EMESTRADA
EXÁMENES DE
SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2018

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

La función de costes de una empresa se puede determinar mediante la expresión $f(x)=40-6x+x^2$, para $x\geq 0$ donde "x" representa la cantidad producida de un determinado artículo. a) ¿Disminuye el coste alguna vez? Determine la cantidad producida de dicho artículo cuando el coste es mínimo y cuál es dicho coste. b) ¿Cuál sería el coste si no se produjese nada de ese artículo? Si el coste fuese 80, ¿Cuántas serían las unidades producidas? c) Represente gráficamente la función.
SOCIALES II. 2018 JUNIO. EJERCICIO 2 OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

$$f'(x)=-6+2x=0\Rightarrow x=3$$

	$(0,3)$	$(3,+\infty)$
Signo $f'(x)$	$-$	$+$
Función	D	C

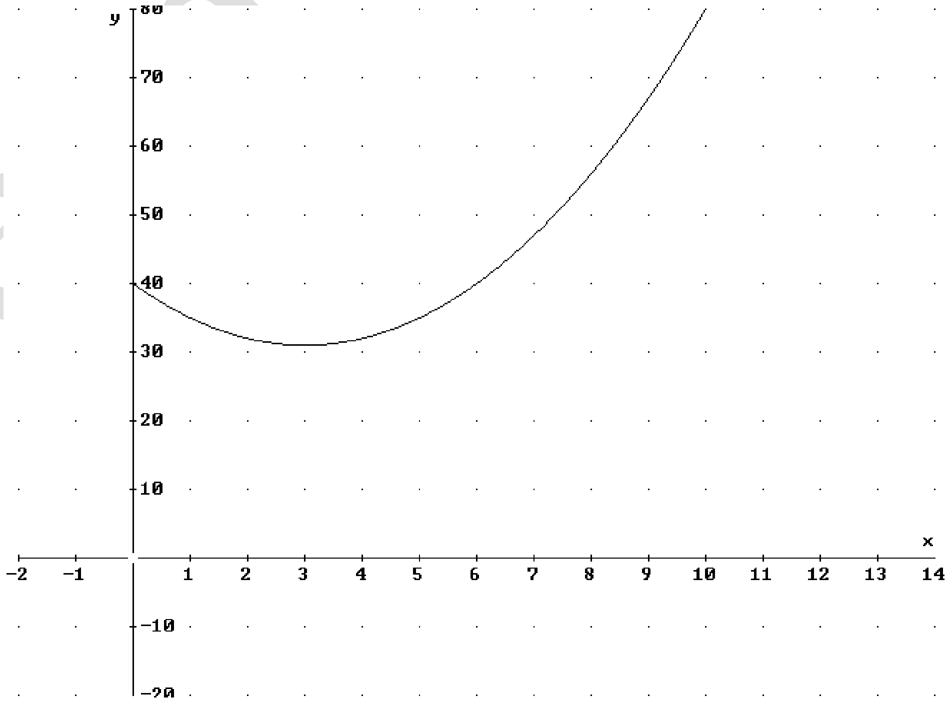
El coste disminuye de $(0,3)$. Para $x=3$ el coste es mínimo y vale $f(3)=31$

b) Calculamos $f(0)=40$.

Calculamos $f(x)=80\Rightarrow 40-6x+x^2=80\Rightarrow x^2-6x-40=0\Rightarrow x=10$

Luego, se producen 10 artículos, si el coste es 80.

c) Representamos la función



Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^3+ax^2 & si \quad x<1 \\ bx+\dfrac{2}{x} & si \quad x\geq 1 \end{cases}$

a) Calcule los valores de "*a*" y "*b*" para que la función sea continua y derivable en $x=1$**.**
b) Para $b=3$**, determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa función en el punto de abscisa** $x=2$**.**
SOCIALES II. 2018 JUNIO. EJERCICIO 2 OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) La función x^3+ax^2 es continua y derivable para $x<1$; la función $bx+\dfrac{2}{x}$ es, también, continua y derivable para $x\geq 1$. Vamos a calcular los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable en $x=1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-}(x^3+ax^2)=1+a \\ \lim\limits_{x\to 1^+}\left(bx+\dfrac{2}{x}\right)=b+2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1)=\lim_{x\to 1} f(x) \Rightarrow 1+a=b+2 \Rightarrow a-b=1$$

