PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2009

MATEMÁTICAS II

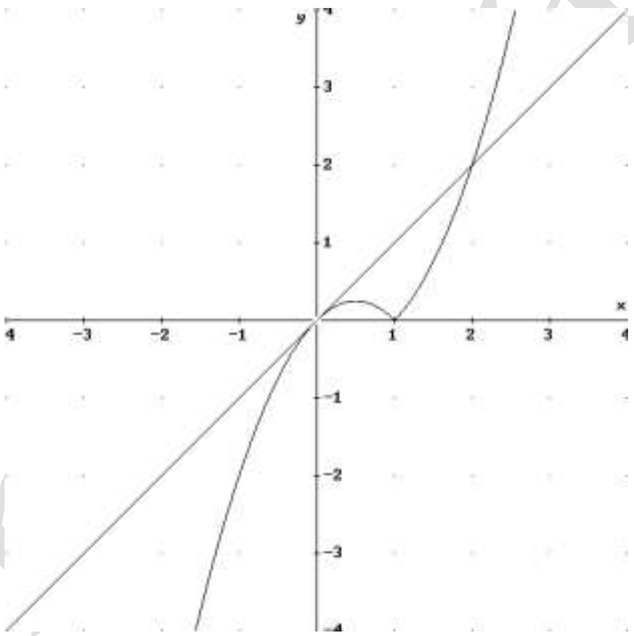
TEMA 5: INTEGRALES

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x|x-1|$.
a) Esboza la gráfica de *f*.
b) Comprueba que la recta de ecuación $y=x$ es la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=0$.
c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f* y la de dicha tangente.
MATEMÁTICAS II. 2009. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Lo primero que hacemos es abrir la función y dibujarla

$$f(x)=x|x-1|=\begin{cases}-x^2+x & si\ \ x<1\\ x^2-x & si\ \ x\geq 1\end{cases}$$



b) La ecuación de la recta tangente será: $y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)$

$f(0)=0$
$f'(0)=1$

luego, sustituyendo, tenemos que la recta tangente es: $y-0=1\cdot(x-0)\Rightarrow y=x$

c)

$$Área=\int_0^1\left[(x)-(-x^2+x)\right]dx+\int_1^2\left[(x)-(x^2-x)\right]dx=\int_0^1 x^2\,dx+\int_1^2(-x^2+2x)\,dx=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_1^2=\frac{1}{3}-\frac{8}{3}+4+\frac{1}{3}-1=1\ u^2$$

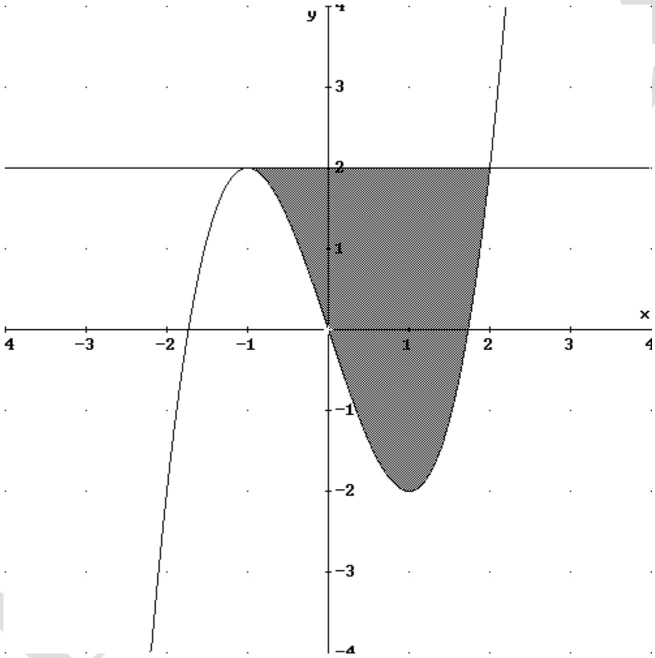
Considera la curva de ecuación $y = x^3 - 3x$.
a) Halla la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x = -1$.
b) Calcula el área del recinto limitado por la curva dada y la recta $y = 2$.
MATEMÁTICAS II. 2009. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\left.\begin{array}{l} x=-1 \Rightarrow y=2 \\ y'=3x^2-3 \Rightarrow m=y'(-1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y-2=0\cdot(x+1) \Rightarrow y=2$$

b)



