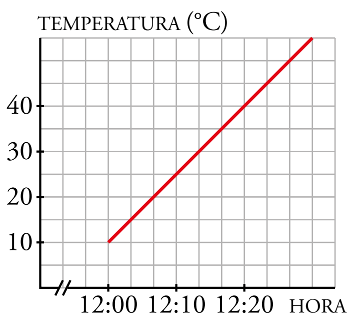


d) $D = 25 - (2{,}50 + 1{,}20d) \rightarrow D = -1{,}2d + 22{,}5$



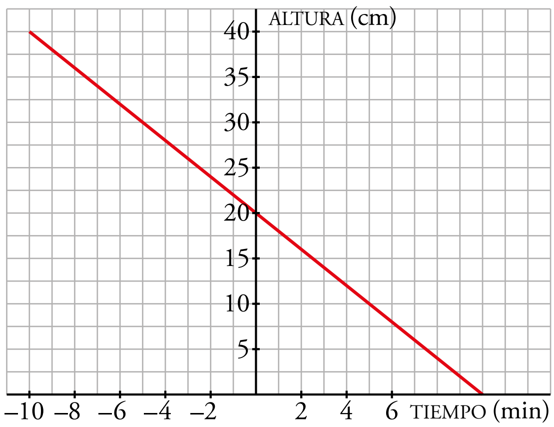
e) $g = 10 + 1{,}5 \cdot 60(t - 12) \rightarrow$

$\rightarrow g = 10 + 90t - 1\,080 \rightarrow g = 90t - 1\,070$



f) $n = 40 - 2(t + 10) \rightarrow n = 40 - 2t - 20 \rightarrow$

$\rightarrow n = -2t + 20$



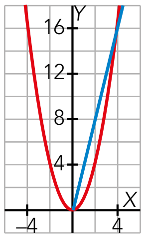
25 a) ¿Cuál es la ecuación de la función que nos da el perímetro de un cuadrado dependiendo de cuánto mida su lado? ¿Y la que nos da su área?

b) Dibuja ambas funciones.

a) El perímetro, y, en función del lado, x, viene dado por $y = 4x$.

El área en función del lado viene dada por $y = x^2$

b)

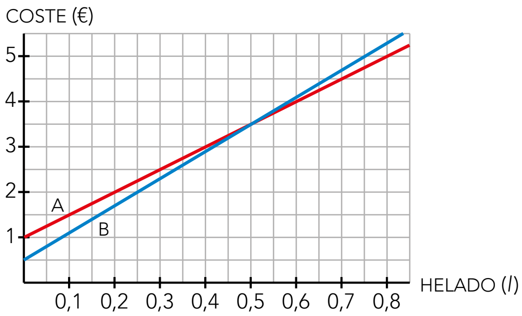


26 En una heladería A venden el helado a 5 € el litro, y cobran 1 € por un envase, sea del tamaño que sea. En otra heladería B cobran 0,50 € por un envase y 6 € por cada litro de helado.

a) Representa la función *litros de helado - coste* para cada heladería y escribe sus ecuaciones.

b) Analiza cuál de las dos ofertas es más ventajosa según la cantidad de helado que compremos.

a)



Si y es el coste del helado, en euros, y x es la cantidad de helado, en litros:

Heladería A $\rightarrow$ $y = 1 + 5x$

Heladería B $\rightarrow$ $y = 0,5 + 6x$

b) Si compramos menos de medio litro de helado, es más barato comprar en la heladería B. Si compramos más de medio litro, la heladería A es la mejor opción.

27 **La temperatura de fusión del hielo en la escala centígrada es 0 °C, y en la Fahrenheit es 32 °F. La ebullición del agua es 100 °C, que equivale a 212 °F.**

a) Encuentra y representa la función lineal que nos da la relación entre las dos escalas.

b) Pasa a grados Fahrenheit 25 °C; 36,5 °C y 10 °C.

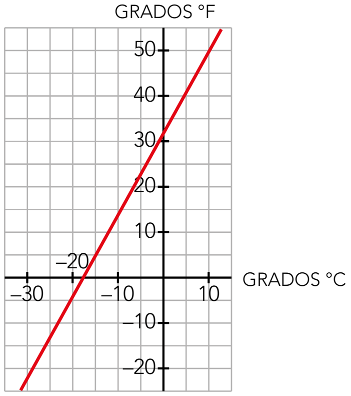
c) Pasa a grados centígrados 86 °F y 63,5 °F.

