Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo 3 Junio Colisiones 2016

[2'5 puntos] Sabiendo que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(\pi x)\cdot(1 + a\cdot\cos(\pi x))}{\text{sen}(x^2)}$ es finito, calcula "a" y el valor del límite.

Solución

Sabiendo que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(\pi x)\cdot(1 + a\cdot\cos(\pi x))}{\text{sen}(x^2)}$ es finito, calcula "a" y el valor del límite.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\pi x)\cdot(1 + a\cdot\cos(\pi x))}{\text{sen}(x^2)} = \frac{\cos(0)\cdot(1 + a\cdot\cos(0))}{\text{sen}(0)} = \frac{1\cdot(1 + a\cdot 1)}{0} = (1 + a)/0.$$

Como me dicen que el límite es finito, **el numerador ha de ser cero,** para obtener 0/0 y poder aplicarle la regla de L'Hôpital, puesto que el límite es finito, es decir es un número.
Igualando el numerador a cero, tenemos $1 + a = 0$, de donde **a = - 1**.

Le aplicamos la regla de L'Hôpital (L'H) con a = - 1. (si "f" y "g" son funciones continuas en $[a - \delta, a + \delta]$, derivables en
$(a - \delta, a + \delta)$, verificando que $f(a) = g(a) = 0$ y $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, entonces si existe $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$. La regla es válida si tenemos ∞/∞, y también si $x\to\infty$), con lo cual tenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\pi x)\cdot(1 - 1\cdot\cos(\pi x))}{\text{sen}(x^2)} = (0/0;\text{L'H}) = \lim_{x\to 0} \frac{-\text{sen}(\pi x)\cdot\pi\cdot(1 - 1\cdot\cos(\pi x)) + \cos(\pi x)\cdot(0 - 1\cdot(-\text{sen}(\pi x)\cdot\pi)}{\cos(x^2)\cdot 2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\pi\cdot\text{sen}(\pi x)\cdot(-1 + \cos(\pi x) + \cos(\pi x))}{\cos(x^2)\cdot 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\pi\cdot\text{sen}(\pi x)\cdot(-1 + 2\cdot\cos(\pi x))}{2x\cdot\cos(x^2)} =$$

$$= \frac{\pi\cdot\text{sen}(0)\cdot(-1 + 2\cdot\cos(0))}{0\cdot\cos(0)} = (0/0;\text{L'H}) = \lim_{x\to 0} \frac{\pi\cdot\cos(\pi x)\cdot\pi\cdot(-1 + 2\cdot\cos(\pi x)) + \pi\cdot\text{sen}(\pi x)\cdot(-2\cdot\text{sen}(\pi x)\cdot\pi)}{2\cdot\cos(x^2) + 2x\cdot(-\text{sen}(x^2)\cdot 2x} =$$

$$\frac{\pi\cdot\cos(0)\cdot\pi\cdot(-1 + 2\cdot\cos(0)) + \pi\cdot\text{sen}(0)\cdot(-2\cdot\text{sen}(0)\cdot\pi)}{2\cdot\cos(0) + 0\cdot(-\text{sen}(0)\cdot 0} = (\pi^2\cdot(-1 + 2) + 0) / (2 + 0) = \pi^2/2$$

Resumiendo **el valor de a es -1** y **el valor del límite es $\pi^2/2$**.

Ejercicio 2 opción A, modelo 3 Junio Colisiones 2016

Considera la función *f* dada por $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{\ln(x)}{x}$ para $x > 0$.

a) [1'5 puntos] Halla todas las primitivas de *f*.

b) [0'5 puntos] Halla $\int_1^3 f(x)\cdot dx$

c) [0'5 puntos] Determina la primitiva de *f* que toma el valor 3 para x = 1.

Solución

Considera la función *f* dada por $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{\ln(x)}{x}$ para $x > 0$.

a)
Halla todas las primitivas de *f*.

