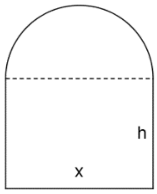
Opción A

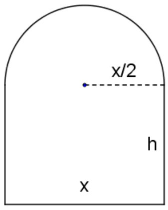
Ejercicio 1 opción A, Junio 2017 (modelo)

[2'5 puntos] Se quiere hacer una puerta rectangular coronada con un semicírculo como el de la figura. El hueco de la puerta tiene que tener 16 metros cuadrados.



Si es posible, determina la base "x" para que el perímetro sea mínimo.

Solución



Es un problema de optimización.

Sabemos que la longitud de una circunferencia es $2\pi r$ y el área del circulo es πr^2, en nuestro caso la longitud de la semicircunferencia es $(1/2)\cdot 2\pi\cdot(x/2) = (\pi/2)x$ y el área del semicírculo es $(1/2)\cdot\pi(x/2)^2 = (\pi/8)\cdot x^2$.

La función a optimizar es el perímetro $P = 2h + x + (\pi/2)x$.

Relación entre las variables = Área = 16 = área rectángulo + área semicírculo = $x\cdot h + (\pi/8)\cdot x^2$, es decir $16 = x\cdot h + (\pi/8)\cdot x^2$, de donde $h\cdot x = 16 - (\pi/8)\cdot x^2$, por tanto $h = 16/x - (\pi/8)\cdot x$. Sustituyendo en el perímetro tenemos: $P(x) = 2h + x + (\pi/2)x = 2[16/x - (\pi/8)\cdot x] + x + (\pi/2)x = 32/x - (\pi/4)\cdot x + x + (\pi/2)\cdot x$.

Sabemos que si $f'(b) = 0$ y $f''(b) > 0$, $x = b$ es un mínimo relativo de $f(x)$.

Derivando tenemos: $P'(x) = 32\cdot(-1/x^2) - (\pi/4) + 1 + (\pi/2) = -32/(x^2) + 1 + (\pi/4) = -32\cdot x^{-2} + 1 + (\pi/4)$

De $P'(x) = 0$ tenemos: $-32/(x^2) + 1 + (\pi/4) = 0 \rightarrow 32/x^2 = 1 + (\pi/4) = (4 + \pi)/4$, de donde $x^2 = 128/(4 + \pi)$, con lo cual $x = \pm\sqrt{\dfrac{128}{4+\pi}}$. Como "x" es una longitud, no puede ser negativa, luego $x = +\sqrt{\dfrac{128}{4+\pi}}$ metros .

Veamos que es un mínimo.

De $P''(x) = -32\cdot(-2)\cdot x^{-2-1} + 0 + 0 = 64\cdot x^{-3} = \dfrac{64}{x^3}$, tenemos $P''\left(+\sqrt{\dfrac{128}{4+\pi}}\right) = \dfrac{64}{\left(\sqrt{\dfrac{128}{4+\pi}}\right)^3} > 0$, con lo cual

$x = +\sqrt{\dfrac{128}{4+\pi}}$ metros es un mínimo.

El valor de "x" pedido es $x = +\sqrt{\dfrac{128}{4+\pi}}$ metros.

Ejercicio 2 opción A, Junio 2017 (modelo)

Considera la región limitada por las curvas $y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$.

(a) [0'75 puntos] Esboza la gráfica de la región dada, hallando los puntos de corte de ambas curvas.

(b) [0'75 puntos] Expresa el área como una integral.

(c) [1 punto] Calcula el área.

Solución

Considera la región limitada por las curvas $y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$.

(a)

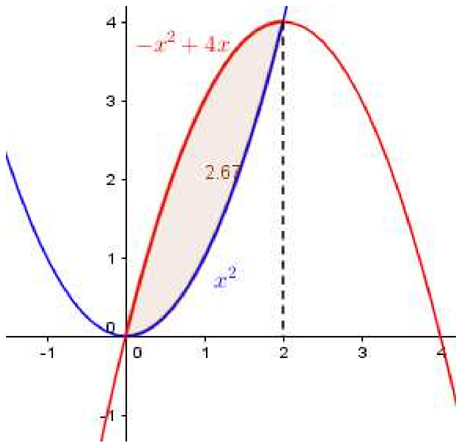
Esboza la gráfica de la región dada, hallando los puntos de corte de ambas curvas.