GRADOS °C	0	100
GRADOS °F	32	212

a) La pendiente de la función es $m = \dfrac{212 - 32}{100 - 0} = 1,8$

La ecuación de la recta en la forma punto-pendiente es:

$y = 32 + 1,8(x - 0) \;\rightarrow\; y = 1,8x + 32$



b) $y = 1,8 \cdot 25 + 32 = 77$ °F; 25 °C $\Leftrightarrow$ 77 °F

$y = 1,8 \cdot 36,5 + 32 = 97,7$ °F; 36,5 °C $\Leftrightarrow$ 97,7 °F

$y = 1,8 \cdot 10 + 32 = 50$ °F; 10 °C $\Leftrightarrow$ 50 °F

c) $86 = 1,8x + 32 \;\rightarrow\; x = \dfrac{86 - 32}{1,8} = 30$ °C; 86 °F $\Leftrightarrow$ 30 °C

$63,5 = 1,8x + 32 \;\rightarrow\; x = \dfrac{63,5 - 32}{1,8} = 17,5$ °C; 63,5 °F $\Leftrightarrow$ 17,5 °C

28 **La altura, a, a la que se encuentra en cada instante, t, una piedra que lanzamos verticalmente hacia arriba es $a = 20t - 5t^2$.**

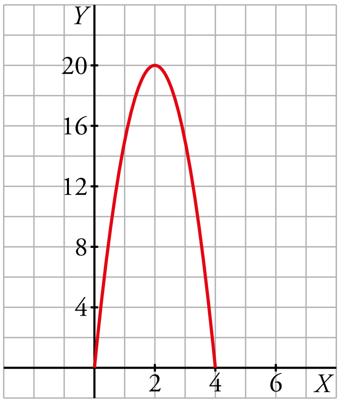
a) Representa gráficamente la función.

b) Di cuál es el dominio de definición.

c) ¿En qué momento alcanza la altura máxima? ¿Cuál es esa altura?

d) ¿En qué momento toca la piedra el suelo?

e) ¿En qué intervalo de tiempo la piedra está a una altura superior a 15 metros?

a) 

b) El dominio de definición es el intervalo 0-4, incluyendo los extremos.

c) Alcanza su altura máxima a los 2 s de ser lanzada, llegando a los 20 m de altura.

d) Toca el suelo a los 4 s de haber sido lanzada.

e) En el intervalo 1-3, sin tener en cuenta los extremos, ya que se pide una altura superior, no igual.

29 **Los gastos anuales, en euros, que una empresa tiene por la fabricación de x ordenadores son:**

$$G(x) = 20\,000 + 250x$$

Y los ingresos, también en euros, que se obtienen por las ventas son:

$$I(x) = 600x - 0{,}1x^2$$

¿Cuántos ordenadores deben fabricarse para que los ingresos superen a los gastos y haya beneficios?

$G(x) = 20\,000 + 250x$

$I(x) = 600x - 0{,}1x^2$

Veamos los puntos de corte de ambas funciones:

$20\,000 + 250x = 600x - 0{,}1x^2 \rightarrow 0{,}1x^2 - 350x + 20\,000 = 0$

$$x = \frac{350 \pm \sqrt{122\,500 - 8\,000}}{0{,}2} = \frac{350 \pm 338{,}38}{0{,}2} \rightarrow \begin{cases} x = 58{,}1 \\ x = 3\,441{,}9 \end{cases}$$

Ahora comprobemos en qué tramos los ingresos están por encima de los gastos:

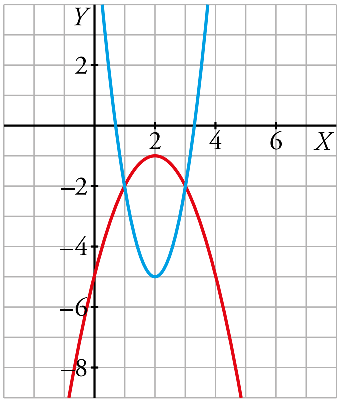
- Si $x < 58{,}1 \rightarrow G(x) > I(x)$
- Si $58{,}1 < x < 3\,441{,}9 \rightarrow G(x) < I(x)$
- Si $x > 3\,441{,}9 \rightarrow G(x) > I(x)$

Para que los ingresos superen a los gastos, es decir, para que haya beneficios, deben fabricarse entre 59 y 3 441 ordenadores.

30 **Dibuja las parábolas cuyas ecuaciones son:**

$$y = 3x^2 - 12x + 7 \qquad\qquad y = -x^2 + 4x - 5$$

Busca los puntos de corte mediante un sistema de ecuaciones y comprueba que corresponden a los hallados gráficamente.



$$\left.\begin{array}{l} y = 3x^2 - 12x + 7 \\ y = -x^2 + 4x - 5 \end{array}\right\} \; 3x^2 - 12x + 7 = -x^2 + 4x - 5 \;\rightarrow\; 4x^2 - 16x + 12 = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; x^2 - 4x + 3 = 0 \begin{array}{l} x = 1 \;\rightarrow\; y = -2 \\ x = 3 \;\rightarrow\; y = -2 \end{array}$$

Página 185

Resuelve: un poco más difícil

31 **La medicina recomienda que al hacer deporte no se superen ciertas limitaciones de frecuencia cardiaca. Hace tiempo se estableció un algoritmo para hallar la Máxima Frecuencia Cardiaca Recomendada (MFCR) según la edad:**

$$\textbf{MFCR} = \textbf{220} - \textbf{edad}$$

Investigaciones médicas posteriores sugieren una leve modificación de esta fórmula:

$$\textbf{MFCR} = \textbf{208} - (\textbf{0,7} \cdot \textbf{edad})$$

La comunidad médica afirma que la nueva fórmula reduce un poco las pulsaciones recomendadas a los jóvenes y las aumenta ligeramente para los mayores.

a) ¿A partir de qué edad la nueva fórmula aumenta la limitación?

b) Dibuja las dos gráficas, calcula el punto de corte y comprueba que coincide con lo hallado en el apartado anterior.

c) Comprueba, para cada una de las dos fórmulas, qué limitación de frecuencia cardiaca corresponde a tu edad.

