

MATEMÁTICAS II

TEMA 2: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Junio, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción B

emestrada

Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \lambda x + y - z &= -1 \\ \lambda x + \lambda z &= \lambda \\ x + y - \lambda z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

a) Discute el sistema según los valores de λ .

b) Resuelve el sistema para $\lambda = 0$.

MATEMÁTICAS II. 2015. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

RESOLUCIÓN

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda - \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = 0 = 0 \Rightarrow \text{Para cualquier valor de } \lambda \text{ el rango de } A \text{ es menor}$$

que 3.

Calculamos un determinante de orden 3 con la matriz ampliada.

$$|M| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \lambda - \lambda - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

Hacemos la discusión del sistema

	R(A)	R(M)	
$\lambda = 0$	2	2	Sistema compatible indeterminado
$\lambda \neq 0$	2	3	Sistema incompatible

c) Resolvemos el sistema para $\lambda = 0$

$$\left. \begin{aligned} y - z &= -1 \\ x + y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} y &= -1 + z \\ x + y &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{cases} x = 1 - z \\ y = -1 + z \\ z = z \end{cases}$$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} \lambda x + \lambda y + \lambda z = 0 \\ \lambda x + 2y + 2z = 0 \\ \lambda x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores de λ

b) Determina, si existen, los valores de λ para los que el sistema tiene alguna solución en la que $z \neq 0$.

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

RESOLUCIÓN

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & 2 & 2 \\ \lambda & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\lambda + 2\lambda^2 + 2\lambda^2 - 2\lambda^2 - \lambda^2 - 4\lambda = \lambda^2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0; \lambda = 2$$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y hacemos la discusión del sistema.

	R(A)	
$\lambda = 0$	2	S. Compatible indeterminado
$\lambda = 2$	2	S. Compatible indeterminado
$\lambda \neq 0$ y 2	3	S. Compatible determinado

b) Para $\lambda = 0$, el sistema que tenemos que resolver es:

$$\begin{cases} 2y + 2z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Para $\lambda = 2$, el sistema que tenemos que resolver es:

$$\begin{cases} 2y + 2z = -2x \\ 2y + z = -2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases}$$

Luego vemos que no hay ningún valor de λ para el cual $z \neq 0$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} x + \alpha z & = & 2 \\ 2x + \alpha y & = & \alpha + 4 \\ 3x + y + (\alpha + 4)z & = & 7 \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores de α

b) Resuelve el sistema para $\alpha = 2$.

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 2 & \alpha & 0 \\ 3 & 1 & \alpha + 4 \end{vmatrix} = -2\alpha^2 + 6\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 ; \alpha = 3$$

	R(A)	R(M)	
$\alpha = 0$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\alpha = 3$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\alpha \neq 0$ y 3	3	3	S. Compatible determinado

b) Vamos a resolverlo para $\alpha = 2 \Rightarrow \begin{cases} x + 2z = 2 \\ 2x + 2y = 6 \\ 3x + y + 6z = 7 \end{cases}$ Lo resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 0 \\ 7 & 1 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{8}{4} = 2 ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 7 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{4}{4} = 1 ; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{0}{4} = 0$$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} \alpha x + y + 3z = 4 \\ x + y - 2z = -2 \\ -x + 2y + (3 + \alpha)z = 4 + \alpha \end{cases}$$

- a) Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema dado tiene solución única.
b) Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema dado tiene al menos dos soluciones. Halla todas las soluciones en dichos casos

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

RESOLUCIÓN

- a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 + \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 + 6\alpha + 8 = 0 \Rightarrow \alpha = -2; \alpha = -4$$

	R(A)	R(M)	
$\alpha = -2$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\alpha = -4$	2	3	S. Incompatible
$\alpha \neq -2$ y -4	3	3	S. Compatible determinado

Luego para $\alpha \neq -2$ y -4 el sistema es compatible determinado y tiene solución única

- b) Para $\alpha = -2$ el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones. Lo resolvemos:

$$\begin{cases} -2x + y + 3z = 4 \\ x + y - 2z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y = 4 - 3z \\ x + y = -2 + 2z \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-6 + 5z}{3}; y = \frac{z}{3}; z = z$$

Considera el sistema dado por $A \cdot X = B$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & \alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha - 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- a) Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema tiene solución única.
 b) Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema no tiene solución.
 c) Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema tiene al menos dos soluciones.
 Halla todas las soluciones en dichos casos.

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

RESOLUCIÓN

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - 8\alpha + 15 = 0 \Rightarrow \alpha = 3; \alpha = 5$$

	R(A)	R(M)	
$\alpha = 3$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\alpha = 5$	2	3	S. Incompatible
$\alpha \neq 3$ y 5	3	3	S. Compatible determinado

a) Luego para $\alpha \neq 3$ y 5 el sistema es compatible determinado y tiene solución única. Lo resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ \alpha - 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & \alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & \alpha \end{vmatrix}} = \frac{-2\alpha^2 + \alpha + 15}{\alpha^2 - 8\alpha + 15}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 0 & \alpha - 2 & 2 \\ 3 & 3 & \alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & \alpha \end{vmatrix}} = \frac{\alpha^3 - 2\alpha^2 - 3\alpha}{\alpha^2 - 8\alpha + 15};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha - 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & \alpha \end{vmatrix}} = \frac{-4\alpha^2 + 17\alpha - 15}{\alpha^2 - 8\alpha + 15}$$

b) Para $\alpha = 5$ el sistema es incompatible y no tiene solución.

c) Para $\alpha = 3$ el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones. Resolvemos el sistema:

$$\left. \begin{aligned} 3x + 2y - z &= 1 \\ y + 2z &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = \frac{-1 + 5z}{3}; y = 1 - 2z; z = z$$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left. \begin{aligned} 2x + y + (\alpha - 1)z &= \alpha - 1 \\ x - \alpha y - 3z &= 1 \\ x + y + 2z &= 2\alpha - 2 \end{aligned} \right\}$$

a) Resuelve el sistema para $\alpha = 1$.

b) Determina, si existe, el valor de α para el que $(x, y, z) = (1, -3, \alpha)$ es la única solución del sistema dado.

MATEMÁTICAS II. 2015. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) El sistema que tenemos que resolver es: $\left. \begin{aligned} 2x + y &= 0 \\ x - y - 3z &= 1 \\ x + y + 2z &= 0 \end{aligned} \right\}$. Lo resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}; y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}; z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

b) Sustituimos la solución que nos dan en el sistema dado y vemos si tiene sentido.

$$\left. \begin{aligned} 2 - 3 + (\alpha - 1)\alpha &= \alpha - 1 \\ 1 + 3\alpha - 3\alpha &= 1 \\ 1 - 3 + 2\alpha &= 2\alpha - 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \alpha^2 - 2\alpha &= 0 \\ 1 &= 1 \\ -2 &= -2 \end{aligned} \right\}$$

Resolvemos la ecuación: $\alpha^2 - 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ y $\alpha = 2$.

Hacemos la discusión del sistema para estos valores:

	R(A)	R(M)	
$\alpha = 0$	2	2	Sistema compatible indeterminado
$\alpha = 2$	3	3	Sistema compatible determinado

Luego, para $\alpha = 2$ la solución del sistema es única y es: $(1, -3, \alpha)$.