EMESTRADA
EXÁMENES DE
SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2010

MATEMÁTICAS II

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 1, Opción A
- Junio, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción B

Sea f la función definida como $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{a-x}$ para $x\neq a$.

a) Calcula a y b para que la gráfica de f pase por el punto $(2,3)$ y tenga una asíntota oblicua con pendiente -4.

b) Para el caso de $a=2,\ b=3$, obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$

MATEMÁTICAS II. 2010. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Como f pasa por el punto (2,3) tenemos que $f(2)=3\Rightarrow \dfrac{4a+b}{a-2}=3\Rightarrow a+b=-6$.

Como f tiene una asíntota oblicua con pendiente -4, tenemos que:

$$-4\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=-4\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+b}{ax-x^2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2ax}{a-2x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2a}{-2}=-4\Rightarrow a=4$$

Sustituyendo en la ecuación anterior, tenemos que:

$$a+b=-6\Rightarrow 4+b=-6\Rightarrow b=-10$$

Luego, los valores son: $a=4$; $b=-10$

b) Si $a=2$; $b=3$, la función es: $f(x)=\dfrac{2x^2+3}{2-x}$. La ecuación de la recta tangente es:

$$y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$$

$$f(1)=\frac{2+3}{2-1}=5$$

$$f'(x)=\frac{4x(2-x)-(-1)(2x^2+3)}{(2-x)^2}=\frac{-2x^2+8x+3}{(2-x)^2}\Rightarrow f'(1)=\frac{-2+8+3}{1}=9$$

Sustituyendo, tenemos que:

$$y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)\Rightarrow y-5=9(x-1)\Rightarrow y=9x-4$$

Calcula $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{sen\,x}}{x^{2}}$

MATEMÁTICAS II. 2010. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

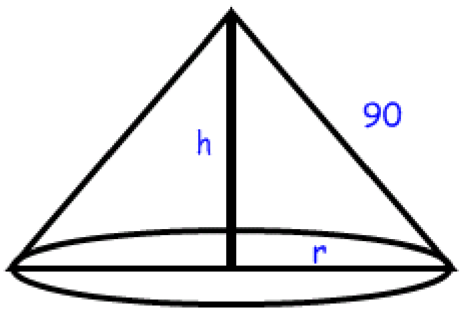
Como $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{sen\,x}}{x^{2}}=\frac{0}{0}$, le aplicamos la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{sen\,x}}{x^{2}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-\cos x\cdot e^{sen\,x}}{2x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+sen\,x\cdot e^{sen\,x}-\cos^{2}x\cdot e^{sen\,x}}{2}=\frac{0}{2}=0$$

La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 90 cm. Si se hace girar alrededor de uno de sus catetos, el triángulo engendra un cono. ¿Qué medidas han de tener los catetos del triángulo para que el volumen del cono engendrado sea máximo?. (Recuerda que el volumen del cono es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$).

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea máximo: $V_{max} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

b) Relación entre las variables: $r^2 + h^2 = 8100 \Rightarrow r^2 = 8100 - h^2$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$V_{max} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(8100 - h^2)h = \frac{1}{3}\pi(8100h - h^3)$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$V' = \frac{1}{3}\pi(8100 - 3h^2) = 0 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{8100}{3}} = \sqrt{2700} = 30\sqrt{3}\ cm$$

e) Calculamos la segunda derivada para ver que valor corresponde al máximo.

$$V'' = \frac{1}{3}\pi(-6h) \Rightarrow V''(h = 30\sqrt{3}) = \frac{1}{3}\pi(-180\sqrt{3}) < 0 \Rightarrow Máximo$$

Luego, las dimensiones de los catetos son : $h = 30\sqrt{3}\ cm$; $r = 30\sqrt{6}\ cm$

Sea *f* la función definida como $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ para $x\neq\pm 1$.
a) Estudia y halla las asíntotas a la gráfica de *f*.
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.
c) Esboza la gráfica de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Asíntota vertical: $x=1$ y $x=-1$.

Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{2}=\infty\Rightarrow$ No tiene.