1.er algoritmo: MFCR = 220 – edad $\rightarrow$ $y = 220 - x$

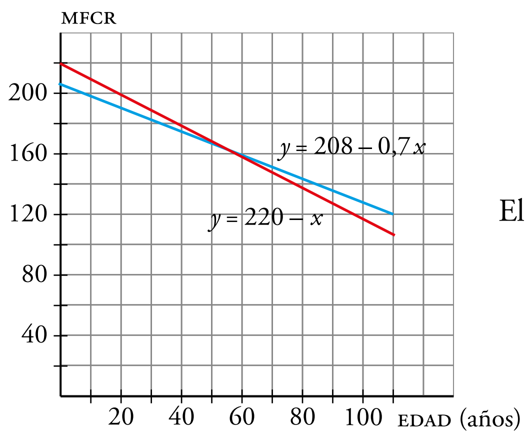
2.º algoritmo: MFCR = 208 – (0,7 · edad) $\rightarrow$ $y = 208 - 0{,}7\,x$

a) Hallamos el punto de corte de las dos funciones anteriores:

$$\left.\begin{array}{l} y = 220 - x \\ y = 208 - 0{,}7x \end{array}\right\} \rightarrow 220 - x = 208 - 0{,}7x \rightarrow 12 = 0{,}3x \rightarrow x = 40 \rightarrow y = 220 - 40 = 180$$

A partir de los 40 años.

b)

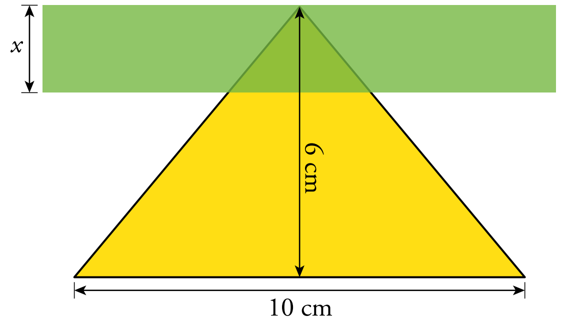


El punto de corte es (40, 180).

c) Hacemos los cálculos para 14 años.

- $y = 220 - x \rightarrow y = 220 - 14 \rightarrow y = 206$
- $y = 208 - 0{,}7 \cdot x \rightarrow y = 208 - 0{,}7 \cdot 14 \rightarrow y = 198{,}2$

32 **La siguiente figura muestra cómo al bajar una cortinilla se oculta el triángulo coloreado de forma que al principio se ve el triángulo completo y al final no se ve nada:**



a) Calcula en función de x (lo que baja la cortinilla) el área de la parte del triángulo que podemos ver.

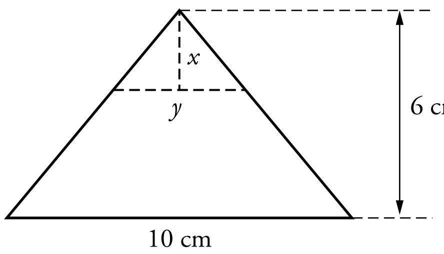
b) ¿Cuál es el dominio de la función?

c) Dibuja la gráfica correspondiente.

a) • Área del triángulo amarillo: $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 = 30$ cm^2

• El triángulo de base 10 y el de base y son semejantes.

Por tanto: $\frac{10}{6} = \frac{y}{x} \rightarrow y = \frac{5}{3}x$



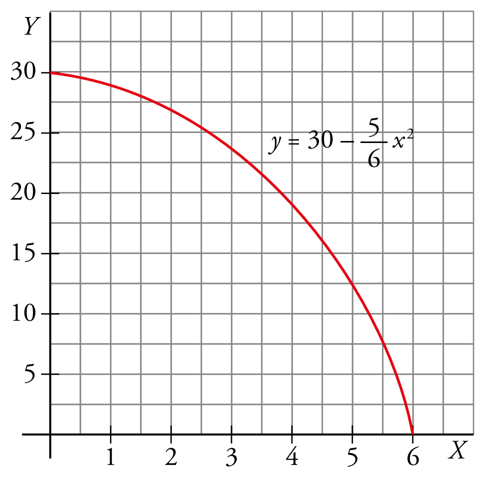
• Área del triángulo de base y:

$\frac{1}{2} \cdot y \cdot x = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3}x \cdot x = \frac{5}{6} \cdot x^2$

• Área de la parte visible del triángulo: $A = 30 - \frac{5}{6} \cdot x^2$

b) El dominio de la función es [0, 6].

c) El vértice de la parábola $y = 30 - \frac{5}{6}x^2$ está en (0, 30). La parábola pasa por (0, 30), (3; 22,5), (6, 0)



33 **Tenemos 200 kg de naranjas que hoy se venderían a 0,40 €/kg. Cada día que pasa se estropea 1 kg y el precio aumenta 0,01 €/kg.**

a) ¿Cuándo hemos de vender las naranjas para obtener el máximo beneficio?

b) ¿Cuál será ese beneficio?