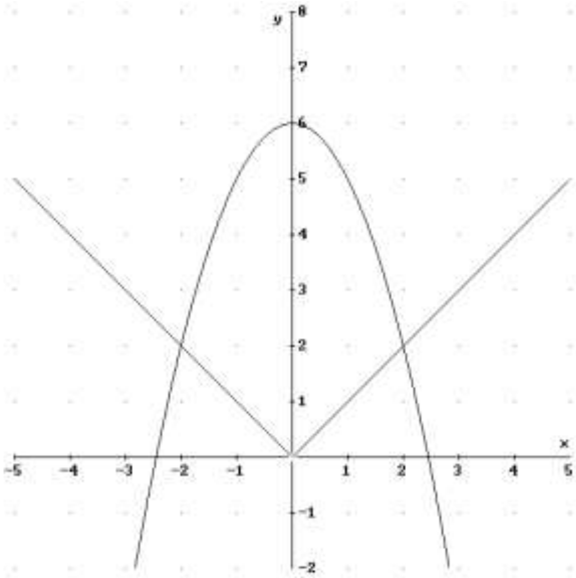
Por lo tanto, el área pedida será:

$$A=\int_{-1}^{2}\left(2-x^3+3x\right)dx=\left[2x-\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}\right]_{-1}^{2}=4-4+6+2+\frac{1}{4}-\frac{3}{2}=\frac{27}{4}\ u^2$$

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = |x|$, $g(x) = 6 - x^2$
a) Esboza el recinto limitado por sus gráficas.
b) Calcula el área de dicho recinto.
MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)



b)

$$- \; A = 2 \cdot \int_0^2 (6 - x^2 - x)\, dx = 2 \cdot \left[6x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 24 - \frac{16}{3} - 4 = \frac{44}{3} \; u^2$$

La recta tangente a la gráfica de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=mx^2+nx-3$, en el punto $(1,-6)$, es paralela a la recta de ecuación $y=-x$
a) Determina las constantes *m* y *n*. Halla la ecuación de dicha recta tangente.
b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función, la recta tangente anterior y el eje de ordenadas.
MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la función derivada: $f'(x)=2mx+n$

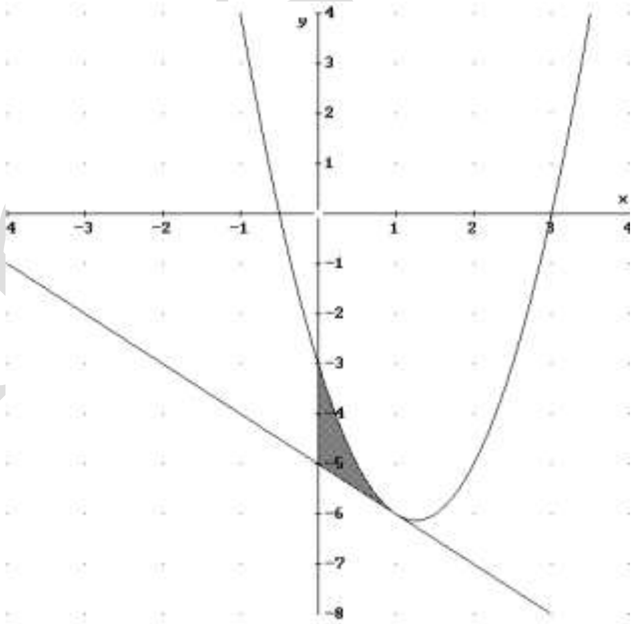
- Pasa por $(1,-6)\Rightarrow f(1)=-6\Rightarrow m\cdot 1^2+n\cdot 1-3=-6$

- Tangente paralela a $y=-x\Rightarrow f'(1)=-1\Rightarrow 2m\cdot 1+n=-1$

Resolviendo el sistema, tenemos que: $m=2$; $n=-5\Rightarrow f(x)=2x^2-5x-3$

La ecuación de la tangente será: $y+6=-1\cdot(x-1)\Rightarrow x+y+5=0$

b) El área de la región pedida es:



$$A=\int_0^1\left((2x^2-5x-3)-(-x-5)\right)dx=\int_0^1\left(2x^2-4x+2\right)dx=\left[\frac{2x^3}{3}-2x^2+2x\right]_0^1=\frac{2}{3}\,u^2$$

Sea $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=1+ln(x)$, siendo *ln* la función logaritmo neperiano.