Asíntota oblicua: $y=x$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3-x}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{x^2-1}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3-x^3+x}{x^2-1}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x}{x^2-1}\right]=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{2x}\right]=0$$

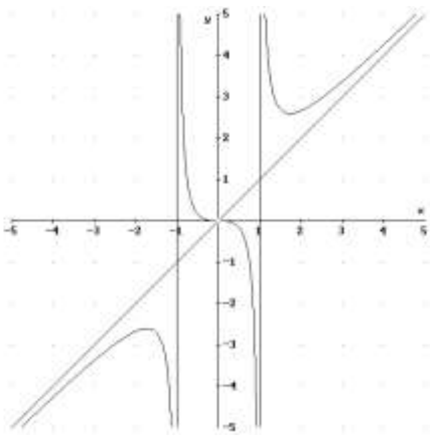
b) Calculamos la derivada de la función e igualamos a cero.

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2-1)-2x\cdot x^3}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=-\sqrt{3}\ ;\ x=\sqrt{3}$$

	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3},-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\sqrt{3})$	$(\sqrt{3},\infty)$
Signo y'	+	–	–	–	–	+
Función	C	D	D	D	D	C

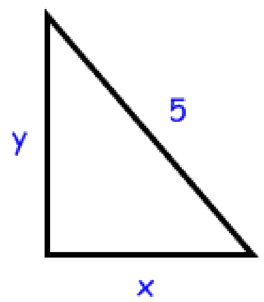
$\downarrow$ $M=\left(-\sqrt{3},-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ $\downarrow$ No existe $\downarrow$ Nada $\downarrow$ No existe $\downarrow$ $m=\left(\sqrt{3},\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

c)



Entre todos los triángulos rectángulos de 5 metros de hipotenusa, determina los catetos del de área máxima.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea máximo: $S_{max} = \dfrac{x \cdot y}{2}$.

b) Relación entre las variables: $x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow y = \sqrt{25 - x^2}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$S_{max} = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{x\sqrt{25 - x^2}}{2} = \frac{\sqrt{25x^2 - x^4}}{2}$$

d) Derivamos e igualamos a cero: $S' = \dfrac{\dfrac{50x - 4x^3}{2\sqrt{25x^2 - x^4}}}{2} = \dfrac{25 - 2x^2}{2\sqrt{25 - x^2}} = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{25}{2}}$

Como es una longitud tomamos el valor positivo $x = \sqrt{\dfrac{25}{2}}$

e) Calculamos la segunda derivada para ver que valor corresponde al máximo.

$$S'' = \frac{-4x \cdot (2\sqrt{25 - x^2}) - 2\dfrac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}}(25 - 2x^2)}{4\sqrt{25 - x^2}} = \frac{x(2x^2 - 75)}{2(25 - x^2)\sqrt{25 - x^2}}$$

$$S''\left(x = \sqrt{\frac{25}{2}}\right) = \frac{\sqrt{\dfrac{25}{2}}(25 - 75)}{2(25 - \dfrac{25}{2})\sqrt{25 - \dfrac{25}{2}}} = -2 < 0 \Rightarrow Máximo$$

Luego, las dimensiones de los catetos son: $x = \dfrac{\sqrt{50}}{2}\ m$; $y = \dfrac{\sqrt{50}}{2}\ m$

Sea $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\ln(x^2+3x)$, donde ln denota el logaritmo neperiano.
a) Determina, si existen, los puntos de la gráfica de *f* en los que la recta tangente a la gráfica es paralela a la recta de ecuación $x-2y+1=0$.
b) Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=3$.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada de la función: $f'(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+3x}$. La pendiente de la recta $x-2y+1=0$, es: $m=\dfrac{1}{2}$. Igualando, nos queda:

$$f'(x)=\frac{2x+3}{x^2+3x}=\frac{1}{2}\Rightarrow 4x+6=x^2+3x\Rightarrow x^2-x-6=0\Rightarrow x=-2\ ;\ x=3$$

Como el dominio de la función es $(0,+\infty)$, sólo vale el punto $(3,\ln 18)$.

b) Calculamos $f(3)=\ln 18$ y $f'(3)=\dfrac{9}{18}=\dfrac{1}{2}$.

La recta tangente es: $y-f(3)=f'(3)\cdot(x-3)\Rightarrow y-\ln 18=\dfrac{1}{2}(x-3)$

La recta normal es: $y-f(3)=-\dfrac{1}{f'(3)}\cdot(x-3)\Rightarrow y-\ln 18=-2\cdot(x-3)$

Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\begin{cases} e^x(x^2+ax) & si \quad x\le 0 \\ \dfrac{bx^2+c}{x+1} & si \quad x>0 \end{cases}$.