Si llamamos x a los días que han de pasar, la función que nos da el precio de las naranjas es la siguiente:

$$f(x) = (200 - x)(0{,}40 + 0{,}01x) \rightarrow f(x) = -0{,}1x^2 + 1{,}60x + 80$$

El beneficio máximo se encontrará en el vértice de la parábola:

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-1{,}60}{2 \cdot (-0{,}01)} = 80 \rightarrow f(80) = 144$$

Para obtener el máximo beneficio, las naranjas se deberán vender, tras 80 días, por 144 €.

Reflexiona

34 **a) Calcula c para que la recta $3x - 5y = c$ pase por el punto (–2, 4).**

b) Calcula b para que la recta $2x + by = -11$ pase por el punto (2, –5).

c) Halla k para que la parábola $y = kx^2 - 2x + 3$ pase por el punto (–1, 0).

d) Halla el valor de a para que la parábola de ecuación $y = ax^2 + 2x + 3$ tenga su vértice en el punto de abscisa $x = 2$.

a) El punto (–2, 4) tiene que verificar la ecuación de la recta. Por tanto:

$3 \cdot (-2) - 5 \cdot 4 = c \rightarrow c = -26$

b) El punto (2, –5) tiene que verificar la ecuación de la recta. Por tanto:

$2 \cdot 2 + b \cdot (-5) = -11 \rightarrow b = 3$

c) Sustituimos el punto en la parábola, para hacer que cumpla la ecuación, y despejamos k:

$k + 2 + 3 = 0 \rightarrow k = -5$

d) Sustituimos el punto en la ecuación del vértice para hallar el coeficiente a:

$p = -\frac{2}{2a} = 2 \rightarrow a = \frac{-1}{2}$

35 **¿Verdadero o falso?**

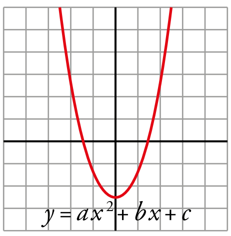
a) $a > 0$

b) $c = 0$

c) $c < 0$

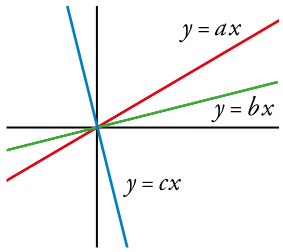
d) $b^2 - 4ac > 0$

e) $b = 0$



a) Verdadero b) Falso c) Verdadero d) Verdadero e) Verdadero

36 **¿Verdadero o falso?**



a) $a > 0$ **b)** $b > 0$

c) $c > 0$ **d)** $a > b$

e) $c < b$ **f)** $c > a$

g) $-c > a$ **h)** $b > -c$

a) Verdadero b) Verdadero c) Falso d) Verdadero e) Verdadero

f) Falso g) Verdadero h) Falso

37 **¿Verdadero o falso? Justifica tus respuestas.**

a) Se puede obtener la ecuación de una recta sabiendo su pendiente y el punto de corte con el eje *Y*.

b) Con los puntos de corte con los ejes siempre es posible obtener la ecuación de una recta.

c) La pendiente de una recta es lo que aumenta la x cuando la y aumenta 1.

d) La pendiente de una recta es lo que aumenta la y cuando la x aumenta 1.

e) Si una parábola corta al eje *X* en dos puntos, su vértice está entre medias de estos puntos.

a) Verdadero. Tenemos la pendiente y un punto de la recta, suficiente para hallar su ecuación.

b) Verdadero. Tendríamos un par de puntos con los que hallar la pendiente y la ecuación de la recta.

c) Falso. Es la variación de y cuando la x aumenta una unidad.

d) Verdadero. Es la variación de y cuando la x aumenta una unidad.

e) Verdadero. Los dos puntos de corte con el eje *X* son simétricos, por lo que entre medias se encontrará el vértice.

38 **Explica por qué el siguiente razonamiento es correcto:**

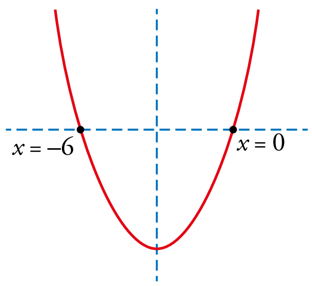
Para hallar la abscisa del vértice de la parábola de ecuación $y = x^2 + 6x - 7$, le quito el término independiente, –7, e igualo la y a 0. Así obtengo:

$$x^2 + 6x = 0 \rightarrow x(x + 6) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ y } x = -6$$

El vértice está en medio, es decir, $x = -3$.

