

MATEMÁTICAS II

TEMA 5: INTEGRALES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

Sean $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas respectivamente por

$$f(x) = \frac{|x|}{2} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

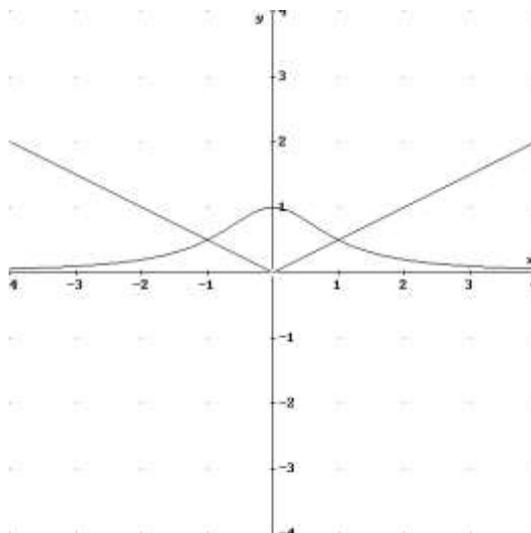
a) Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes y calcula los puntos de corte entre ambas gráficas.

b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g .

MATEMÁTICAS II. 2014. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

RESOLUCIÓN

a) Hacemos el dibujo de las dos funciones:



Abrimos la función $f(x)$: $f(x) = \frac{|x|}{2} = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{x}{2} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

Calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow x+x^3 = 2 \Rightarrow x=1$$

$$-\frac{x}{2} = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow -x-x^3 = 2 \Rightarrow x=-1$$

Luego, las funciones se cortan en los puntos: $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$

b) Calculamos el área que nos piden

$$A = 2 \cdot \int_0^1 \left[\left(\frac{1}{1+x^2} \right) - \frac{x}{2} \right] dx = 2 \left[\arctg x - \frac{x^2}{4} \right]_0^1 = 2 \left(\arctg 1 - \frac{1}{4} \right) - 2 \left(\arctg 0 - \frac{0}{4} \right) = 2 \frac{\pi}{4} - 2 \frac{1}{4} = \frac{\pi-1}{2} u^2$$

Sea f la función definida por $f(x) = x \ln(x+1)$ para $x > -1$ (\ln denota el logaritmo neperiano).
Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1,0)$.
MATEMÁTICAS II. 2014. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral $I = \int x \cdot \ln(x+1) dx$, que es una integral por partes.

$$u = \ln(x+1); \quad du = \frac{1}{x+1} dx$$
$$dv = x dx; \quad v = \frac{x^2}{2}$$

$$I = \int x \cdot \ln(x+1) dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{(x+1)} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x+1) - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) \right) + C$$

Calculamos la constante:

$$0 = \frac{1^2}{2} \cdot \ln(1+1) - \frac{1}{2} \left(\frac{1^2}{2} - 1 + \ln(1+1) \right) + C \Rightarrow C = -\frac{1}{4}$$

Por lo tanto, la primitiva que nos piden es:

$$\frac{x^2}{2} \cdot \ln(x+1) - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) \right) - \frac{1}{4}$$

Determina una función derivable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sabiendo que $f(1) = -1$ y que

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x < 0 \\ e^x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Como es derivable también es continua.

$$\text{Calculamos } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - x^2 + C & \text{si } x < 0 \\ e^x - x + D & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Como } f(1) = -1 \Rightarrow e^1 - 1 + D = -1 \Rightarrow D = -e$$

Como es continua en $x=0$, tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3}{3} + x^2 + C = C \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x - x - e = 1 - e \end{array} \right\} \Rightarrow C = 1 - e$$

$$\text{Luego, la función es: } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - x^2 + 1 - e & \text{si } x < 0 \\ e^x - x - e & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Considera el recinto limitado por las siguientes curvas: $y = x^2$, $y = 2 - x^2$, $y = 4$