Calcula las constantes *a*, *b* y *c* sabiendo que *f* es derivable y que la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=1$ tiene de pendiente 3.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Como la función es derivable en $\mathbb{R}$ también tiene que ser continua en $\mathbb{R}$. Por lo tanto:

Continua en $x=0$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} e^x(x^2+ax)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{bx^2+c}{x+1}=c \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\Rightarrow c=0$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} e^x(x^2+ax)+e^x(2x+a) & si \quad x\le 0 \\ \dfrac{2bx(x+1)-bx^2}{(x+1)^2} & si \quad x>0 \end{cases}$

Derivable en $x=0$: $\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=a \\ f'(0^+)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0^-)=f'(0^+)\Rightarrow a=0$

La recta tangente en $x=1$ tiene de pendiente 3:

$$f'(1)=3\Rightarrow \frac{2b\cdot 1(1+1)-b1^2}{(1+1)^2}=3\Rightarrow \frac{3b}{4}=3\Rightarrow b=4$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida como $f(x)=(x+1)\sqrt[3]{3-x}$. Halla las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el puno de abscisa $x=-5$ y en el punto de abscisa $x=2$.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la primera derivada de *f*.

$$f'(x)=\sqrt[3]{3-x}+(x+1)\frac{-1}{3\sqrt[3]{(3-x)^2}}$$

Calculamos $f'(-5)$ y $f'(2)$.

$$f'(-5)=\sqrt[3]{3+5}+(-5+1)\frac{-1}{3\sqrt[3]{(3+5)^2}}=2+\frac{4}{12}=\frac{7}{3}$$

$$f'(2)=\sqrt[3]{3-2}+(2+1)\frac{-1}{3\sqrt[3]{(3-2)^2}}=1-\frac{3}{3}=0$$

Calculamos $f(-5)$ y $f(2)$.

$$f(-5)=(-5+1)\sqrt[3]{3+5}=-8$$

$$f(2)=(2+1)\sqrt[3]{3-2}=3$$

La recta tangente en $x=-5$ es: $y-f(-5)=f'(-5)\cdot(x+5)\Rightarrow y+8=\frac{7}{3}(x+5)$

La recta normal en $x=-5$ es: $y-f(-5)=-\frac{1}{f'(-5)}\cdot(x+5)\Rightarrow y+8=-\frac{3}{7}(x+5)$

La recta tangente en $x=2$ es: $y-f(2)=f'(2)\cdot(x-2)\Rightarrow y-3=0(x-2)\Rightarrow y=3$

La recta normal en $x=2$ es: $y-f(2)=-\frac{1}{f'(2)}\cdot(x-2)\Rightarrow y-3=-\frac{1}{0}(x-2)\Rightarrow x=2$

Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida como $f(x)=a\,sen\,x+bx^2+cx+d$, determina los valores de las constantes *a, b, c* y *d* sabiendo que la gráfica de *f* tiene tangente horizontal en el punto $(0,4)$ y que la segunda derivada de *f* es $f''(x)=3\,sen\,x-10$.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la primera y segunda derivada de *f*.

$$f'(x)=a\cos x+2bx+c \quad ; \quad f''(x)=-a\,sen\,x+2b$$

Vamos aplicando los datos del problema para calcular las constantes.

$$f''(x)=-a\,sen\,x+2b=3\,sen\,x-10\Rightarrow a=-3\ ;\ b=-5$$

Pasa por $(0,4)\Rightarrow f(0)=4\Rightarrow d=4$

Tangente horizontal en $(0,4)\Rightarrow f'(0)=0\Rightarrow a+c=0\Rightarrow c=-a=3$

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} e^{-x} & si \quad x\le 0 \\ 1-x^2 & si \quad 0<x<1 \\ \dfrac{2}{x+1} & si \quad 1\le x \end{cases}$.
Estudia su continuidad y derivabilidad. Determina la función derivada de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

La función e^{-x}, es continua y derivable en $\mathbb{R}$. La función $1-x^2$, es continua y derivable en $\mathbb{R}$. La función $\dfrac{2}{x+1}$ es continua y derivable en $\mathbb{R}-\{1\}$. Por lo tanto, sólo estudiamos la continuidad y derivabilidad en $x=0$ y $x=1$.