- Quitar el término independiente, –7, e igualar la y a 0 es lo mismo que buscar los puntos de corte de la parábola con la recta $y = -7$.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 + 6x - 7 \\ y = -7 \end{array}\right\} \rightarrow x^2 + 6x - 7 = -7 \rightarrow x^2 + 6x = 0 \rightarrow x\,(x + 6) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = -6 \end{array}\right.$$

- 

Como las parábolas son simétricas respecto a una recta que pasa por el vértice y es paralela al eje y, la abscisa del vértice está en el punto medio de x_1 y x_2, es decir, en $x_0 = -3$.

Página 186

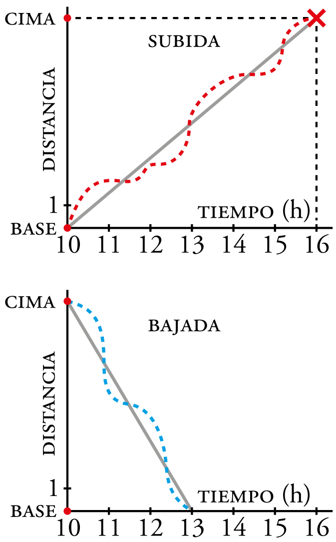
Reflexiona

Subir y Bajar

- **Un montañero inicia la ascensión a un pico a las 10 de la mañana y llega a la cima a las 4 de la tarde. Duerme en el refugio y, al día siguiente, también a las 10 h, inicia el descenso, llegando a la base a la una de la tarde.**

  ¿Crees que hay algún punto del camino por el que ha pasado en la bajada a la misma hora que en la subida? ¿A qué hora ocurrió tal cosa, suponiendo que ha bajado y subido a velocidades constantes?

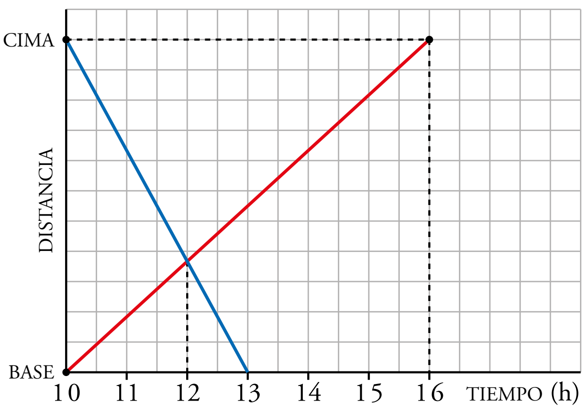
  Observa las gráficas de la derecha y, si aún no lo tienes claro, dibuja ambas sobre los mismos ejes, suponiendo que han sido dos montañeros haciendo caminos inversos en el mismo día.



Al subir, a las 12 h el montañero ha recorrido $\frac{1}{3}$ del camino.

Al bajar, a las 12 h ha recorrido $\frac{2}{3}$ del camino, y le falta $\frac{1}{3}$ del camino para llegar a la falda de la montaña.

Por tanto, pasa por el mismo lugar a la misma hora, a las 12 h.



Piensa y decide

¿Cual es cual?

- **Cada gráfica representa dos vehículos que van a velocidad constante. Así, la función que relaciona la distancia y el tiempo, en cada vehículo, es una recta. Asocia cada enunciado con una gráfica:**

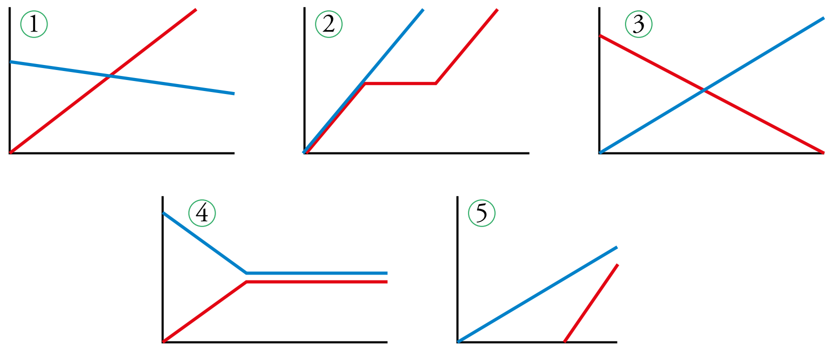
  Ⓐ **Un coche partió y una moto salió en su persecución.**

  Ⓑ **Un coche va, otro viene, y chocan.**

  Ⓒ **Un coche va, un camión viene, y se cruzan.**

  Ⓓ **Un coche se acerca y otro se aleja.**

  Ⓔ **Dos autobuses salen juntos y uno de ellos hace un descanso.**



A ↔ 5 B ↔ 4 C ↔ 1 D ↔ 3 E ↔ 2

Entrénate resolviendo otros problemas

- **Fátima ha invitado a diez personas a su fiesta de cumpleaños y les propone un acertijo con premio:**

  «Se llevará la caja de bombones quien averigüe, sin abrirla, cuántos bombones contiene. Doy tres pistas:

  — Hay menos de cinco docenas.