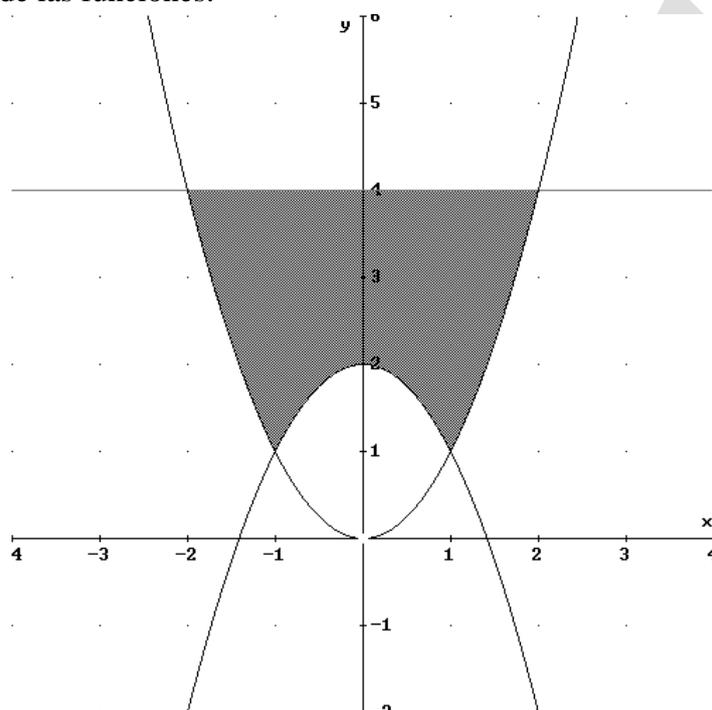
a) Haz un esbozo del recinto y calcula los puntos de corte de las curvas.

b) Calcula el área del recinto.

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Hacemos el dibujo de las funciones:



Calculamos los puntos de corte de las funciones:

$$x^2 = 2 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

Luego, las funciones se cortan en los puntos: $(1,1)$, $(-1,1)$, $(2,4)$ y $(-2,4)$.

b) Como el recinto es simétrico respecto al eje de ordenadas, el área que nos piden es:

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot \left[\int_0^1 (4 - 2 + x^2) dx + \int_1^2 (4 - x^2) dx \right] = 2 \left[2x + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + 2 \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \\ &= 2 \left(2 + \frac{1}{3} \right) + 2 \left[\left(8 - \frac{8}{3} \right) - \left(4 - \frac{1}{3} \right) \right] = \frac{14}{3} + \frac{32}{3} - \frac{22}{3} = \frac{24}{3} = 8 u^2 \end{aligned}$$

Calcula $\int_{-1}^1 \ln(4-x) dx$.

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Calculamos $I = \int \ln(4-x) dx$, que es una integral por partes.

$$u = \ln(4-x); \quad du = -\frac{1}{4-x} dx$$
$$dv = dx; \quad v = x$$

$$I = \int \ln(4-x) dx = x \ln|4-x| - \int \frac{-x}{4-x} dx = x \ln|4-x| + \int \frac{x}{4-x} dx$$

Como el polinomio del numerador y del denominador tienen igual grado, lo primero que hacemos es dividir.

$$\int \frac{4}{4-x} dx = \int \left(-1 + \frac{4}{4-x} \right) dx = -x - 4 \ln|4-x|$$

Con lo cual: $I = \int \ln(4-x) dx = x \ln|4-x| - x - 4 \ln|4-x|$

Por lo tanto, la integral que nos pedían vale:

$$\int_{-1}^1 \ln(4-x) dx = \left[x \ln|4-x| - x - 4 \ln|4-x| \right]_{-1}^1 = (\ln 3 - 1 - 4 \ln 3) - (-\ln 5 + 1 - 4 \ln 5) = -2 - 3 \ln 3 + 5 \ln 5$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$.

b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de f , la recta $2x + y - 7 = 0$ y el eje OX, calculando los puntos de corte.

c) Halla el área del recinto descrito en el apartado anterior.

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

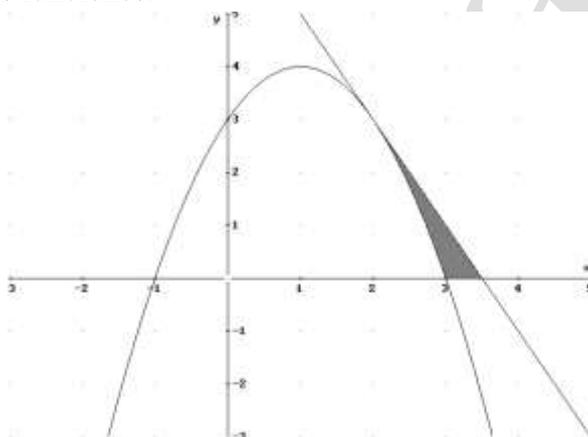
R E S O L U C I Ó N

a) La ecuación de la recta tangente en el punto $x = 2$, es: $y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2)$