Calculamos por separado la integral de $\sqrt{x}$ y la de $\dfrac{\ln(x)}{x}$.

$$I_1 = \int \sqrt{x}\cdot dx = \int x^{1/2}\cdot dx = \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} = \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2\sqrt{x^3}}{3}$$

$$I_2 = \int \frac{\ln(x)}{x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \ln(x) = t \rightarrow \dfrac{dx}{x} = dt \end{array} \right\} = \int t\cdot dt = \frac{t^2}{2} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Quito cambio} \\ \ln(x) = t \end{array} \right\} = \frac{(\ln(x))^2}{2}$$

Juntando ambas integrales tenemos que el conjunto de todas las primitivas es:

$$F(x) = \int f(x)dx = \int \left(\sqrt{x} + \frac{\ln(x)}{x} \right) dx = I_1 + I_2 = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + \frac{(\ln(x))^2}{2} + K .$$

b)

Halla $\int_1^3 f(x)\cdot dx = \left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + \frac{(\ln(x))^2}{2}\right]_1^3 = \left(\frac{2\sqrt{3^3}}{3} + \frac{(\ln(3))^2}{2}\right) - \left(\frac{2\sqrt{1^3}}{3} + \frac{(\ln(1))^2}{2}\right) = 2\sqrt{3} + \frac{(\ln(3))^2}{2} - \frac{2}{3}$

c)

Determina la primitiva de *f* que toma el valor 3 para x = 1.

El conjunto de todas las primitivas es $F(x) = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + \frac{(\ln(x))^2}{2} + K$, como F(1) = 3 tenemos:

$3 = \frac{2\sqrt{1^3}}{3} + \frac{(\ln(1))^2}{2} + K$ = 2/3 + K, de donde K = 3 - 2/3 = 7/3, y la primitiva pedida es:

$F(x) = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + \frac{(\ln(x))^2}{2} + \frac{7}{3}$.

Ejercicio 3 opción A, modelo 3 Junio Colisiones 2016

[2'5 puntos] Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Determina, si existe, la matriz X que verifica $AX + B^2 = BX + A^2$.

Solución

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determina, si existe, la matriz X que verifica ;

De $AX + B^2 = BX + A^2$, tenemos $AX - BX = A^2 - B^2$., de donde (sacamos factor común por la derecha):
$(A - B)\cdot X = A^2 - B^2$

Llamamos $C = A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Como $\det(C) = |A| = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 = 2 \neq 0$, existe la matriz inversa $C^{-1} = \frac{1}{|C|}\cdot Adj(C^t)$.

$(A - B)\cdot X = A^2 - B^2 \rightarrow C\cdot X = A^2 - B^2$. Multiplicando por la izquierda la expresión $C\cdot X = A^2 - B^2$ por C^{-1}, tenemos:

$C^{-1}\cdot C\cdot X = C^{-1}\cdot(A^2 - B^2) \rightarrow I\cdot X = C^{-1}\cdot(A^2 - B^2) \rightarrow$ $\mathbf{X = C^{-1}\cdot(A^2 - B^2)}$.

$C^{-1} = \frac{1}{|C|}\cdot Adj(C^t)$; $|C| = 2$; $C^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; luego $C^{-1} = \frac{1}{|C|}\cdot Adj(C^t) = (1/2)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Luego $\mathbf{X = C^{-1}\cdot(A^2 - B^2)} = (1/2)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = (1/2)\cdot\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4 opción A, modelo 3 Junio Colisiones 2016

Considera un paralelogramo de vértices consecutivos A, B, C y D siendo
A(1,0,-1), B(3,2,1) y C(-7,1,5).

(a) [0’75 puntos] Determina las coordenadas del punto D.
(b) [1 punto] Calcula el área del paralelogramo.
(c) [0’75 puntos] Halla la ecuación general del plano que contiene al paralelogramo.

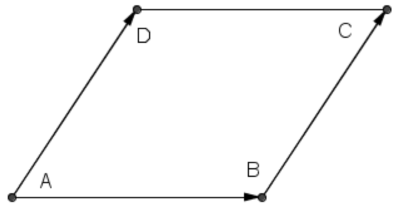
Solución

Considera un paralelogramo de vértices consecutivos A, B, C y D siendo
A(1,0,-1), B(3,2,1) y C(-7,1,5).

(a)

Determina las coordenadas del punto D.

La siguiente figura nos ayudará.



Si A, B, C y D son los vértices consecutivos de un paralelogramo, sabemos que los vectores **AD** y **BC** son iguales (son equipolentes y tienen las mismas coordenadas).

A(1,0,-1), B(3,2,1) y C(-7,1,5).

De **AD** = **BC**, tenemos (x - 1, y - 0, z + 1) = (-7 - 3, 1 - 2, 5 - 1). Igualando miembro a miembro tenemos:
x = -10+1 = -9; y = -1 z = 3, luego **el punto pedido es D(-9,-1,3)**.

(b)

Calcula el área del paralelogramo.

