EMESTRADA
EXÁMENES DE
SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2020

MATEMÁTICAS II

TEMA 2: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Junio, Ejercicio 7
- Reserva 1, Ejercicio 7
- Reserva 2, Ejercicio 3
- Reserva 3, Ejercicio 3
- Reserva 4, Ejercicio 3
- Septiembre, Ejercicio 3
- Septiembre, Ejercicio 7

Considera $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\4&1&4\end{pmatrix}$ **;** $B=\begin{pmatrix}a\\2a\\3a\end{pmatrix}$ **y** $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

a) (1'25 puntos) Discute el sistema dado por $AX=B$, según los valores de a.

b) (1'25 puntos) Para $a=0$, resuelve el sistema dado por $AX=B$. Calcula, si es posible, , una solución en la que $y+z=4$.

MATEMÁTICAS II. 2020. JUNIO. EJERCICIO 7.

R E S O L U C I Ó N

a) $AX=B\Rightarrow \left.\begin{array}{r}x+y+z=\ \ a\\ x+z=2a\\ 4x+y+4z=3a\end{array}\right\}$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes.

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&1\\4&1&4\end{vmatrix}=4+1-4-1=0\Rightarrow Rango\ (A)=2,\ \text{ ya que } \begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}=-1\neq 0$$

Calculamos el determinante:

$$\begin{vmatrix}1&1&a\\1&0&2a\\4&1&3a\end{vmatrix}=8a+a-3a-2a=4a=0\Rightarrow a=0$$

	R(A)	R(M)	
$a=0$	2	2	S. Compatible indeterminado
$a\neq 0$	2	3	S. Incompatible

b) Para $a=0$, el sistema es: $\left.\begin{array}{r}x+y+z=0\\ x+z=0\end{array}\right\}\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}x=-t\\ y=0\\ z=t\end{array}\right.$

Veamos si es posible que una solución sea: $y+z=4\Rightarrow x+4=0\Rightarrow x=-4$

Luego, la solución es $x=-4$; $y=0$; $z=4$

(2'5 puntos) Siendo λ un número real, considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas $\left.\begin{array}{r} x+\lambda y=2 \\ 2x+4y=1 \\ \lambda x+y=2\lambda \end{array}\right\}$

Discútelo según los valores de λ y resuélvelo cuando sea posible.

MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 1. EJERCICIO 7

R E S O L U C I Ó N

Calculamos el determinante de la matriz ampliada del sistema y lo igualamos a cero

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ \lambda & 1 & 2\lambda \end{vmatrix} = 8\lambda+\lambda^2+4-8\lambda-4\lambda^2-1=0 \Rightarrow -3\lambda^2+3=0 \Rightarrow \lambda=-1\ ;\ \lambda=1$$

A continuación, calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

Para $\lambda=1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2,\ ya\ que \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=2\neq 0$

Para $\lambda=1 \Rightarrow M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=2,\ ya\ que \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=2\neq 0$

Para $\lambda=-1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2,\ ya\ que \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=6\neq 0$

Para $\lambda=-1 \Rightarrow M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=2,\ ya\ que \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=6\neq 0$

	R(A)	R(M)	
$\lambda=1$	2	2	S. Compatible determinado
$\lambda=-1$	2	2	S. Compatible determinado
$\lambda\neq -1,1$	2	3	S. Incompatible

Lo resolvemos para $\lambda=1$. El sistema es $\left.\begin{array}{r} x+y=2 \\ 2x+4y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x=\dfrac{7}{2}\ ;\ y=-\dfrac{3}{2}$

Lo resolvemos para $\lambda=-1$. El sistema es $\left.\begin{array}{r} x-y=2 \\ 2x+4y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x=\dfrac{3}{2}\ ;\ y=-\dfrac{1}{2}$

Considera el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=a^2 \end{array}\right\}$

a) (1'75 Puntos). Discútelo según los valores de *a*.

b) (0'75 Puntos). Resuelve, si es posible, el sistema para $a=1$ y $a=-2$.

MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 2. EJERCICIO 3

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3+1+1-a-a-a=a^3-3a+2=0 \Rightarrow a=1 \; ; \; a=-2$$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la ampliada y hacemos la discusión del sistema.

Para $a=1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=1$

Para $a=1 \Rightarrow M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=1$

Para $a=-2 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2, \; ya \; que \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=3\neq 0$

Para $a=-2 \Rightarrow M=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=3, \; ya \; que \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}=9\neq 0$

	R(A)	R(M)	
$a=1$	1	1	Sistema compatible indeterminado
$a=-2$	2	3	Sistema incompatible
$a\neq 1 \; y \; -2$	3	3	Sistema compatible determinado

b) Resolvemos el sistema para $a=1$. El sistema es

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x+y+z=1\} \Rightarrow x=1-\lambda-\mu \; ; \; y=\lambda \; ; \; z=\mu$$

Para $a=-2$ el sistema es incompatible y no tiene solución.