La gráfica de $f(x) = x^2$ es la de una parábola con las ramas hacia arriba (∪) porque el nº que multiplica a x^2 es positivo, abscisa del vértice en la solución de f '(x) = 0 = 2x, de donde x = 0 y el vértice es V(0,f(0) = (0,0). Además pasa por los puntos (-1,f(-1)) = (-1,1) y (1,f(1)) = (1,1).

La gráfica de $g(x) = - x^2 + 4x$ es la de una parábola con las ramas hacia abajo (∩) porque el nº que multiplica a x^2 es negativo, abscisa del vértice en la solución de g'(x) = 0 = -2x + 4, de donde x = 2 y el vértice es V(2,g(2)) = (2,4). Además pasa por los puntos (0,g(0)) = (0,0) y (3,g(3)) = (3,3).

Los puntos de corte de ambas curvas se obtienen resolviendo la ecuación f(x) = g(x), es decir $x^2 = - x^2 + 4x$. Tenemos $2x^2 - 4x = 0 = x\cdot(2x – 4)$, de donde x = 0 y x = 2 (serán los límites de integración), por tanto los puntos de corte de ambas curvas son (0,0) y (2,4).

Un esbozo de las gráficas es



(b)
Expresa el área como una integral.

Sabemos que elárea encerrada por dos funciones es la integral de la resta de ambas funciones, entre las abscisas de sus puntos de corte, en nuestro caso como conocemos la gráfica es:

$$\text{Área} = \int_0^2 (g(x) - f(x))dx = \int_0^2 ((-x^2 + 4x) - (x^2))dx$$

Pues sabemos que si f(x) > 0 en [a,b], $\int_a^b f(x)dx$ es el área encerrada por la gráfica de f(x), el eje OX y las abscisasa x = a y x = b, por tanto si me piden el área encerrada por dos funciones es la integral de la fución cuya gráfica está por encima menos la integral de la fución cuya gráfica está por debajo, siendo los límites de integración las abscisas de los puntos de corte de ambas gráficas.

(c)
Calcula el área.

$$\text{Área} = \int_0^2 (g(x) - f(x))dx = \int_0^2 ((-x^2 + 4x) - (x^2))dx = \int_0^2 (-2x^2 + 4x)dx = \left[\frac{-2x^3}{3} + \frac{4x^2}{2}\right]_0^2 = \left(\frac{-2\cdot(2)^3}{3} + 2(2)^2\right) - (0)\ u^2 =$$

$$= \frac{8}{3}\ u^2 \cong 2'667\ u^2$$

Ejercicio 3 opción A, Junio 2017 (modelo)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

a) [1 punto] Determina los valores de λ para que la matriz A + λI no tiene inversa (I es la matriz identidad).
b) [1'5 puntos] Resuelve AX = -3X. Determina, si existe, alguna solución con x = 1.

Solución

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

a)
Determina los valores de λ para que la matriz A + λI no tiene inversa (I es la matriz identidad).

Sea la matriz C = A + λI = $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2+\lambda \end{pmatrix}$. Sabemos una matriz C tiene inversa si su determinante (det(C)) es distinto de cero, luego la matriz C no tiene inversa si su determinante es cero.

det(C) = |C| = $\begin{vmatrix} -2+\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2+\lambda \end{vmatrix}$ $\begin{matrix}\text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{fila}\end{matrix}$ $= (-2+\lambda)\cdot\begin{vmatrix} -2+\lambda & -2 \\ -2 & 1+\lambda \end{vmatrix}$ = $(-2 + \lambda)(-2 - 2\lambda + \lambda + \lambda^2 - 4)$ =

= $(-2 + \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 6)$.

De det(C) = 0, tenemos $(-2 + \lambda) = 0$ y $(\lambda^2 - \lambda - 6) = 0$.

De $-2 + \lambda = 0$, tenemos $\lambda = 2$.

De $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$, tenemos $\lambda = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \dfrac{1 \pm 5}{2}$, con lo cual $\lambda = -2$ y $\lambda = 3$.

Si λ = 2, λ = - 2 y λ = 3, det(C) = 0, con lo cual la matriz C = A + λI, no tiene matriz inversa.

b)

Resuelve AX = -3X. Determina, si existe, alguna solución con x = 1.