Sabemos que el área de un paralelogramo es el módulo (|| ||) del producto vectorial (x) de dos vectores que lo determinan. Podemos tomar los vectores **AD** y **AB**.

AD = (-9-1,-1-0,3+1) = (-10,-1,4); **AB** = (3-1,2-0,1+1) = (2,2,2)

$$\mathbf{AD}\times\mathbf{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -10 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{array} = \mathbf{i}(-2-8) - \mathbf{j}(-20-8) + \mathbf{k}(-20+2) = (-10,28,-18).$$

Área paralelogramo = || **AD**x**AB** || **= $\sqrt{(10^2 + 28^2 + 18^2)} = \sqrt{(1208)}$ u^2 ≅ 34'756 u^2**.

(c)

Halla la ecuación general del plano que contiene al paralelogramo.

Para un plano necesito un punto el A(1,0,-1), y dos vectores independientes, el **AD** = (-10,-1,4) y el **AB** = (2,2,2)

La ecuación general del plano pedida es det(**AX,AD,AB**) = 0, siendo X(x,y,z) un punto genérico del plano.

$$\pi \equiv \det(\mathbf{AX},\mathbf{AD},\mathbf{AB}) = 0 = \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ -10 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{array} = (x-1)\cdot(-2-8) - y\cdot(-20-8) + (z+1)\cdot(-20+2) =$$

= -10x + 10 + 28y - 18z - 18 = 0 = -10x + 28y - 18z - 8 = 0 = -5x + 14y - 9z - 4 = 0.

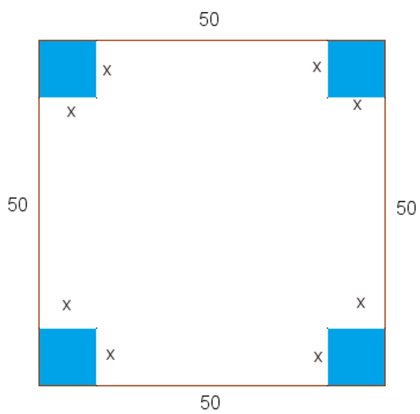
Opción B

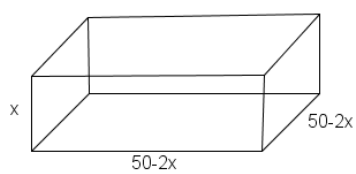
Ejercicio 1 opción B, modelo 3 Junio Colisiones 2016

[2'5 puntos] Se dispone de un cartón cuadrado de 50 cm de lado para construir una caja sin tapadera a partir del cartón. Para ello, se corta un cuadrado de x cm de lado en cada una de las esquinas. Halla el valor de x para que el volumen de la caja sea máximo y calcula dicho volumen.

Solución

La siguiente figura nos ayudará:





Si recortamos cuadrados de lado x en las esquinas y formamos una caja sin tapa, vemos que la caja tiene de largo 50 – 2x, ancho 50 – 2x y alto x.

Función a Optimizar: Volumen = V(x) = largo x ancho x alto = $(50 - 2x)^2 \cdot x = (4x^2 - 200x + 2500)\cdot x =$
$= 4x^3 - 200x^2 + 2500x$

Sabemos que si g '(a) = 0 y g ''(a) < 0, x = a es un máximo relativo de g(x)
Sabemos que si g '(a) = 0 y g ''(a) > 0, x = a es un mínimo relativo de g(x)

$V(x) = 4x^3 - 200x^2 + 2500x$; $V'(x) = 12x^2 - 400x + 2500$

De V '(x) = 0, tenemos $12x^2 - 400x + 2500 = 0 = 3x^2 - 100x + 625 = 0$.

$x = \frac{100 \pm \sqrt{100^2 - 7500}}{6} = \frac{100 \pm \sqrt{2500}}{6} = \frac{100 \pm 50}{6}$, de donde x = 150/6 = 25 y x = 50/6 = 25/3 ≅ 8'333.

La solución x = 25 cm no sirve, pues si recortamos cuadrados en las esquinas de 25 cm nos quedamos sin el cartón de 50 cm de lado.

El único valor válido es x = 25/3 ≅ 8'333 cm.

Veamos que es máximo.
$V'(x) = 12x^2 - 400x + 2500$; $V''(x) = 24x - 400$
Como V ''(25/3) = 24(25/3) – 400 = -200 < 0, luego *x = 25/3 ≅ 8'333 cm es un máximo relativo*.