Calculamos la función derivada: $f'(t)=\begin{cases} 3x^2+2ax & si \quad x<1 \\ b-\dfrac{2}{x^2} & si \quad x\geq 1 \end{cases}$ y como es derivable:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=3+2a \\ f'(1^+)=b-2 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(1^-)=f'(1^+) \Rightarrow 3+2a=b-2 \Rightarrow 2a-b=-5$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{r} a-b=\ \ 1 \\ 2a-b=-5 \end{array}\right\} \Rightarrow a=-6 \ ; \ b=-7$$

b) Calculamos la tangente: $y-f(2)=f'(x)\cdot(x-2)$

$$f(2)=3\cdot 2+\frac{2}{2}=7$$

$$f'(x)=3-\frac{2}{x^2} \Rightarrow f'(2)=3-\frac{2}{2^2}=\frac{5}{2}$$

Sustituyendo, tenemos que: $y-7=\dfrac{5}{2}\cdot(x-2) \Rightarrow 5x-2y+4=0$

La velocidad que lleva un móvil, en función del tiempo *t*, viene dado por la siguiente función:

$$v(t)=\begin{cases} 7t^2 & si \quad 0\le t<1 \\ 2t+a & si \quad 1\le t\le 5 \\ -t^2+12t+b & si \quad 5<t\le 10 \end{cases}$$

a) Determine *a* y *b* para que la función sea continua en los instantes $t=1$ y $t=5$.
b) Para $a=5$ y $b=-20$, estudie la derivabilidad en los instantes $t=1$ y $t=5$. ¿En qué momento el móvil alcanza la velocidad máxima?.
SOCIALES II. 2018 RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos *a* y *b* para que sea continua en $t=1$ y $t=5$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to 1^-}(7t^2)=7 \\ \lim\limits_{t\to 1^+}(2t+a)=2+a \end{array}\right\} \Rightarrow 7=2+a\Rightarrow a=5$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to 5^-}(2t+a)=15 \\ \lim\limits_{t\to 5^+}(-t^2+12t+b)=35+b \end{array}\right\} \Rightarrow 15=35+b\Rightarrow b=-20$$

b) La función que tenemos es: $v(t)=\begin{cases} 7t^2 & si \quad 0\le t<1 \\ 2t+5 & si \quad 1\le t\le 5 \\ -t^2+12t-20 & si \quad 5<t\le 10 \end{cases}$

Calculamos la función derivada: $v'(t)=\begin{cases} 14t & si \quad 0\le t<1 \\ 2 & si \quad 1<t<5 \\ -2t+12 & si \quad 5<t\le 10 \end{cases}$

Estudiamos la derivabilidad en $t=1$:

$$\left.\begin{array}{l} v'(1^-)=14 \\ v'(1^+)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow v'(1^-)\ne v'(1^+)\Rightarrow \text{ No es derivable en } t=1$$

Estudiamos la derivabilidad en $t=5$:

$$\left.\begin{array}{l} v'(5^-)=2 \\ v'(5^+)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow v'(5^-)=v'(5^+)=2\Rightarrow \text{ Es derivable en } t=5$$

Igualamos la derivada a cero: $-2t+12=0\Rightarrow t=6$

El máximo absoluto estará en los extremos del intervalo, $t=0$ y $t=10$, o donde no es continua, $t=1$, o donde se anula la derivada, $t=6$.

$v(t=0)=0$

$v(t=10)=0$

$v(t=1)=7$

$v(t=6)=16$

Luego, la velocidad máxima se alcanza para $t=6$ y vale 16

Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+1}{1-2x} & si \quad x<0 \\ x^2-x-a & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

a) Obtenga el valor de a para que la función sea continua en $x=0$. Para ese valor de a, ¿sería derivable en $x=0$?.
b) Para $a=2$, estudie su monotonía y extremos relativos.
SOCIALES II. 2018 RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos a para que sea continua en $x=0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-}\left(\dfrac{2x+1}{1-2x}\right)=1 \\ \lim_{x\to 0^+}(x^2-x-a)=-a \end{array}\right\} \Rightarrow a=-1$$

La función que tenemos es: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+1}{1-2x} & si \quad x<0 \\ x^2-x+1 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{4}{(1-2x)^2} & si \quad x<0 \\ 2x-1 & si \quad x>0 \end{cases}$

Estudiamos la derivabilidad en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=4 \\ f'(0^+)=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0^-)\neq f'(0^+) \Rightarrow \text{ No es derivable en } x=0$$

b)

Igualamos la derivada a cero: $2x-1=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$

	$(-\infty,0)$	$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$	$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$
Signo $v'(t)$	+	−	+
Función	C	D	C

La función es creciente en $(-\infty,0)\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ y decreciente en $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$

Tiene un mínimo relativo en $\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{9}{4}\right)$ y un máximo (pico) en $(0,-2)$, donde la función no es derivable

a) Calcule la derivada de las funciones

$$f(x)=x\cdot\ln(x) \qquad g(x)=\frac{e^{3x}}{x^4+1}$$

b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $h(x)=x^2+6x+5$ en el punto de abscisa $x=-2$. Represente gráficamente la función h y la recta tangente hallada.