De AX = -3X, tenemos AX + 3X = (A + 3I)X = O, siendo O la matriz nula.

Hemos visto en el apartado (a) que la matriz C = A + λI no tiene inversa para λ = 3

Si λ = 3, C = A + λI = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} F_2+2\cdot F_1 \approx \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, como tenemos dos filas con números distintos de cero resulta que rango(C) = rango(A + λI) = 2. Luego tendremos un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, que es un sistema compatible e indeterminado y tendrá más de una solución.

El sistema (A + 3I)X = O, es equivalente al sistema $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, es decir $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, de donde z = 0 y x = 2y. **La solución del sistema es (x,y,z) = (2a, a, 0) con a ∈ R.**

Nos preguntan si existe alguna solución con x = 1. **La respuesta es sí porque de x = 2a = 1, tenemos a = 1/2, y la solución es (x,y,z) = (1, 1/2, 0).**

Ejercicio 4 opción A, Junio 2017 (modelo)

Considera el punto P(1,-1,0) y la recta "r" dada por $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 \\ z = t \end{cases}$.

(a) [1'25 puntos] Determina la ecuación del plano que pasa por P y contiene a "r".

(b) [1'25 puntos] Halla las coordenadas del punto simétrico de P respecto a "r".

Solución

Considera el punto P(1,-1,0) y la recta "r" dada por $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 \\ z = t \end{cases}$.

(a)

Determina la ecuación del plano que pasa por P y contiene a "r".

Para un plano necesito un punto, el A (punto de la recta) y dos vectores independientes, el **u** (vector director de la recta) y el **AP**. (También se puede obtener con un punto y un vector normal).

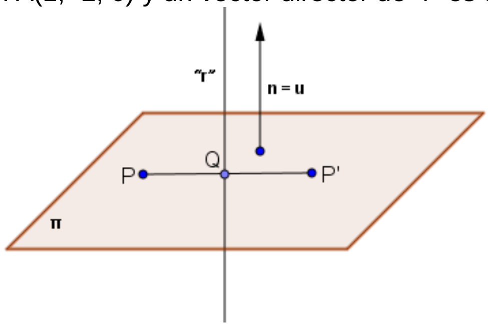
Un punto de "r" es A(1, -2, 0) y un vector director de "r" es **u** = (3,0,1).

El vector **AP** es **AP** = **p – a** = (1,-1,0) - (1, -2, 0) = (0,1, 0)

La ecuación del plano en forma vectorial es: π ≡ a + λ·u + μ·AP = (1,-2,0) + λ(3,0,1) + μ(0,1,0), con λ y μ números reales.

(b)
Halla las coordenadas del punto simétrico de P(1,-1,0) respecto a "r".

De la recta "r", tomamos el punto el A(1, -2, 0) y un vector director de "r" es **u** = (3,0,1)..



Calculamos el plano "π" perpendicular a la recta "r" por el punto P, el vector normal del plano **n** es el vector director de la recta **u** =(3,0,1).
$\pi \equiv$ **PX•n** = 0 = (x-1,y+1,z)•(3,0,1) = 3x + z - 3 = 0, donde • es el producto escalar de dos vectores

Calculamos el punto de corte Q del plano "π" con la recta "r", sustituyendo la recta en el plano:
$3\cdot(1+3t) + (t) - 3 = 0 \rightarrow 0 + 10t = 0 \rightarrow t = 0$.
El punto Q es Q(1+3(0), -2), (0)) = Q(1,-2,0).

El punto simétrico P'(x,y,z) se calcula sabiendo que el punto Q es el punto medio del segmento PP'.
(1,-2,0) = ((x+1)/2,(y-1)/2,(z+0)/2), de donde:
$1 = (x+1)/2 \rightarrow x = 1$.
$-2 = (y-1)/2 \rightarrow y = -3$.
$0 = z/2 \rightarrow z = 0$.

El simétrico P' de P respecto a la recta "r" es P'(1, -3, 0).

Opción B

Ejercicio 1 opción B, Junio 2017 (modelo)

Considera la función f definida por $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ para $x \neq 1$

(a) [1 punto] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f
(b) [1'5 puntos] Estudia y determina los intervalos de crecimiento y los intervalos de decrecimiento de f. Calcula los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan)

Solución

Considera la función f definida por $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ para $x \neq 1$

(a)
Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f

Como el denominador se anula para x = 1, si $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$ x = 1 será asíntota vertical de f(x).