El volumen pedido es $V(25/3) = (50 - 2(25/3))^2\cdot(25/3) = 250000/27\ cm^3 \cong 9259'259\ cm^3$.

Ejercicio 2 opción B, modelo 3 Junio Colisiones 2016

[2'5 puntos] Sea f: R → R la función dada por $f(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f*, el eje de abscisas y las rectas x = 0 y x = 1.

Solución

Sea f: R → R la función dada por $f(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f*, el eje de abscisas y las rectas x = 0 y x = 1.

La función f(x) está definida en todo R, el denominador siempre es positivo, para x = 0, f(0) = 0 y para x = 3, $f(3) = \frac{2(3)}{(3^2+1)^2}$ = 6/100 > 0, por tanto el área pedida es $\int_0^1 f(x)\cdot dx$.

Calculo primero la integral indefinida.

$$\int f(x)dx = \int \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx = \left\{\begin{matrix}\text{Cambio de variable} \\ x^2+1 = t \ \rightarrow\ 2x\cdot dx = dt\end{matrix}\right\} = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2}\cdot dt = \frac{t^{-2+1}}{-2+1} = \frac{-1}{t} = \left\{\begin{matrix}\text{Quito cambio} \\ x^2+1=t\end{matrix}\right\} = \frac{-1}{x^2+1}$$

Luego el área pedida es: **Área =** $\int_0^1 f(x)\cdot dx = \left[\frac{-1}{x^2+1}\right]_0^1 = \left(\frac{-1}{1^2+1}\right) - \left(\frac{-1}{0^2+1}\right)$ = **(-1/2 + 1) u^2 = 1/2 u^2**.

Ejercicio 3 opción B, modelo 3 Junio Colisiones 2016

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\left\{\begin{matrix} x + \lambda y + z = \lambda \\ \lambda x + y + z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1\end{matrix}\right.$,

a) [1'75 puntos] Determina, si existen, los valores de λ para los que el sistema tiene infinitas soluciones.
b) [0'75 puntos] Resuelve el sistema para λ = - 2.

Solución

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\left\{\begin{matrix} x + \lambda y + z = \lambda \\ \lambda x + y + z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1\end{matrix}\right.$,

a)
Determina, si existen, los valores de λ para los que el sistema tiene infinitas soluciones.

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$.

Como me piden los valores de λ para los que el sistema tiene infinitas soluciones, se tiene que cumplir que rango(A) = rango(A*) < 3 (número de incógnitas).

$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila $= (1)\cdot(\lambda - 1) - \lambda\cdot(\lambda^2 - 1) + 1\cdot(\lambda - 1) =$

$= (\lambda - 1) - \lambda\cdot(\lambda + 1)\cdot(\lambda - 1) + (\lambda - 1) = (\lambda - 1)\cdot(1 - \lambda\cdot(\lambda + 1) + 1)) = (\lambda - 1)\cdot(- \lambda^2 - \lambda + 2)$.

De $|A| = 0$, tenemos $\lambda - 1 = 0$ y $- \lambda^2 - \lambda + 2 = 0$.

Si $\lambda - 1 = 0$, resulta $\lambda = 1$.

Si $- \lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \rightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \rightarrow \lambda = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2}$, de donde $\lambda = 1$ y $\lambda = -2$.

Resumiendo las soluciones de $|A| = 0$ son $\lambda = 1$ (doble) y $\lambda = -2$.

Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -2$, $|A| \neq 0$, *rango(A) = rango(A*) = 3 = número de incógnitas*. **NO ES NUESTRO CASO**

Si λ **= 1** tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

En A tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, por tanto *rango(A) = 1*, pues sólo queda una fila con números distinto de cero.

En A* tenemos $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, por tanto *rango(A*) = 1*, pues sólo queda una fila con números distinto de cero.

Como rango(A) = rango(A) = 1 < 3 (número de incógnitas), el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.* **SI ES NUESTRO CASO**,

Si λ **= -2** tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = - 3 \neq 0$, rango(A) = 2.

En A^* formamos el menor de orden 3 con las columnas 1ª, 2ª y 4ª. Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, por tener dos columnas iguales, tenemos rango(A*) = 2**.**

Como rango(A) = rango(A) = 2 < 3 (número de incógnitas), el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.* **SI ES NUESTRO CASO**,

b)

Resuelve el sistema para $\lambda = - 2$.