  — Están ordenados en filas de nueve.

  — Si se repartieran entre los presentes, sobraría uno».

  ¿Cuántos bombones contiene la caja?

  — Hay menos de 5 docenas $\rightarrow$ $5 \cdot 12 = 60$. Hay menos de 60 bombones.

  — El número de bombones tiene que ser un múltiplo de 9 menor que 60. Por tanto, hay las siguientes posibilidades:

  9 18 27 36 45 54

  — El la fiesta hay 10 invitados más Fátima, es decir, hay 11 personas. Por tanto, el número de bombones tiene que ser una unidad mayor que un múltiplo de 11:

  12 23 34 45 56

  El único número que verifica todas las condiciones es 45. La caja contiene 45 bombones.

- **a) Tienes estas tres monedas:**

  ¿Cuántas cantidades de dinero distintas puedes formar con ellas?

  b) ¿Y si tuvieras estas cinco monedas?

  a) Puedes poner una moneda y obtendrías:

   0,10 €;  0,20 € y  0,50 €

  Con dos monedas, obtendrías:

  0,10 + 0,20 = 0,30 €   0,10 + 0,50 = 0,60 €   0,20 + 0,50 = 0,70 €

  Con tres monedas, obtendrías:

   0,10 + 0,20 + 0,50 = 0,80 €

  En total, son 7 cantidades distintas de dinero.

  Si añadimos la cantidad 0 € (no tenemos ninguna moneda) serían 8 posibles cantidades.

b) Tomando una moneda, hay 5 posibilidades, una por cada moneda. Tomando dos monedas hay 10 posibilidades:

 10 cént. + 20 cént.	 20 cént. + 50 cént.	 50 cént. + 1 €	 1 € + 2 €
 10 cént. + 50 cént.	 10 cént. + 1 €	 50 cént. + 2 €	
 10 cént. + 1 €	 20 cént. + 2 €		
 10 cént. + 2 €			

AUTOEVALUACIÓN

1 **Asocia cada una de estas funciones lineales con su ecuación y escribe su pendiente:**

a) $y = 3x - 4$

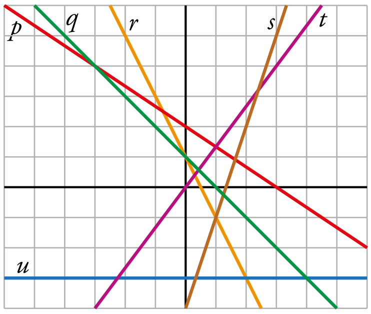
b) $y = -2x + 1$

c) $y = (4/3)x$

d) $y = -2/3x + 2$

e) $y = -3$

f) $y = -x + 1$



a) Recta s, $m = 3$ b) Recta r, $m = -2$ c) Recta t, $m = 4/3$

d) Recta p, $m = -2/3$ e) Recta u, $m = 0$ f) Recta q, $m = -1$

2 **Representa estas funciones lineales y escribe la ecuación de las tres últimas:**

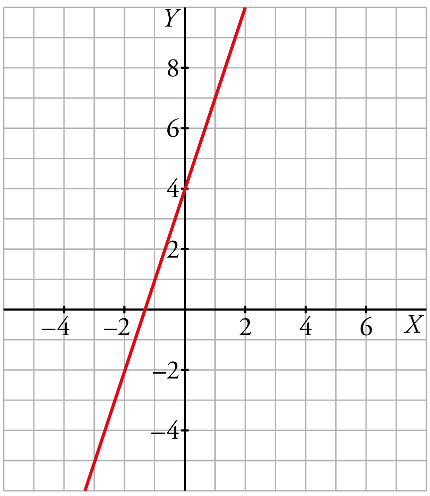
a) $y = 3x + 4$ **b)** $3x + 2y = 5$

c) Recta de pendiente 1/4 que pasa por (3, 0).

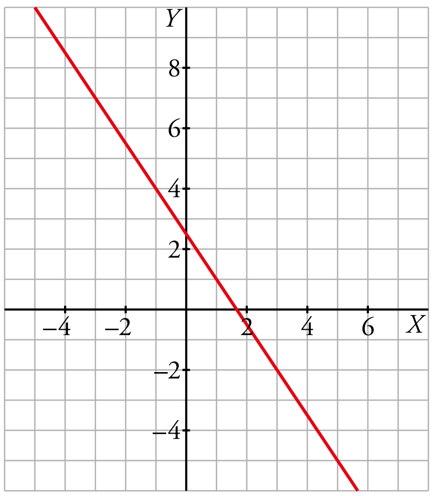
d) Recta que pasa por los puntos (4, 1) y (–2, 4).

e) Función de proporcionalidad que pasa por (4, –3).