Tenemos $\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+}\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right) = \dfrac{1^2}{1^+ - 1} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$, luego **la recta x = 1 es una asíntota vertical de la gráfica de f.**

Para la posición relativa $\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-}\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right) = \dfrac{1^2}{1^- - 1} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

Como la función f es una cociente de funciones polinómicas, con el numerador de grado una unidad más que el denominador, sabemos que **tiene una asíntota oblicua en + ∞, de la forma y = mx + n** con

$m = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - mx)$. También sabemos que **está asíntota oblicua es la misma en - ∞.**

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x\cdot(x-1)}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2 - x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}(1) = 1.$$

$$n = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{x - 1} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - x\cdot(x - 1)}{x - 1} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - x^2 + x}{x - 1} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{x - 1} \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{x} \right) = \lim_{x \to +\infty} (1) = 1.$$

La asíntota oblicua (A.O.) en $\pm\infty$ es la recta $y = 1\cdot x + 1 = x + 1$.

Por tener asíntotas oblicuas en $\pm\infty$, **la gráfica de f no tiene asíntotas horizontales en $\pm\infty$.**

La asíntota oblicua también se puede calcular rápidamente dividiendo numerador entre denominador, y es el cociente de la división entera.

$$\begin{array}{rl} x^2 & \mid x - 1 \\ \underline{-x^2 + x} & \;\; x+1 \\ x & \\ \underline{-x + 1} & \\ 1 & \end{array}$$

Vemos que efectivamente la asíntota oblicua es y = x + 1.

Posición relativa

Como $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - A.O.) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{x - 1} - (x+1) \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - (x + 1)\cdot(x - 1)}{x - 1} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - (x^2 - 1)}{x - 1} \right) =$

$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x - 1} \right) = \frac{1}{+\infty} = 0^+$, la *gráfica de f está por encima de la recta y = x + 1* en $+\infty$.

Como $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - A.O.) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2}{x - 1} - (x+1) \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2 - (x + 1)\cdot(x - 1)}{x - 1} \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2 - (x^2 - 1)}{x - 1} \right) =$

$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x - 1} \right) = \frac{1}{-\infty} = 0^-$, la *gráfica de f está por debajo de la recta y = x + 1* en $-\infty$.

(b)

Estudia y determina los intervalos de crecimiento y los intervalos de decrecimiento de f. Calcula los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan)

Me piden la monotonía. Estudio de f '(x)

$f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$; $f'(x) = \frac{2x\cdot(x - 1) - x^2\cdot 1}{(x - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$.

De f '(x) = 0, tenemos $x^2 - 2x = 0$ = {es cero el numerador} = $x\cdot(x - 2) = 0$, de donde x = 0 y x = 2, que serán los posibles extremos relativos.

Como $f'(-1) = \frac{(-1)^2 - 2(-1)}{(-1 - 1)^2} = \frac{3}{4} > 0$, **f es estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en $(-\infty,0)$.**

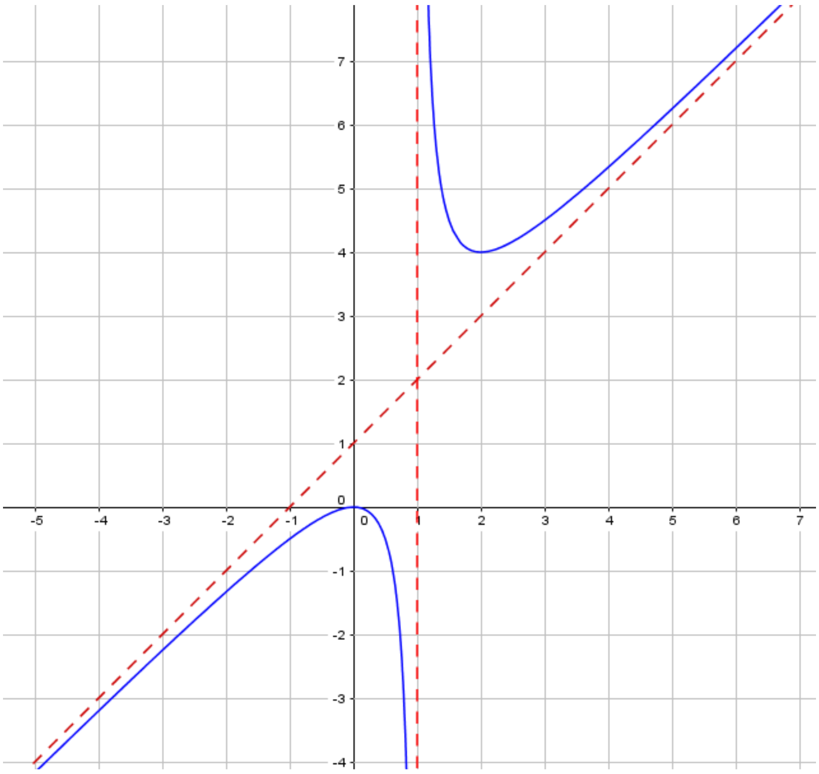
Como $f'(1'1) = \frac{(1)^2 - 2(1)}{(1'1 - 1)^2} = \frac{-1}{0'01} < 0$, **f es estrictamente decreciente** $(\searrow)$ **en $(0,2) - \{1\}$.**