a) Comprueba que la recta de ecuación $y=1+\frac{1}{e}x$ es la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=e$.
b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f*, el eje de abscisas y la recta tangente obtenida en el apartado anterior.
MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

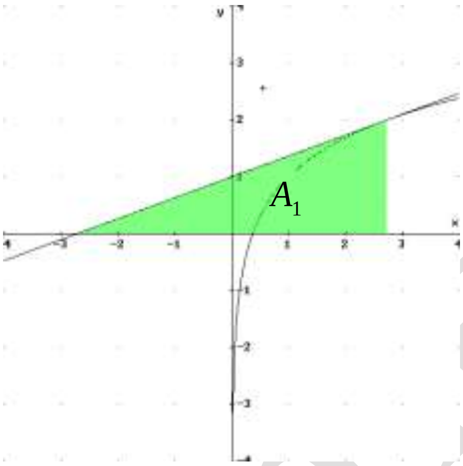
a) La recta tangente en $x=e$ es $y-f(e)=f'(e)\cdot(x-e)$

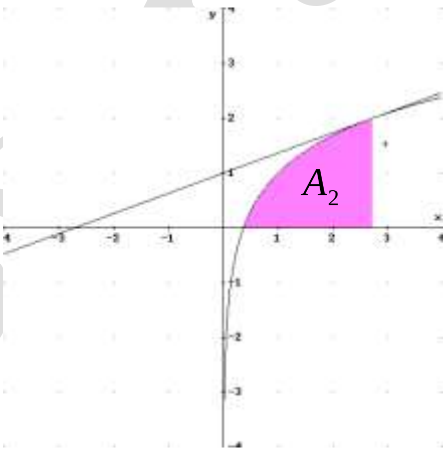
$$f(e)=2$$

$$f'(x)=\frac{1}{e}\Rightarrow f'(e)=\frac{1}{e}$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y-2=\frac{1}{e}\cdot(x-e)\Rightarrow y=1+\frac{1}{e}x$

b) El área de la región pedida es: $A=A_1-A_2$





$$\int 1+ln(x)\,dx=x(1+ln(x))-\int\frac{x}{x}dx=x+x\,ln(x)-x=x\ln(x)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=1+\ln(x);\ du=\frac{1}{x}dx \\ dv=dx;\ v=x \end{array}}$$

$$A_1=\int_{-e}^{e}\left(1+\frac{x}{e}\right)dx=\left[x-\frac{x^2}{2e}\right]_{-e}^{e}=2e\ u^2$$

$$A_2=\int_{\frac{1}{e}}^{e}(1+\ln(x))\,dx=\left[x\ln(x)\right]_{\frac{1}{e}}^{e}=\frac{e^2+1}{e}\,u^2$$

$$A=A_1-A_2=2e-\frac{e^2+1}{e}=\frac{e^2-1}{e}u^2$$

Se consideran las funciones $f : [0,+\infty] \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \sqrt{3x}$ y $g(x) = \frac{1}{3}x^2$

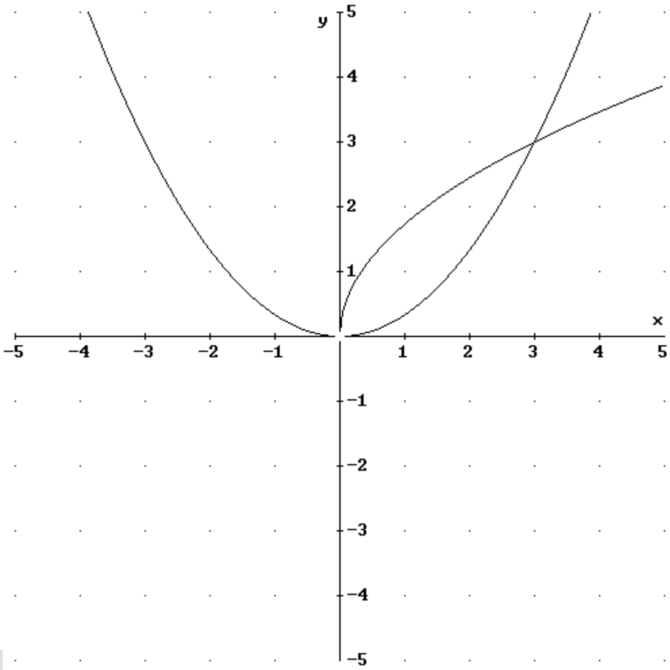
a) Haz un esbozo de sus gráficas

b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones.

MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Las dos funciones podemos representarlas haciendo una tabla de valores.



b) En el dibujo vemos que los puntos de corte son el $(0,0)$ y $(3,3)$. Luego, el área que nos piden es:

$$A = \int_0^3 \left[\sqrt{3x} - \frac{1}{3}x^2 \right] dx = \left[\frac{2\sqrt{3}\, x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{9} \right]_0^3 = 3\ u^2$$

a) Calcula $\int x \cdot sen\, x\; dx$

b) Sean las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$**, definidas por:**

$$f(x) = -x^2 + 1 \;\; ; \;\; g(x) = x - 1$$

Calcula el área del recinto limitado por sus gráficas.

MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

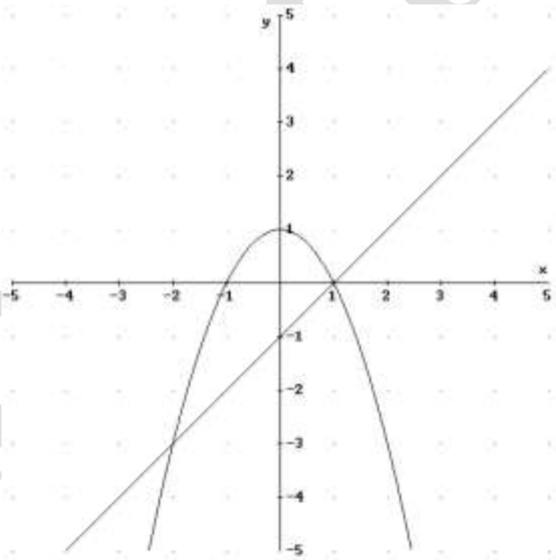
R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la integral por partes

$$\int x \cdot sen\, x\, dx = -x \cdot \cos x - \int -\cos x\, dx = -x \cdot \cos x + sen\, x + C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = x;\;\; du = dx \\ dv = sen\, x\, dx;\; v = -\cos x \end{array}}$$

b)



Calculamos los puntos de corte de las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} y = -x^2 + 1 \\ y = x - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \;\; ; \;\; x = -2$$

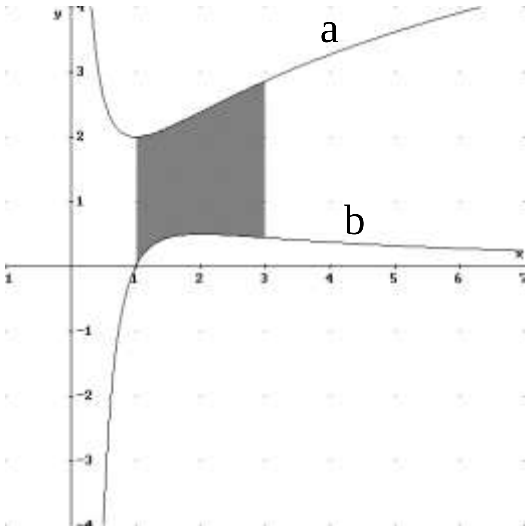
El área que nos piden es:

$$A = \int_{-2}^{1} \left[(-x^2 + 1) - (x - 1)\right] dx = \int_{-2}^{1} \left[-x^2 - x + 2\right] dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} = \frac{7}{6} + \frac{10}{3} = \frac{9}{2}\, u^2$$

Las dos gráficas del dibujo corresponden a la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\frac{2}{x}+2\ln(x)$$

y a la de su derivada $f':(0,+\infty)\to\mathbb{R}$



a) Indica, razonando la respuesta, cuál es la gráfica de *f* y cuál la de *f* '.
b) Calcula el área de la región sombreada.
MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la función derivada.

$$f'(x)=-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x}=\frac{2(x-1)}{x^2}$$

