

MATEMÁTICAS II

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 1, Opción A
- Junio, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción B

Determina dos números reales positivos sabiendo que su suma es 10 y que el producto de sus cuadrados es máximo.

MATEMÁTICAS II. 2007. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Función que queremos que sea máximo: $P_{\max} = x^2 \cdot y^2$.

b) Relación entre las variables: $x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$P_{\max} = x^2 \cdot y^2 = x^2 \cdot (10 - x)^2 = x^2 \cdot (100 + x^2 - 20x) = x^4 - 20x^3 + 100x^2$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$P' = 4x^3 - 60x^2 + 200x = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = 5 ; x = 10$$

e) Calculamos la segunda derivada para ver que valor corresponde al máximo.

$$P'' = 12x^2 - 120x + 200$$

$$P''(0) = 200 > 0 \Rightarrow \text{mínimo}$$

$$P''(5) = -100 < 0 \Rightarrow \text{Máximo}$$

$$P''(10) = 200 > 0 \Rightarrow \text{Máximo}$$

Luego, los números son: $x = 5 ; y = 5$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$. Determina a y b sabiendo que la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión es la recta $y = 2x + 3$.

MATEMÁTICAS II. 2007. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Calculamos el punto de inflexión.

$$f'(x) = 6x^2 + 24x + a$$

$$f''(x) = 12x + 24 = 0 \Rightarrow x = -2$$

Como la recta tangente pasa por el punto de inflexión $\Rightarrow y = 2 \cdot (-2) + 3 = -1$. Luego el punto de inflexión tiene de coordenadas: $P.I.(-2, -1)$.

$$- f'(-2) = 2 \Rightarrow 24 - 48 + a = 2 \Rightarrow a = 26$$

$$- \text{La función pasa por } (-2, -1) \Rightarrow f(-2) = -1 \Rightarrow -16 + 48 - 2a + b = -1 \Rightarrow -2a + b = -33 \Rightarrow b = 19$$

Sea $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 \ln(x)$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano).

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \sqrt{e}$.

MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 1. EJERCICIO 1.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x) = 2x \ln x + \frac{x^2}{x} = x \cdot (2 \ln x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = e^{-\frac{1}{2}}$$

	$\left(0, e^{-\frac{1}{2}}\right)$	$\left(e^{-\frac{1}{2}}, \infty\right)$
Signo y'	–	+
Función	D	C

$$\downarrow$$

$$m \left(e^{-\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2e} \right)$$

b) La ecuación de la recta tangente en $x = \sqrt{e}$ es: $y - f(\sqrt{e}) = f'(\sqrt{e}) \cdot (x - \sqrt{e})$

$$- f(\sqrt{e}) = \frac{e}{2}$$

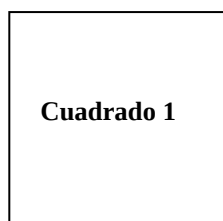
$$- f'(\sqrt{e}) = 2\sqrt{e}$$

Luego, la recta tangente es: $y - \frac{e}{2} = 2\sqrt{e} \cdot (x - \sqrt{e})$

Tenemos que fabricar dos chapas cuadradas con dos materiales distintos. El precio de cada uno de estos materiales es 2 y 3 euros por centímetro cuadrado, respectivamente. Por otra parte, la suma de los perímetros de los dos cuadrados tiene que ser 1 metro. ¿Cómo hemos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo?

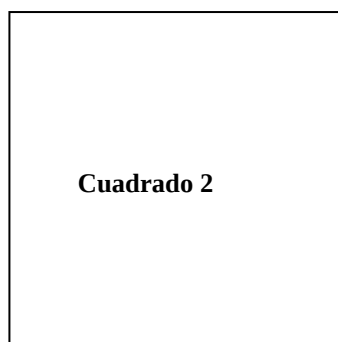
MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 1. EJERCICIO 1.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



Cuadrado 1

$$\frac{x}{4}$$



Cuadrado 2

$$\frac{y}{4}$$

Cuadrado 1: Lado $\frac{x}{4}$; perímetro x ; área = $\left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}$