Como $f'(3) = \frac{3^2 - 2(3)}{(3 - 1)^2} = \frac{3}{4} > 0$, **f es estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en $(2,+\infty)$.**

Por definición **x = 0 es un máximo relativo y vale f(0) = 0/(-1) = 0**.

Por definición **x = 2 es un mínimo relativo y vale f(2) = 4/1 = 4.**

Aunque no lo pide, un esbozo de la gráfica de f es:



Ejercicio 2 opción B, Junio 2017 (modelo)

[2'5 puntos] Calcula $\int_1^{16} \dfrac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$ (sugerencia $t = \sqrt[4]{x}$)

Solución

Calculamos primero la integral indefinida

$$I=\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{De } t=\sqrt[4]{x},\ x=t^4 \\ dx = 4t^3dt \end{array} \right\} = \int \frac{4t^3dt}{\sqrt{t^4}+\sqrt[4]{t^4}} = \int \frac{4t^3dt}{t^2+t} = \int \frac{4t^3dt}{t\cdot(t+1)} = \int \frac{4t^2dt}{t+1} = \left\{ \text{Racional } \begin{array}{r|l} 4t^2 & t+1 \\ \hline -4t^2 - 4t & 4t - 4 \\ \hline -4t & \\ 4t + 4 & \\ 4 & \end{array} \right\} =$$

$$= \int \text{Cociente} + \frac{\text{Resto}}{\text{Divisor}} = \int (4t-4)dt + \int \frac{4dt}{t+1} = 4\cdot\frac{t^2}{2} - 4t + 4\ln|t+1| + K = \left\{ \text{Quito cambio } t=\sqrt[4]{x} \right\} =$$

$$= 2\left(\sqrt[4]{x}\right)^2 - 4\cdot\sqrt[4]{x} + 4\cdot\ln|\sqrt[4]{x}+1| + K.$$

La integral pedida es:

$$\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} = \left[2\left(\sqrt[4]{x}\right)^2 - 4\cdot\sqrt[4]{x} + 4\cdot\ln|\sqrt[4]{x}+1| + K \right]_1^{16} = \left(2\left(\sqrt[4]{16}\right)^2 - 4\sqrt[4]{16} + 4\cdot h|\sqrt[4]{16}+1| \right) - \left(2\left(\sqrt[4]{1}\right)^2 - 4\cdot\sqrt[4]{1} + 4\cdot\ln|\sqrt[4]{1}+1| \right) =$$

$$= \left(2\cdot(2)^2 - 4\cdot 2 + 4\cdot\ln|2+1|\right) - \left(2\cdot(1)^2 - 4\cdot 1 + 4\cdot\ln|1+1|\right) = 2 + 4\cdot\ln|3| - 4\cdot\ln|2|.$$