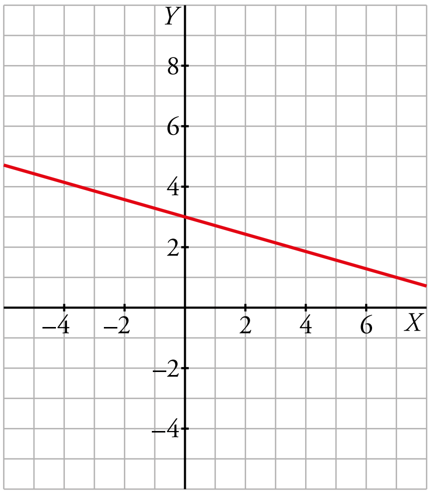
a) $y = 3x + 4$



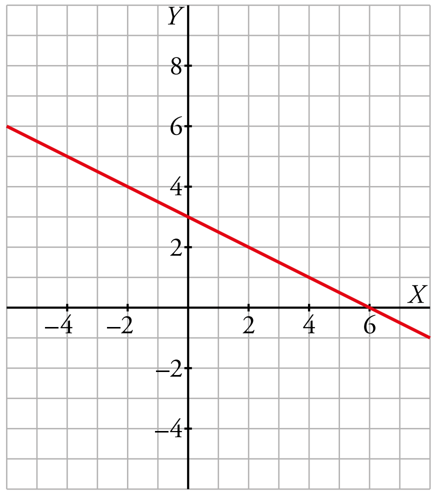
b) $y = \frac{-3}{2}x + \frac{5}{2}$



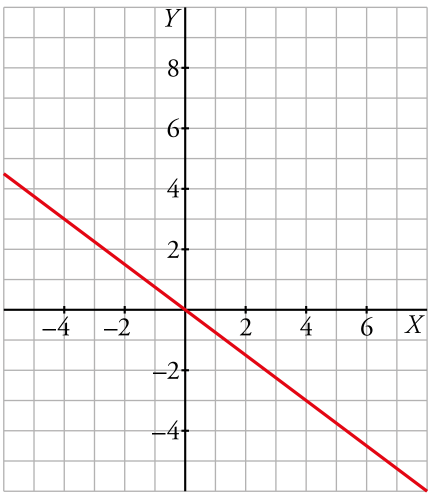
c) $y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$



d) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}$; $y = -\frac{1}{2}x + 3$



e) La función pasa por (0, 0). $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3}{4}$; $y = -\frac{3}{4}x$



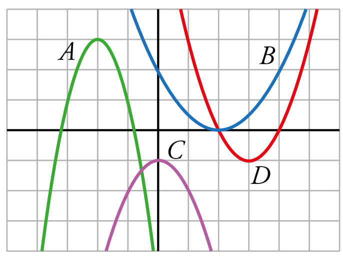
3 **Asocia cada ecuación con su parábola:**

$y = -x^2 - 1$

$y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

$y = -2x^2 - 8x - 5$

$y = x^2 - 6x + 8$



A $\rightarrow$ $y = -2x^2 - 8x - 5$

B $\rightarrow$ $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

C $\rightarrow$ $y = -x^2 - 1$

D $\rightarrow$ $y = x^2 - 6x + 8$

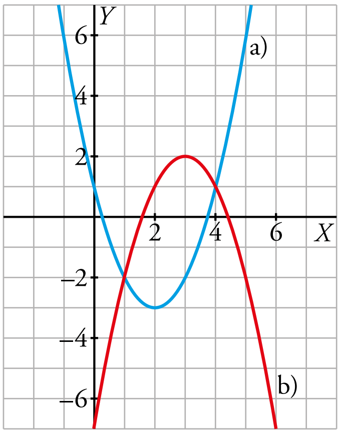
4 **Representa estas parábolas:**

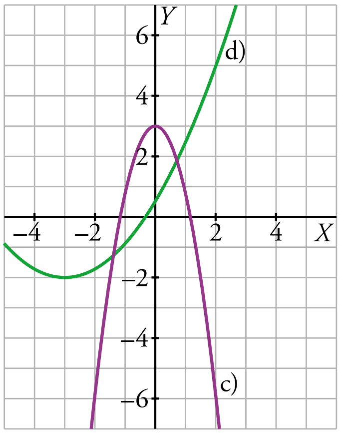
a) $y = x^2 - 4x + 1$

b) $y = -x^2 + 6x - 7$

c) $y = -2x^2 + 3$

d) $y = (1/3)x^2 + 2x + 1$





5 **Hoy hay 20 °C, y vamos a hacer una excursión en globo. Sabemos que la temperatura desciende, aproximadamente, 6 °C por cada kilómetro de ascensión.**

a) ¿Qué temperatura habrá si ascendemos 3 km? ¿Cuánto habremos ascendido si estamos a 11 °C?

b) Representa la función *altura* → *temperatura* y escribe su expresión analítica.