SOCIALES II. 2018. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCION A

R E S O L U C I Ó N

a)

$$f'(x)=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$$

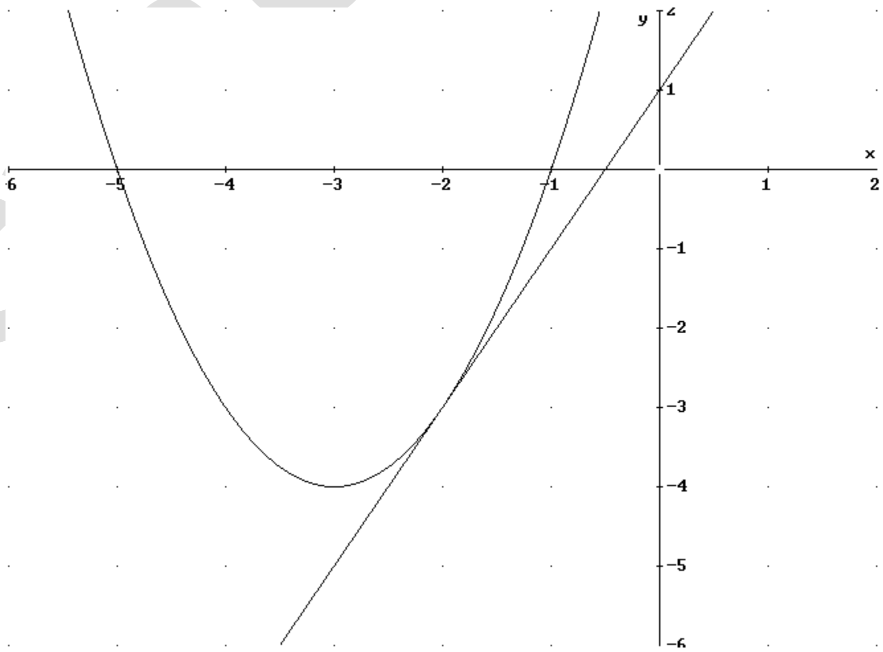
$$g'(x)=\frac{3\cdot e^{3x}(x^4+1)-e^{3x}\cdot 4x^3}{\left(x^4+1\right)^2}=\frac{e^{3x}(3x^4-4x^3+3)}{\left(x^4+1\right)^2}$$

b) La recta tangente en $x=-2$ es $y-h(-2)=h'(-2)\cdot(x+2)$

- $h(-2)=-3$
- $h'(x)=2x+6\Rightarrow h'(-2)=2$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y+3=2\cdot(x+2)\Rightarrow y=2x+1$

Dibujamos la parábola y la recta haciendo una tabla de valores



Se considera la función $f(x)=\dfrac{ax}{bx+1}$ con a y b números reales.
a) Calcule los valores de a y b, sabiendo que $f(-1)=1$ y que en el punto de abscisa $x=0$ la recta tangente a la gráfica de f es paralela a la recta $y=2x+1$.
b) Para $a=b=1$, halle la ecuación de sus asíntotas.
SOCIALES II. 2018 RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada de la función: $f(x)=\dfrac{ax}{bx+1} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{a\cdot(bx+1)-b\cdot ax}{(bx+1)^{2}}$

- $f(-1)=1 \Rightarrow \dfrac{-a}{-b+1}=1 \Rightarrow -a+b=1$

En $x=0$ la recta tangente tiene la misma pendiente que $y=2x+1$ por ser paralela, luego:

- $f'(0)=2 \Rightarrow \dfrac{a}{1}=2 \Rightarrow a=2$

Resolviendo el sistema sale que: $a=2$; $b=3$

b) Calculamos las asíntotas de la función: $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$.

Verticales: $x=-1$, ya que: $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x}{x+1}=\infty$ y $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x}{x+1}=-\infty$

Horizontales: $y=1$, ya que: $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{\infty}{\infty}=1$

Oblicuas: No tiene, ya que tiene asíntota horizontal.