Otra forma de hacerlo, cambiando a la vez los límites de integración:

$$\int_1^{16}\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} = \left\{\begin{array}{l}\text{De } t=\sqrt[4]{x},\ x=t^4 \\ dx = 4t^3dt \\ \text{Si } x=1,\ t=\sqrt[4]{1}=1 \\ \text{Si } x=16,\ t=\sqrt[4]{16}=2\end{array}\right\} = \int_1^2\frac{4t^3dt}{\sqrt{t^4}+\sqrt[4]{t^4}} = \int_1^2\frac{4t^3dt}{t^2+t} = \int_1^2\frac{4t^3dt}{t\cdot(t+1)} = \int_1^2\frac{4t^2dt}{t+1} = \left\{\text{Racional}\ \begin{array}{l|l} 4t^2 & t+1 \\ \hline -4t^2-4t & 4t-4 \\ \hline -4t & \\ \quad 4t+4 & \\ \qquad 4 & \end{array}\right\} =$$

$$= \int_1^2 \text{Cociente} + \frac{\text{Resto}}{\text{Divisor}} = \int_1^2(4t-4)dt + \int_1^2\frac{4dt}{t+1} = \left[4\cdot\frac{t^2}{2} - 4t + 4\ln|t+1|+K\right]_1^2 =$$

$$= \left(2\cdot2^2 - 4(2) + 4\ln|2+1|+K\right) - \left(2\cdot1^2 - 4(1) + 4\ln|1+1|+K\right) = 2 + 4\cdot\ln|3| - 4\cdot\ln|2|.$$

Ejercicio 3 opción B, Junio 2017 (modelo)

Sabemos que el coste de 3 lápices, 1 rotulador y 2 carpetas es de 15 euros, mientras que el de 2 lápices, 4 rotuladores y 1 carpeta es de 20 euros.

(a) [1'5 puntos] Sabiendo que 1 lápiz y 7 rotuladores cuestan 25 euros ¿podemos deducir el precio de cada uno de los artículos? Razona la respuesta.

(b) [1 punto] Si por el precio de una carpeta se pueden comprar 10 lápices ¿cuánto cuesta cada uno de los artículos?

Solución

Sabemos que el coste de 3 lápices, 1 rotulador y 2 carpetas es de 15 euros, mientras que el de 2 lápices, 4 rotuladores y 1 carpeta es de 20 euros.

(a)

Sabiendo que 1 lápiz y 7 rotuladores cuestan 25 euros ¿podemos deducir el precio de cada uno de los artículos? Razona la respuesta.

x = Precio de un lápiz.
y = Precio de un rotulador.
z = Precio de una carpeta.

De "el coste de 3 lápices, 1 rotulador y 2 carpetas es de 15 euros" $\rightarrow$ $3x + 1y + 2z = 15$
De "el de 2 lápices, 4 rotuladores y 1 carpeta es de 20 euros" $\rightarrow$ $2x + 4y + 1z = 20$
De "1 lápiz y 7 rotuladores cuestan 25 euros" $\rightarrow$ $1x + 7y = 25$

Intentamos resolver el sistema $\left\{\begin{array}{ll} 3x + y + 2z = 15 & (F_1-3F_3) \\ 2x + 4y + z = 20 & (F_2-2F_3) \\ x + 7y \quad = 25 & \end{array}\right. \approx \left\{\begin{array}{ll} 0 - 20y + 2z = -60 & (F_1-2F_2) \\ 0 - 10y + z = -30 & \\ x + 7y \quad = 25 & \end{array}\right. \approx$

$\approx \left\{\begin{array}{l} 0 + 0 + 0 \quad = 0 \\ 0 - 10y + z = -30 \\ x + 7y \quad = 25 \end{array}\right.$. Tenemos un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, que es compatible e indeterminado y tiene más de una solución.

$\left\{\begin{array}{l} -10y + z = -30 \\ x + 7y \quad = 25 \end{array}\right.$. Tomando $y = \lambda \in R$, tenemos $x = 25 - 7\lambda$ y $z = -30 + 10\lambda$.

Las soluciones del sistema son $(x,y,z) = (25 - 7\lambda, \lambda, -30 + 10\lambda)$ con $\lambda \in R$, por tanto no podemos deducir el precio de cada artículo y algunos son absurdos, por ejemplo si $\lambda = 0$, la solución es $(x,y,z) = (25, 0, -30)$, es decir una carpeta costaría –30 euros.

(b)

Si por el precio de una carpeta se pueden comprar 10 lápices ¿cuánto cuesta cada uno de los artículos?