Considera $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ **y** $C=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) (0'75 Puntos) Determina los valores de m para los que $A\cdot B$ no tiene inversa.
b) (0'75 Puntos) Determina los valores de m para los que $B\cdot A$ no tiene inversa.
b) (1 Punto) Para $m=0$, resuelve, si es posible, el sistema dado por $B\cdot A\cdot X=C$ y halla una solución en la que $x+y+z=0$.
MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 3. EJERCICIO 3

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz $A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & m+1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$|A\cdot B|=\begin{vmatrix} 2 & m+1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=2-2m-2=-2m=0\Rightarrow m=0$$

Luego, no tiene inversa para $m=0$.

b) Calculamos la matriz $B\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2+m & -1 & -1+m \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$|B\cdot A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2+m & -1 & -1+m \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-4-3+3m-2+m+3+4-2m+2-2m=0$$

Luego, no tiene inversa para cualquier valor de *m*, ya que el determinante siempre vale 0.

c) El sistema es: $B\cdot A\cdot X=C\Rightarrow\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{aligned} 2x+y+z&=2 \\ -2x-y-z&=-2 \\ 3x+y+2z&=3 \end{aligned}\right\}$

Resolvemos el sistema por Gauss

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\xrightarrow[2F_3-3F_1]{F_2+F_1}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{aligned} 2x+y+z&=2 \\ -y+z&=0 \end{aligned}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{aligned} x&=1-t \\ y&=t \\ z&=t \end{aligned}\right.$$

Nos piden una solución en la que $x+y+z=0$, luego:

$$1-t+t+t=0\Rightarrow t=-1\Rightarrow(2,-1,-1)$$

Considera el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{aligned} -my+z&=\ \ 1 \\ 5x+2y+mz&=\ \ 0 \\ my+(m-3)z&=-3 \end{aligned}\right.$

a) (1'25 Puntos). Discute el sistema en función de m.

b) (1'25 Puntos). Para $m=0$, resuelve el sistema. Calcula, si es posible, una solución en la que $y=5$.

MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 4. EJERCICIO 3

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & -m & 1 \\ 5 & 2 & m \\ 0 & m & m-3 \end{vmatrix}=5m+5m^2-15m=5m^2-10m=0 \Rightarrow m=0\ ;\ m=2$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

Para $m=0 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$ ya que $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-2\neq 0$

$M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=2$, ya que al añadir la columna de los términos independientes es igual a la columna de los coeficientes de *z*, por lo tanto, tiene el mismo rango que *A*

Para $m=2 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$ ya que $\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}=10\neq 0$

$M=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=3$ ya que $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}=-20\neq 0$

	R(*A*)	R(*M*)	
$m=0$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$m=2$	2	3	S. Incompatible
$m\neq 0,\ y\ \ 2$	3	3	S. Compatible Determinado

b) $m=0 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

$$\left.\begin{aligned} z&=1 \\ 5x+2y&=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x&=t \\ y&=-\frac{5t}{2} \\ z&=1 \end{aligned}\right.$$

Si $y=5 \Rightarrow t=-2 \Rightarrow x=-2\ ;\ y=5\ ;\ z=1$

Considera el sistema de ecuaciones dado por $AX = B$ siendo:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ m & 4 & -2 \\ 0 & m+2 & -3 \end{pmatrix} \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix} 2 \\ 2m \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) (1'5 puntos) Discute el sistema según los valores de m.
b) (1 punto) Para $m=-2$, ¿existe alguna solución con $z=0$?. En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.
MATEMÁTICAS II. 2020. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ m & 4 & -2 \\ 0 & m+2 & -3 \end{vmatrix} = -12+m^2+2m-6m+2m+4 = m^2-2m-8 \Rightarrow m=4 \;\; y \;\; m=-2$$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la ampliada y hacemos la discusión del sistema.

Para $m=4 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2, \; ya \; que \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$

Para $m=4 \Rightarrow M=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & 6 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=3, \; ya \; que \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & 8 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$

Para $m=-2 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2, \; ya \; que \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$

Para $m=-2 \Rightarrow M=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=2, \; ya \; que \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

	R(A)	R(M)	
$m=4$	2	3	Sistema incompatible
$m=-2$	2	2	Sistema compatible indeterminado
$m \neq 4 \; y \; -2$	3	3	Sistema compatible determinado

b) Para $m=-2$, el sistema que tenemos que resolver es:

$$\left.\begin{aligned} x-2y+z&=2\\ -2x+4y-2z&=-4\\ -3z&=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} x-2y+z&=2\\ -3z&=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=2+2t-z=\dfrac{7}{3}+2t\\ y=t\\ z=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

No existe ninguna solución con z = 0.

Considera $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) (1'25 puntos) Halla los valores de λ tales que $|A-\lambda I|=0$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

b) (1'25 puntos) Para $\lambda=1$, resuelve el sistema dado por $(A-\lambda I)X=0$. ¿Existe alguna solución tal que $z=1$?. En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

MATEMÁTICAS II. 2020. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 7

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz $A-\lambda I=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

Calculamos su determinante:

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3+2\lambda^2+\lambda-2=0 \Rightarrow \lambda=1\ ;\ \lambda=-1\ ;\ \lambda=2$$

b) Resolvemos el sistema para $\lambda=1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow \left.\begin{aligned} 2y+3z=0 \\ -y+2z=0 \\ y=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y=0\ ;\ z=0$$

Luego, no hay ninguna solución $z=1$