Cuadrado 2: Lado $\frac{y}{4}$; perímetro y ; área = $\left(\frac{y}{4}\right)^2 = \frac{y^2}{16}$

a) Función que queremos que sea máximo es: $A = 2 \cdot \frac{x^2}{16} + 3 \cdot \frac{y^2}{16}$

b) Relación entre las variables: $x + y = 100 \Rightarrow y = 100 - x$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$A = 2 \cdot \frac{x^2}{16} + 3 \cdot \frac{y^2}{16} = \frac{2x^2 + 3(100 - x)^2}{16} = \frac{5x^2 - 600x + 30000}{16}$$

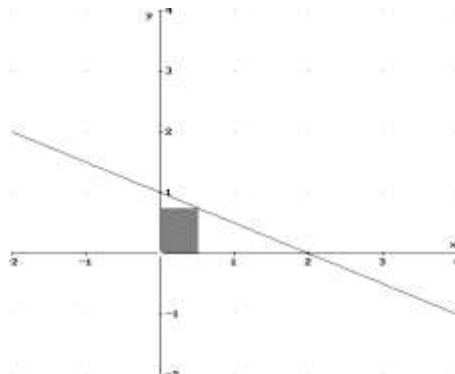
d) Derivamos e igualamos a cero

$$A' = \frac{10x - 600}{16} = 0 \Rightarrow x = 60$$

Los lados de los cuadrados son:

$$\text{cuadrado 1} = \frac{x}{4} = \frac{60}{4} = 15 \text{ cm} ; \text{cuadrado 2} = \frac{y}{4} = \frac{40}{4} = 10 \text{ cm}$$

De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos de sus lados sobre los ejes coordenados y un vértice en la recta r de ecuación $\frac{x}{2} + y = 1$ (ver figura), determina el que tiene mayor área.



MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 2. EJERCICIO 1.OPCIÓN A.

RESOLUCIÓN

a) Función que queremos que sea máximo es: $A = x \cdot y$

b) Relación entre las variables: $\frac{x}{2} + y = 1 \Rightarrow y = \frac{2-x}{2}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$A = x \cdot \frac{2-x}{2} = \frac{2x - x^2}{2}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$A' = \frac{2-2x}{2} = 0 \Rightarrow x = 1$$

Las dimensiones del rectángulo son: $x = 1$; $y = \frac{1}{2}$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$.

a) Determina los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f .

MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2) = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = 2$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
Signo f'	–	+	–
Función	D	C	D

$\downarrow$ $\downarrow$
 mínimo $(0,0)$ Máximo $\left(2, \frac{4}{e^2}\right)$

b) El dominio de la función $f(x)$ es $\mathbb{R}$.

Asíntotas Verticales: No tiene

Asíntotas Horizontales: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0 \Rightarrow y = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \Rightarrow$ No tiene

Luego, $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$

Al tener asíntota horizontal, no tiene asíntota oblicua.

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (x-3) \cdot e^x$.

a) Calcula los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión.

MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

$$f'(x) = e^x + (x-3)e^x = e^x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2$$

	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
Signo f'	-	+
Función	D	C

↓
mínimo $(2, -e^2)$

b) Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero.

$$f''(x) = e^x(x-2) + e^x = e^x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1$$

La ecuación de la recta tangente en $x=1$ es: $y - f(1) = f'(1) \cdot (x-1)$

- $f(1) = -2e$

- $f'(1) = -e$

Luego, la recta tangente es: $y + 2e = -e \cdot (x-1)$

Sea f la función definida, para $x \neq 2$ y $x \neq -2$, por $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4}$

- a) Determina las asíntotas de la gráfica de f .
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).
c) Esboza la gráfica de f .
MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

RESOLUCIÓN

a) El dominio de la función $f(x)$ es $\mathbb{R} - \{2, -2\}$.

Asíntotas Verticales: $x = 2$ y $x = -2$.

Asíntotas Horizontales: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2x} = 1 \Rightarrow y = 1$

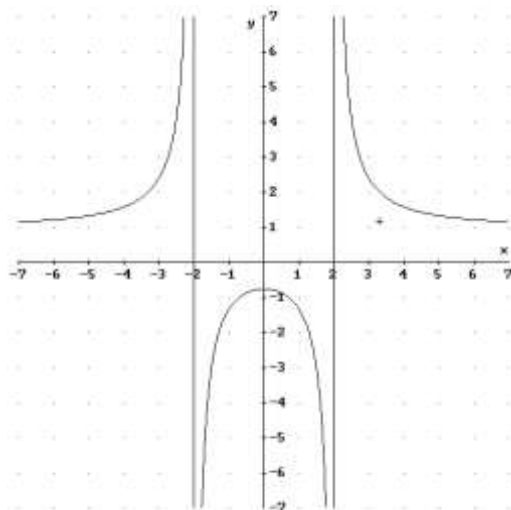
Al tener asíntota horizontal, no tiene asíntota oblicua.