De "el coste de 3 lápices, 1 rotulador y 2 carpetas es de 15 euros" $\rightarrow$ $3x + 1y + 2z = 15$
De "el de 2 lápices, 4 rotuladores y 1 carpeta es de 20 euros" $\rightarrow$ $2x + 4y + 1z = 20$
De "el precio de una carpeta se pueden comprar 10 lápices" $\rightarrow$ $z = 10x$

Intentamos resolver el sistema $\begin{cases} 3x + y + 2z = 15 \\ 2x + 4y + z = 20 \\ \qquad\qquad z = 10x \end{cases} \approx \begin{cases} 3x + y + 2z = 15 \;\; (F_1\text{-}2F_3) \\ 2x + 4y + z = 20 \;\; (F_2\text{-}F_3) \\ -10x + \quad z = 0 \end{cases} \approx$

$\approx \begin{cases} 23x + y + 0 = 15 \\ 12x + 4y + 0 = 20 \;\; (F_2/4) \\ -10x + \quad z = 0 \end{cases} \approx \begin{cases} 23x + y + 0 = 15 \;\; (F_1 - F_2) \\ 3x + y + 0 = 5 \\ -10x + \quad z = 0 \end{cases} \approx \begin{cases} 20x + 0 + 0 = 10 \\ 3x + y + 0 = 5 \\ -10x + \quad z = 0 \end{cases}$, de donde x =10/20 = 1/2 = 0'5,

y = 5 – 3·(1/2) = 7/2 = 3'5 y z = 10·(1/2) = 5.

Resumiendo (x,y,z) = (0'5, 3'5, 5), es decir un lápiz vale 0'5 euros, un rotulador 3'5 euros y una carpeta 5 euros.

Ejercicio 4 opción B, Junio 2017 (modelo)

Sean los vectores **u** = (1,0,1), **v** = (0,2,1) y **w** = (m,1,n).
(a) [1'25 puntos] Halla m y n sabiendo que **u**, **v** y **w** son linealmente dependientes y que **w** es ortogonal a **u**.
(b) [1'25 puntos] Para n = 1, halla los valores de m para que el tetraedro determinado **u**, **v** y **w** tenga volumen 10 unidades cúbicas**.**

Solución

Sean los vectores **u** = (1,0,1), **v** = (0,2,1) y **w** = (m,1,n).
(a)
Halla m y n sabiendo que **u**, **v** y **w** son linealmente dependientes y que **w** es ortogonal a **u**.

Los vectores **u**, **v** y **w** son linealmente dependientes si y solo si det(**u**,**v**,**w**) = 0

det(**u**,**v**,**w**) = $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ m & 1 & n \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila = 1·(2n – 1) – 0 + 1·(0 – 2m) = 2n – 2m - 1 = 0.

Si los vectores son ortogonales su producto escalar (•) es cero.
u•w = (1,0,1) (m,1,n) = m + n = 0**.**

Resolvemos el sistema $\begin{cases} 2n - 2m - 1 = 0 \;\; (F_1+2F_2) \\ n + m \qquad = 0 \end{cases} \approx \begin{cases} 4n + 0 - 1 = 0 \\ n + m \qquad = 0 \end{cases}$, de donde **n = 1/4 y m = -1/4**.

(b)
Para n = 1, halla los valores de m para que el tetraedro determinado **u**, **v** y **w** tenga volumen 10 unidades cúbicas**.**

Sabemos que el volumen de un tetraedro es 1/6 del volumen del paralelepípedo que determinan los vectores **u**, **v** y **w**, el cual es el valor absoluto (lo notaremos | |) del producto mixto (lo notaremos con corchetes [ ]) de los tres vectores **u**, **v** y **w**.

Tenemos, volumen = 10 = (1/6)·| [**u**, **v** y **w**] | = (1/6)·|det(**u**,**v**,**w**)| = $(1/6)\cdot\left|\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix}\right.$ Adjuntos primera fila $\Big|$ =

= (1/6)·|1·(2 – 1) – 0 + 1·(0 – 2m)| = (1/6)·|1 – 2m|.

Tenemos la ecuación 10 = (1/6)·|1 – 2m|, es decir |1 – 2m| = 60, que nos dan dos ecuaciones:
+(1 – 2m) = 60 y – (1 – 2m) = 60.

De +(1 – 2m) = 60 $\rightarrow$ -59 = 2m, luego **m = -59/2.**
De – (1 – 2m) = 60 $\rightarrow$ 2m = 61, luego **m = 61/2.**