Los costes de producción de una empresa, en miles de euros, dependen de la cantidad de producto fabricada *x*, medida en toneladas, según la función $f(x) = 30 - 9x + 6x^2 - x^3$. La capacidad máxima de producción es de 2 toneladas.
a) Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función de costes de la empresa.
b) Determine la cantidad que la empresa debe producir para minimizar los costes. ¿Cuál sería dicho coste mínimo?
c) ¿Con qué producción la empresa tiene unos costes de producción máximos?
SOCIALES II. 2018 RESERVA 3. EJERCICIO 2 OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

$$f'(x) = -9 + 12x - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \; ; \; x = 3$$

	$(0,1)$	$(1,2)$
Signo $f'(x)$	$-$	$+$
Función	D	C

Decreciente: $(0,1)$. Creciente: $(1,2)$

b) Para $x = 1$ el coste es mínimo y vale 26.000 €

c) Como $f(0) = 30$; $f(1) = 26$; $f(2) = 28$, entonces, el máximo es para $x = 0$ y vale 30.000 €

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} ax+1 & si \quad x\le -1 \\ \dfrac{x}{x+2} & si \quad -1<x\le 0 \\ x^2-bx & si \quad x>0 \end{cases}$

a) Calcule *a* y *b* para que la función sea continua y derivable en $x=-1$ **y** $x=0$

b) Para $a=2$ **y** $b=-\dfrac{1}{2}$ **estudie su monotonía.**

SOCIALES II. 2018. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Por ser continua en $x=-1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-}(ax+1)=-a+1 \\ \lim\limits_{x\to -1^+}\left(\dfrac{x}{x+2}\right)=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow -a+1=-1 \Rightarrow a=2$

Por ser continua en $x=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{x}{x+2}\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}(x^2-bx)=0 \end{array}\right\}$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} a & si \quad x\le -1 \\ \dfrac{2}{(x+2)^2} & si \quad -1<x\le 0 \\ 2x-b & si \quad x>0 \end{cases}$

Por ser derivable en $x=-1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(-1^-)=2 \\ f'(-1^+)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(-1^-)=f'(-1^+) \Rightarrow$ Derivable:

Por ser derivable en $x=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(0^-)=\dfrac{1}{2} \\ f'(0^+)=-b \end{array}\right\} \Rightarrow b=-\dfrac{1}{2}$. Luego, $a=2$ y $b=-\dfrac{1}{2}$

b) Calculamos la función derivada y la igualamos a cero: $f'(x)=\begin{cases} 2 & si \quad x\le -1 \\ \dfrac{2}{(x+2)^2} & si \quad -1<x\le 0 \\ 2x+\dfrac{1}{2} & si \quad x>0 \end{cases}$

Igualamos la derivada a cero: $2x+\dfrac{1}{2}=0 \Rightarrow x=-\dfrac{1}{4}$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,+\infty)$
Signo $f'(x)$	+	+	+
Función	C	C	C

La función es creciente en su dominio $(-\infty,+\infty)$

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-5}{x-4} & si \quad x<3 \\ -x^2+7x-10 & si \quad x\geq 3 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función *f*

b) Calcule los puntos de corte de la gráfica de *f* con los ejes de coordenadas.

c) Calcule las asíntotas de *f*, en caso de que existan.

SOCIALES II. 2018 RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) La función $\dfrac{x-5}{x-4}$ es continua y derivable en $\mathbb{R}-\{4\}$. La función $-x^2+7x-10$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, debemos estudiar la continuidad y derivabilidad en $x=3$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x-5}{x-4}=2 \\ \lim\limits_{x\to 3^+}(-x^2+7x-10)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(3)=\lim_{x\to 3} f(x)=2 \Rightarrow \text{Continua en } x=3$$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{(x-4)^2} & si \quad x<3 \\ -2x+7 & si \quad x>3 \end{cases}$ y como:

$$\left.\begin{array}{l} f'(3^-)=1 \\ f'(3^+)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(3^-)=f'(3^+) \Rightarrow \text{Derivable en } x=3$$

Luego la función $f(x)$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$

b) Puntos de corte con el eje X

$$\frac{x-5}{x-4}=0 \Rightarrow x=5 \Rightarrow (5,0) \text{ Pero no está en su dominio.}$$

$$-x^2+7x-10=0 \Rightarrow x=5\ ;\ x=2 \Rightarrow (5,0)\text{, ya que } (2,0) \text{ no está en su dominio}$$

Puntos de corte con el eje Y

$$y=\frac{0-5}{0-4}=\frac{5}{4} \Rightarrow \left(0,\frac{5}{4}\right)$$

$$y=-0^2+7\cdot 0-10=-10 \Rightarrow (0,-10) \text{ Pero no está en su dominio}$$

c) Calculamos las asíntotas.