Estudiamos la continuidad en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} e^{-x}=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} 1-x^2=1\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=1 \Rightarrow Continua$$

Estudiamos la continuidad en $x=1$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} 1-x^2=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2}{x+1}=1\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x)\ne \lim_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow No\ Continua\ y\ no\ derivable$$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} -1\cdot e^{-x} & si \quad x<0 \\ -2x & si \quad 0<x<1 \\ \dfrac{-2}{(x+1)^2} & si \quad x>1 \end{cases}$

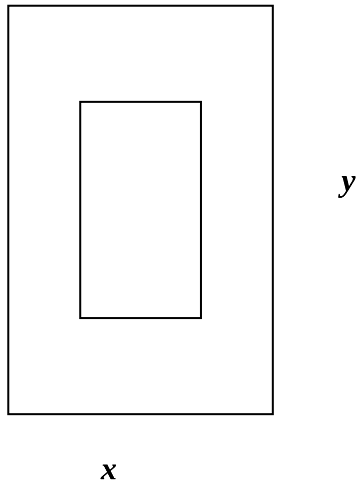
Estudiamos la derivabilidad en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=-1 \\ f'(0^+)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0^-)\ne f'(0^+) \Rightarrow No\ derivable$$

Luego, la función es continua en $\mathbb{R}-\{1\}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{0\ y\ 1\}$

Una hoja de papel tiene que contener 18 cm^2 de texto. Los márgenes superior e inferior han de tener 2 cm cada uno y los laterales 1 cm. Calcula las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo.
MATEMÁTICAS II. 2010. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N



1) $S_{\min} = x \cdot y$

2) $18 = (x-2)\cdot(y-4) \Rightarrow y = \dfrac{10+4x}{x-2}$

3) $S_{\min} = x \cdot y = x \cdot \dfrac{10+4x}{x-2} = \dfrac{10x+4x^2}{x-2}$

4) $S' = \dfrac{4x^2-16x-20}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow 4x^2-16x-20=0 \Rightarrow x=-1\ ;\ x=5$

Luego, las dimensiones de la hoja de papel son: $x = 5\ cm\ ;\ y = 10\ cm$

Considera la función $f:[0,4]\to\mathbb{R}$ **definida por** $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & si\ \ 0\le x\le 2 \\ cx & si\ \ 2<x\le 4\end{cases}$

a) Sabiendo que f **es derivable en todo el dominio y que verifica** $f(0)=f(4)$**, determina los valores de** a, b **y** c**.**

b) Para $a=-3$ **,** $b=4$ **y** $c=1$ **halla los extremos absolutos de** f **(abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).**

MATEMÁTICAS II. 2010. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Como es derivable, la función es continua, luego:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-}(x^2+ax+b)=4+2a+b \\ \lim_{x\to 2^+}(cx)=2c \end{array}\right\} \Rightarrow 4+2a+b=2c \Rightarrow 2a+b-2c=-4$$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} 2x+a \\ c\end{cases}$. Como es derivable, se cumple:

$$f'(2^-)=f'(2^+)\Rightarrow 4+a=c\Rightarrow a-c=-4$$

Como además, $f(0)=f(4)\Rightarrow b=4c$

Resolviendo el sistema formado por las tres ecuaciones, tenemos:

$$\left.\begin{array}{r} 2a+b-2c=-4 \\ a-c=-4 \\ b=4c \end{array}\right\} \Rightarrow a=-3\ ;\ b=4\ ;\ c=1$$

b) Los extremos absolutos de una función se pueden alcanzar en:

1. Los puntos donde la función no es continua ni derivable.
2. Los extremos del intervalo.
3. Las soluciones de $f'(x)=0$

Vamos a calcular $f'(x)=0\Rightarrow 2x-3=0\Rightarrow x=\frac{3}{2}$

Luego, los extremos absolutos pueden estar en los puntos $x=0$; $x=\frac{3}{2}$; $x=4$. Vamos a calcularlos.

$$f(0)=4\ \ ;\ \ f(4)=4\ \ ;\ \ f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2-3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)+4=\frac{7}{4}$$

Por lo tanto, f alcanza su máximo absoluto en $x=0$ y $x=4$ y vale 4. Su mínimo absoluto lo alcanza en $x=\frac{3}{2}$ y vale $\frac{7}{4}$.