Sustituyendo los valores de $f(2) = -4 + 4 + 3 = 3$ y $f'(2) = -4 + 2 = -2$, tenemos:

$$y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2) \Rightarrow y - 3 = -2 \cdot (x - 2) \Rightarrow 2x + y - 7 = 0$$

b) Hacemos el dibujo de las funciones:



Calculamos los puntos de corte de las funciones:

$$-x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = 3 ; x = -1$$

$$-2x + 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$$

$$-x^2 + 2x + 3 = -2x + 7 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Luego, las funciones se cortan en los puntos: $(3, 0)$, $(\frac{7}{2}, 0)$ y $(2, 3)$.

b)

$$\begin{aligned} A &= \int_2^3 [(-2x + 7) - (-x^2 + 2x + 3)] dx + \int_3^{\frac{7}{2}} (-2x + 7) dx = \int_2^3 (x^2 - 4x + 4) dx + \int_3^{\frac{7}{2}} (-2x + 7) dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right]_2^3 + \left[-x^2 + 7x \right]_3^{\frac{7}{2}} = (9 - 18 + 12) - \left(\frac{8}{3} - 8 + 8 \right) + \left(-\frac{49}{4} + \frac{49}{2} \right) - (-9 + 21) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} u^2 \end{aligned}$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.

a) Halla, si existe, el punto de la gráfica de f en el que la recta tangente es $y = 3 - x$.

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y la recta del apartado anterior.

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Si la recta es tangente, en ese punto la función y la tangente coinciden, luego:

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = 3 - x \Rightarrow x^3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = 3$$

La ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es: $y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0)$.

$$f(0) = 3$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 1 \Rightarrow f'(0) = -1$$

Sustituyendo, tenemos: $y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \Rightarrow y - 3 = -1 \cdot (x - 0) \Rightarrow y = -x + 3$

La ecuación de la recta tangente en $x = 3$ es: $y - f(3) = f'(3) \cdot (x - 3)$.

$$f(3) = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 1 \Rightarrow f'(3) = 27 - 18 - 1 = 8$$

Sustituyendo, tenemos: $y - f(3) = f'(3) \cdot (x - 3) \Rightarrow y - 0 = 8 \cdot (x - 3) \Rightarrow y = 8x - 24$

Luego, el punto es: $(0, 3)$

b) Ya hemos visto que los puntos de corte de las dos funciones son: $x = 0$ y $x = 3$. Tenemos que ver cuál de las dos funciones va por encima y cuál va por debajo. Para ello sustituimos un valor comprendido entre 0 y 3, y vemos cuál tiene mayor valor.

$$\text{Para } x = 1 \Rightarrow y = (1)^3 - 3(1)^2 - 1 + 3 = 0$$

$$\text{Para } x = 1 \Rightarrow y = -1 + 3 = 2$$

Por lo tanto, la función que va por encima es $y = -x + 3$. Luego el área vendrá dada por:

$$A = \int_0^3 [(-x + 3) - (x^3 - 3x^2 - x + 3)] dx = \int_0^3 (-x^3 + 3x^2) dx = \left[-\frac{x^4}{4} + x^3 \right]_0^3 = \frac{27}{4} u^2$$

Sea $f : (-1, 3) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{x+9}{(x+1)(x-3)}$. Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1, 0)$.
MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x+9}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3) + B(x+1)}{(x+1)(x-3)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores

$$x = -1 \Rightarrow 8 = -4A \Rightarrow A = -2$$

$$x = 3 \Rightarrow 12 = 4B \Rightarrow B = 3$$

Con lo cual:

$$\int \frac{x+9}{(x+1)(x-3)} dx = \int \frac{-2}{x+1} dx + \int \frac{3}{x-3} dx = -2 \ln|x+1| + 3 \ln|x-3| + C$$

Como tiene que pasar por el punto $(1, 0)$

$$0 = -2 \ln|1+1| + 3 \ln|1-3| + C \Rightarrow C = 2 \ln 2 - 3 \ln 2 = -\ln 2$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $-2 \ln|x+1| + 3 \ln|x-3| - \ln 2$

Calcula $\int \frac{dx}{2x(x+\sqrt{x})}$ (Sugerencia: cambio de variable $t = \sqrt{x}$)