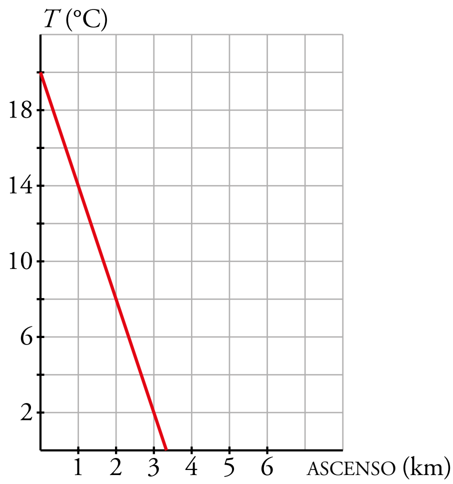
a) $20 - 6 \cdot 3 = 2°$

Si estamos a 11 °C habremos ascendido 1,5 km.

b) Pasa por (0, 20) y (3, 2).

$$m = \frac{2 - 20}{3 - 0} = -3$$

$y = 20 - 3x$



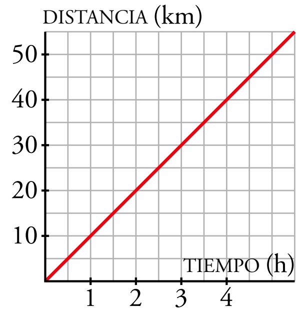
6 **Halla la ecuación para cada uno de estos enunciados y representa las funciones correspondientes:**

a) Begoña empieza ahora a correr a 10 km/h. ¿Qué distancia habrá recorrido dentro de t horas?

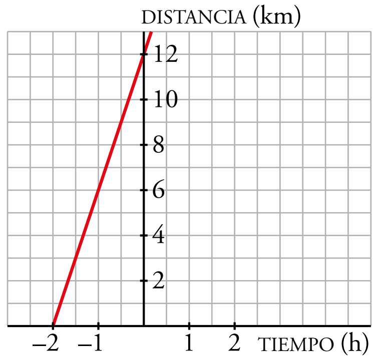
b) Andrés salió de casa hace dos horas a 6 km/h. ¿Qué distancia habrá recorrido dentro de t horas?

c) Mariajo sale a 4 km/h desde su casa hacia la mía, que está a 18 km. ¿A qué distancia se encontrará de mi casa dentro de t horas?

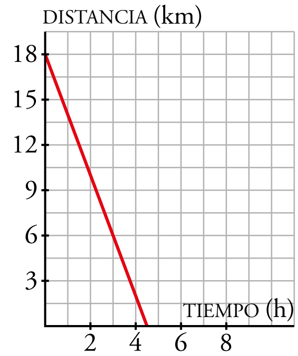
a) $d = 10t$



b) $d = 6(t + 2) \rightarrow d = 6t + 12$



c) $d = 18 - 4t$



7 **Hace dos horas, Bárbara salió en bici de su casa hacia la de Víctor a 15 km/h. Víctor sale ahora andando a 6 km/h en su busca. Sabiendo que viven a 58 km y tomando como origen cuando salió Víctor:**

a) Expresa mediante dos funciones la distancia de cada uno a casa de Víctor.

b) Representa, en unos ejes coordenados, las dos rectas correspondientes a las funciones. Indica el punto de corte de ambas rectas y lo que representa.

c) Sabiendo que Bárbara salió de su casa a las 8:00 a.m., ¿a qué hora y a qué distancia de la casa de Bárbara se encuentran?

a) Llamamos d a la distancia de cada uno a casa de Víctor.

Bárbara: $d = 28 - 15 \cdot t$

Cuando sale Víctor, Bárbara lleva 2 h moviéndose a 15 km/h, es decir, ha hecho 30 km y ya está a 28 km de la casa de Víctor.

Víctor: $d = 6 \cdot t$

b) Calculamos el punto de corte:

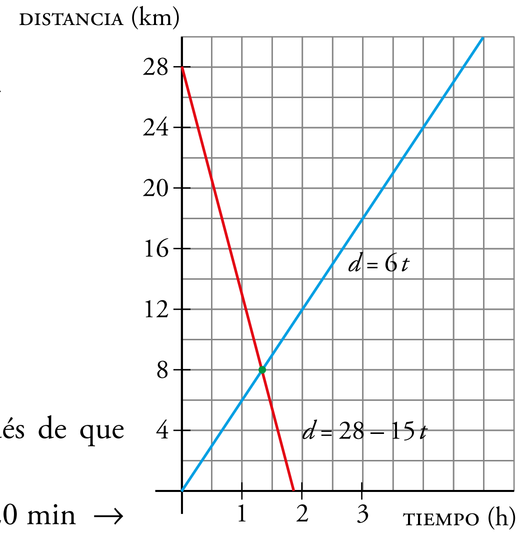
$$\left.\begin{array}{l} d = 28 - 15t \\ d = 6t \end{array}\right\} \to 28 - 15t = 6t \to 28 = 21t \to$$

$$\to t = \frac{28}{21} = \frac{4}{3} \text{ h}$$

$$d = 6 \cdot \frac{4}{3} = 8 \text{ km}$$

Punto de corte: $\left(\frac{4}{3}, 8\right)$

Significa que se encuentran 1 h 20 min después de que salga Víctor a 8 km de su casa.



c) Sale a las 8:00 am, se mueve dos horas más 1 h 20 min $\to$
$\to$ 11:20 am.

Lleva 30 km y hace otros 8 km $\to$ 38 km.