Hemos visto que λ **= -2, rango(A) = rango(A*) = 2 < número de incógnitas, por tanto es un sistema compatible e indeterminado con infinitas soluciones.** Tomamos sólo las dos primeras ecuaciones puesto que el rango es dos, las dos primeras que son con los que he formado el menor de orden 2 distinto de 0 de la matriz A.

$\begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ -2x + y + z = 1.\ F_2 - F_1 \end{cases} \approx \begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ -3x + 3y = 3.\ F_2/3 \end{cases} \approx \begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ -x + y = 1 \end{cases}$. Tomando x = b ∈ R, resulta y = 1 + b y entrando en la primera ecuación, (b) - 2(1+b) + z = -2 → b - 2 - 2b + z = -2 → z = b.

Las infinitas soluciones del sistema son **(x,y,z) = (b, 1 + b, b)** con b ∈ R.

Ejercicio 4 opción B, modelo 3 Junio Colisiones 2016

Considera el punto P(1,0,-1) y el plano π de ecuación 2x - y + z + 1 = 0.

(a) [1'25 puntos] Halla el simétrico del punto P respecto al plano π.

(b) [1'25 puntos] Determina la ecuación del plano que contiene al punto P, es perpendicular al plano π y es paralelo a la recta dada por $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$.

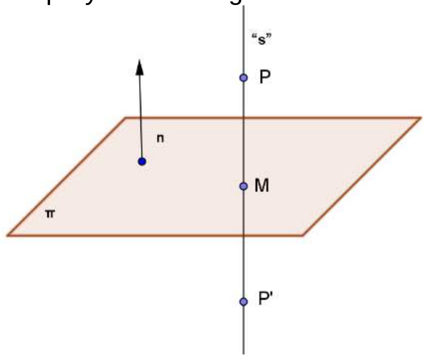
Solución

Considera el punto P(1,0,-1) y el plano π de ecuación 2x - y + z + 1 = 0.

(a)

Halla el simétrico del punto P respecto al plano π.

Calculamos la recta "s" perpendicular (⊥), al plano π (el vector director **u** de la recta "s" es el vector normal **n** del plano π) por el punto P. Determinamos M = s∩π, y M es el punto medio del segmento PP', donde P' es el simétrico pedido, puesto que M es la proyección ortogonal de P sobre π.



s(P;**u**) = s(P;**n**) con P(1,0,-1) y **n** = (2,-1, 1).

Su ecuación vectorial es s ≡ (x,y,z) = (1+2b,-b,-1+b) con b ∈ R.

M = s∩π, sustituimos la ecuación de la recta en el plano y obtenemos el parámetro "b", y luego el punto M.

→ 2(1+2b) - (-b) + (-1+b) + 1 = 0 = 6b + 2, de donde b = -1/3, y el punto M es

M(1+2(-1/3),- (-1/3),-1+(-1/3)) = M(1/3,1/3,-4/3).

M es el punto medio del segmento PP', donde P' es el simétrico pedido.

(1/3,1/3,-4/3) = ((1+x)/2,(0+y)/2,(-1+z)/2), de donde x = 2/3 - 1 = -1/3, y = 2/3, z = -8/3 + 1 = -5/3.

El simétrico pedido es P'(-1/3, 2/3, -5/3).

(b)

Determina la ecuación del plano π' que contiene al punto P, es perpendicular al plano π y es paralelo a la recta dada por $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$.

Ponemos la recta "r" ≡ $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$ en paramétricas. r ≡ $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 \end{cases}$ con λ ∈ R.

Un vector director de "r" es **v** = (2,1,0).

Como el plano π' es perpendicular al plano π, su vector normal **n'** es perpendicular al vector normal **n** del plano π.

Como el plano π' es paralelo a la recta "r", su vector normal **n'** es perpendicular al vector director **v** de la recta "r".

Tenemos que **n'** es perpendicular a la vez a los vectores **n** y **v**, por tanto podemos tomar como vector **n'** el vector producto vectorial (x) de los vectores **n** y **v**.

Tenemos **n** = (2,-1,1); **v** = (2,1,0), luego **n'** = **nxv** = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila = **i**(0-1) - **j**(0-2) + **k**(2+2) =

= (-1,2,4) = **n'.**

P(1,0,-1)

El plano pedido es π' ≡ **PX•n'** = 0, donde X es punto cualquiera del plano y (•) el producto escalar.

π' ≡ **PX•n'** = 0 = (x-1,y,z+1)•(-1,2,4) = -x+1+2y+4z+4 **= -x + 2y +4z + 5 = 0**