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - 2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-14x}{(x^2 - 4)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
Signo f'	+	+	-	-
Función	C	C	D	D

Máximo $\left(0, -\frac{3}{4}\right)$



Determina la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sabiendo que $f''(x) = x^2 - 1$ y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ es la recta $y = 1$.

MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

La función que nos piden tendrá de ecuación: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Calculamos la primera y segunda derivada y vamos aplicando las condiciones del problema.

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c = x^2 - 1 \Rightarrow a = \frac{1}{12} ; b = 0 ; c = -\frac{1}{2}$$

La ecuación de la tangente en $x = 0$, será: $y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0)$

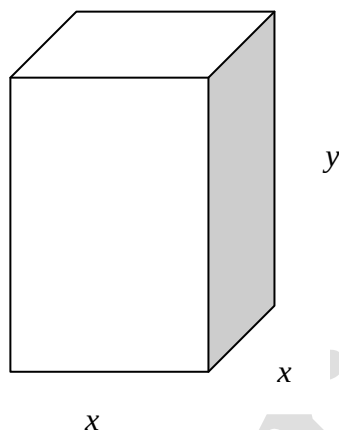
$$y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \Rightarrow y - e = d(x - 0) = 1 \Rightarrow e = 1 ; d = 0$$

Luego, la función que nos piden tiene de ecuación: $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1$

Se quiere construir un depósito en forma de prisma de base cuadrada sin tapadera que tenga una capacidad de 500 m^3 . ¿Qué dimensiones ha de tener el depósito para que su superficie sea mínima?

MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea máximo es: $S = x^2 + 4xy$

b) Relación entre las variables: $x^2 \cdot y = 500 \Rightarrow y = \frac{500}{x^2}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$S = x^2 + 4xy = x^2 + 4x \frac{500}{x^2} = x^2 + \frac{2000}{x} = \frac{x^3 + 2000}{x}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$S' = \frac{3x^2 \cdot x - 1 \cdot (x^3 + 2000)}{x^2} = \frac{2x^3 - 2000}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{1000} = 10$$

Las dimensiones del depósito son: $x = 10 \text{ m}$; $y = 5 \text{ m}$

Sea $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{x}}$

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) Calcula el punto de inflexión de la gráfica de f .

MATEMÁTICAS II. 2007. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x) = \frac{3x-1}{2x\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

	$\left(0, \frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$
Signo y'	–	+
Función	D	C

↓
 $m\left(\frac{1}{3}, 2\sqrt{3}\right)$

b) Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero:

$$f''(x) = \frac{-3x+3}{4x^2\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow x = 1$$

	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
Signo y''	+	–
Función	Cx	Cn

↓
P.I. $(1, 4)$

Determina una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sabiendo que su derivada viene dada por $f'(x) = x^2 + x - 6$ y que el valor que alcanza f en su punto máximo (relativo) es el triple del valor que alcanza en su punto mínimo (relativo).

MATEMÁTICAS II. 2007. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La función que nos piden será una función polinómica de tercer grado, es decir,
 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = x^2 + x - 6 \Rightarrow a = \frac{1}{3} ; b = \frac{1}{2} ; c = -6$$

Vamos a calcular el máximo y el mínimo.

$$f'(x) = x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2 ; x = -3$$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 2)$	$(2, \infty)$
Signo y'	+	-	+
Función	C	D	C

$\downarrow$ $\downarrow$
 Máximo mínimo

Como el valor que alcanza en el máximo es el triple del que alcanza en el mínimo, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 f(-3) &= 3 \cdot f(2) \Rightarrow -27a + 9b - 3c + d = 24a + 12b + 6c + 3d \Rightarrow -51a - 3b + 9c = 2d \Rightarrow \\
 &\Rightarrow -51 \cdot \frac{1}{3} - 3 \cdot \frac{1}{2} - 9 \cdot (-6) = 2d \Rightarrow \frac{71}{2} = 2d \Rightarrow d = \frac{71}{4}
 \end{aligned}$$

Luego, la función que nos pedían es: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + \frac{71}{4}$