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Hacemos el cambio de variable:

$$\begin{aligned}\sqrt{x} = t &\Rightarrow x = t^2 \\ dx &= 2t \, dt\end{aligned}$$

Con lo cual:

$$I = \int \frac{1}{2x(x+\sqrt{x})} dx = \int \frac{2t}{2t^2(t^2+t)} dt = \int \frac{dt}{t^2(t+1)}$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{t^2(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t+1} = \frac{A \cdot t(t+1) + B \cdot (t+1) + C \cdot t^2}{t^2(t+1)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A , B y C sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores más otro valor que puede ser $t = 1$

$$t = 0 \Rightarrow 1 = B$$

$$t = -1 \Rightarrow 1 = C$$

$$t = 1 \Rightarrow 1 = 2A + 2B + C \Rightarrow A = -1$$

Con lo cual:

$$\int \frac{dt}{t^2(t+1)} = \int \frac{-1}{t} dt + \int \frac{1}{t^2} dt + \int \frac{1}{t+1} dt = -\ln t - \frac{1}{t} + \ln(t+1) + C$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$I = -\ln t - \frac{1}{t} + \ln(t+1) + C = -\ln|\sqrt{x}| - \frac{1}{\sqrt{x}} + \ln|\sqrt{x}+1| + C$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = e^x \cdot \cos x$

a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

b) Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(0,0)$

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La ecuación de la recta tangente en $x=0$ es $y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0)$

$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = e^x \cdot \cos x - e^x \cdot \operatorname{sen} x \Rightarrow f'(0) = 1$$

Luego la recta tangente en $x=0$ es $y - 1 = 1 \cdot (x - 0) \Rightarrow y = x + 1$

b) Es una integral por partes cíclica

$$\begin{aligned} \int e^x \cdot \cos x \, dx &= e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cdot \operatorname{sen} x \, dx = \\ &= e^x \operatorname{sen} x - \left[-e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx \right] = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx \end{aligned}$$

$$2 \int e^x \cdot \cos x \, dx = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x \Rightarrow \int e^x \cdot \cos x \, dx = \frac{e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x}{2} + C$$

$$\begin{aligned} u &= e^x; \quad du = e^x \, dx \\ dv &= \cos x \, dx; \quad v = \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= e^x; \quad du = e^x \, dx \\ dv &= \operatorname{sen} x \, dx; \quad v = -\cos x \end{aligned}$$

Como pasa por el origen de coordenadas:

$$0 = \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$$

Luego, la función primitiva que nos piden es: $F(x) = \frac{e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x}{2} - \frac{1}{2}$

Calcula $\int_0^1 \frac{x^2}{2x^2 - 2x - 4} dx$.

MATEMÁTICAS II. 2014. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Como el polinomio del numerador y del denominador tienen igual grado, lo primero que hacemos es dividir.

$$\int_0^1 \frac{x^2}{2x^2 - 2x - 4} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{x^2 - x - 2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 1 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x+2}{x^2 - x - 2} dx = \frac{1}{2} [x]_0^1 + \frac{1}{2} I_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} I_1$$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 ; x = -1$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x+2}{x^2 - x - 2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores

$$x = 2 \Rightarrow 4 = 3A \Rightarrow A = \frac{4}{3}$$

$$x = -1 \Rightarrow 1 = -3B \Rightarrow B = -\frac{1}{3}$$

Con lo cual:

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\frac{4}{3}}{x-2} dx + \int_0^1 \frac{-\frac{1}{3}}{x+1} dx = \left[\frac{4}{3} \ln|x-2| \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{3} \ln|x+1| \right]_0^1 = -\frac{4}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} \ln 2 = -\frac{5}{3} \ln 2$$

Por lo tanto, la integral que nos pedían vale:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{2x^2 - 2x - 4} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} I_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{5}{3} \ln 2 \right) = \frac{1}{2} - \frac{5}{6} \ln 2$$

Calcula $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$. (Sugerencia: integración por partes).

MATEMÁTICAS II. 2014. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Calculamos $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$, que es una integral por partes.

$$u = x; \quad du = dx$$

$$dv = \frac{dx}{\cos^2 x}; \quad v = \operatorname{tg} x$$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x dx = x \operatorname{tg} x - \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x|$$

Calculamos la integral definida que nos piden:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = [x \operatorname{tg} x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = \frac{\pi}{4} + [\ln \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \ln \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$