Vemos que esta función corta al eje X en el punto (1,0). Luego la gráfica de *f* es la (a) y la gráfica de *f* ' es la (b)

b) Calculamos la integral por partes: $\int \ln x\, dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$

$$u=\ln x;\ du=\frac{1}{x}\,dx$$
$$dv=dx;\ v=x$$

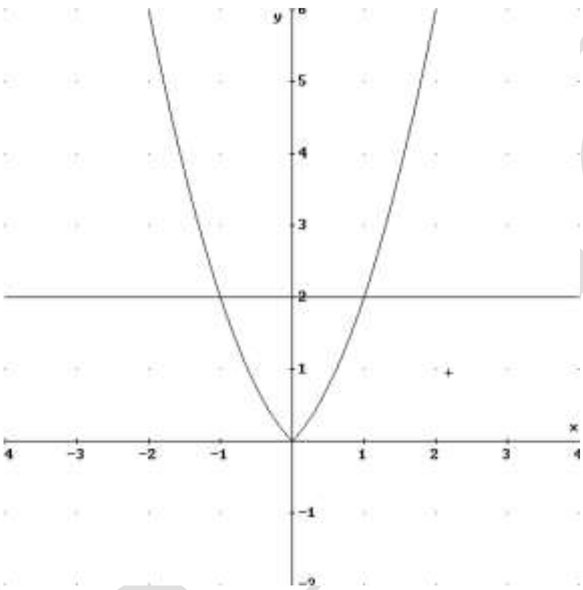
El área que nos piden es:

$$A=\int_1^3\left[\frac{2}{x}+2\ln(x)+\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x}\right]dx=\int_1^3\left[2\ln(x)+\frac{2}{x^2}\right]dx=\left[2x\ln x-2x-\frac{2}{x}\right]_1^3=\frac{18\ln 3-8}{3}\ u^2$$

Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por: $f(x)=x^2+|x|$; $g(x)=2$
a) Determina los puntos de corte de las gráficas de *f* y *g*. Esboza dichas gráficas.
b) Calcula el área del recinto limitado por dichas gráficas.
MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)



$$f(x)=x^2+|x|=\begin{cases} x^2-x & si \quad x<0 \\ x^2+x & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

Calculamos los puntos de corte entre las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} y=x^2-x \\ y=2 \end{array}\right\}\Rightarrow x^2-x-2=0\Rightarrow x=2 \;;\; x=-1. \text{ Sólo } x=-1 \text{ está en el intervalo}$$

$$\left.\begin{array}{l} y=x^2+x \\ y=2 \end{array}\right\}\Rightarrow x^2+x-2=0\Rightarrow x=1 \;;\; x=-2. \text{ Sólo } x=1 \text{ está en el intervalo}$$

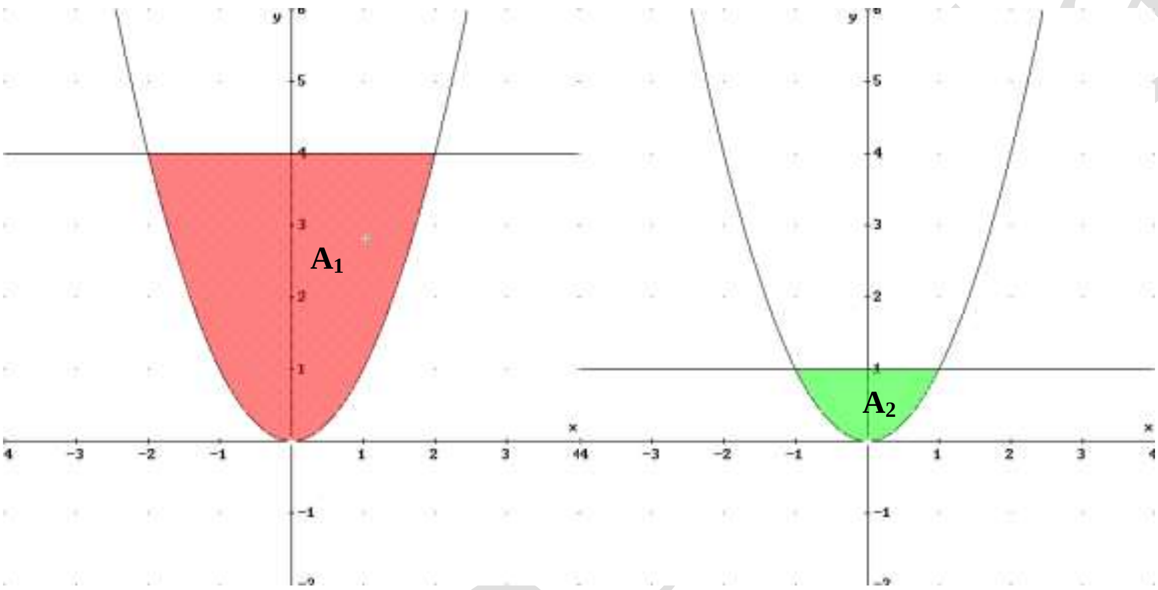
Luego, los puntos de corte son: $(-1,2)$ y $(1,2)$

b)

$$A=2\int_{-1}^{0}(2-x^2+x)\,dx=\left[2x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}=2\cdot\frac{7}{6}=\frac{7}{3}\,u^2$$

Calcula un número positivo *a*, menor que 4, para que el recinto limitado por la parábola de ecuación $y = x^2$ y las dos rectas de ecuaciones $y = 4$ e $y = a$, tenga un área de $\frac{28}{3}$ unidades cuadradas.
MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



Calculamos los puntos de corte entre las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \ ; \ x = -2$$

$$A_1 = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\, dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{2} = \frac{32}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = a \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - a = 0 \Rightarrow x = \sqrt{a} \ ; \ x = -\sqrt{a}$$

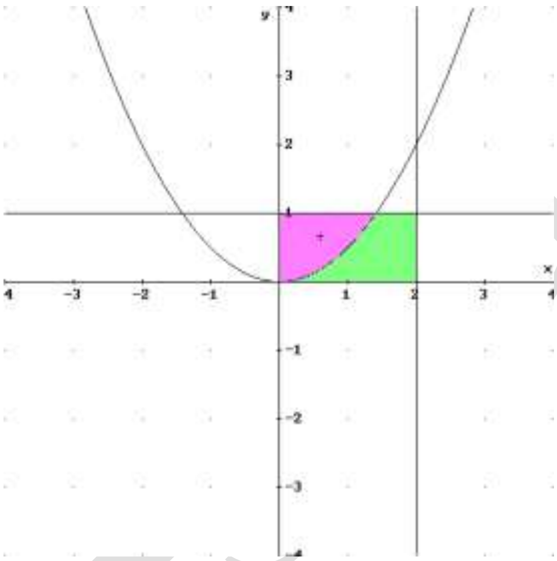
$$A_2 = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} (a - x^2)\, dx = \left[ax - \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} = \frac{4a\sqrt{a}}{3}$$

$$A = A_1 - A_2 \Rightarrow \frac{28}{3} = \frac{32}{3} - \frac{4a\sqrt{a}}{3} \Rightarrow \frac{4a\sqrt{a}}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow a = 1$$

La curva $y=\frac{1}{2}x^2$ divide al rectángulo de vértices $A=(0,0)$, $B=(2,0)$, $C=(2,1)$ y $D=(0,1)$ en dos recintos.
a) Dibuja dichos recintos.
b) Halla el área de cada uno de ellos
MATEMÁTICAS II. 2009. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Hacemos el dibujo



b) Calculamos el área de dicho recintos.

Calculamos el punto de corte de la parábola con la recta $y=1$

$$\left.\begin{array}{l} y=1 \\ y=\frac{1}{2}x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x=+\sqrt{2}$$

El área del primer recinto es:

$$A_1=\int_0^{\sqrt{2}}(1-\frac{1}{2}x^2)\,dx=\left[x-\frac{x^3}{6}\right]_0^{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}u^2$$

El área del segundo recinto es igual al área del rectángulo menos el área del primer recinto:

$$A_2=2-\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{6-2\sqrt{2}}{3}u^2$$

Sea *f* la función definida por $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{4-9x^4}}$.

Halla la primitiva *F* de *f* que cumple $F(0)=3$. (Sugerencia: utiliza el cambio de variable $t=\dfrac{3}{2}x^2$).

MATEMÁTICAS II. 2009. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Como el cambio es $t=\dfrac{3}{2}x^2$, vamos a calcular cuanto vale *dx*:

$$t=\frac{3}{2}x^2 \Rightarrow dt=3x\,dx \Rightarrow x\,dx=\frac{dt}{3}$$

Sustituyendo, nos queda:

$$F(x)=\int \frac{x}{\sqrt{4-9x^4}}\,dx=\int \frac{\frac{dt}{3}}{\sqrt{4-9\frac{4t^2}{9}}}=\int \frac{\frac{dt}{3}}{2\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{6}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{6}arc\,sen\,t+C=$$

$$=\frac{1}{6}arc\,sen\frac{3x^2}{2}+C$$

Como $F(0)=3 \Rightarrow 3=\dfrac{1}{6}arcsen\,0+C \Rightarrow C=3$

Por lo tanto, $F(x)=\dfrac{1}{6}arc\,sen\dfrac{3x^2}{2}+3$