La recta $x=4$ es una asíntota vertical de la función $\dfrac{x-5}{x-4}$, pero no está en su dominio

La recta $y=1$ es una asíntota horizontal, ya que: $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x-5}{x-4}=\dfrac{-\infty}{-\infty}=1$

No tiene oblicua al tener asíntota horizontal.

La función $-x^2+7x-10$ al ser polinómica, no tiene asíntotas.

a) Calcule la derivada de las funciones

$$f(x)=e^{5x}\cdot(x^2-5)^3 \qquad g(x)=\frac{(x^3+1)^2}{\ln(x^2+2)}$$

b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $h(x)=\dfrac{x+10}{x+5}$ en el punto de abscisa $x=0$

SOCIALES II. 2018. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCION B

R E S O L U C I Ó N

a)

$$f'(x)=5\cdot e^{5x}\cdot(x^2-5)^3+e^{5x}\cdot 3(x^2-5)^2\cdot 2x=e^{5x}\cdot(x^2-5)^2\left[5x^2+6x-25\right]$$

$$g'(x)=\frac{2\cdot(x^3+1)\cdot 3x^2\cdot\ln(x^2+2)-(x^3+1)^2\cdot\dfrac{2x}{(x^2+2)}}{\left(\ln(x^2+2)\right)^2}$$

b) La recta tangente en $x=0$ es $y-h(0)=h'(0)\cdot(x-0)$

- $h(0)=\dfrac{10}{5}=2$
- $h'(x)=\dfrac{1\cdot(x+5)-1\cdot(x+10)}{(x+5)^2}=\dfrac{-5}{(x+5)^2}\Rightarrow h'(0)=-\dfrac{1}{5}$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y-2=-\dfrac{1}{5}x\Rightarrow x+5y-10=0$

El consumo de cereales en una ciudad, en miles de toneladas, viene dado por la función $c(t)=t^3-15t^2+63t+10$, para $0\le t\le 12$, donde t representa el tiempo.
a) ¿En qué instante se alcanza el máximo consumo de cereales y cuántas toneladas se consumen en ese momento?.
b) ¿En qué intervalo de tiempo decrece el consumo de cereales?.
c) Represente gráficamente la función.
SOCIALES II. 2018. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada de la función y la igualamos a cero.

$$c'(t)=3t^2-30t+63=0\Rightarrow t=3\ ;\ t=7$$

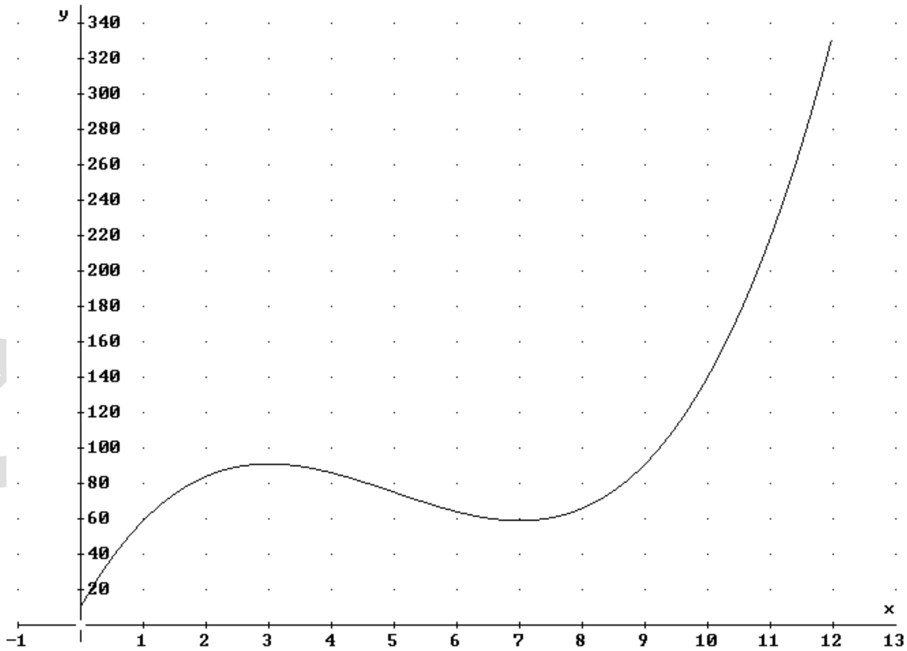
El máximo puede estar en los extremos del intervalo $t=0$ y $t=12$, y también en las soluciones de $c'(t)=0$.

$$c(0)=10\ \ ;\ \ c(12)=334\ \ ;\ \ c(3)=91\ \ ;\ \ c(7)=59$$

Luego, el máximo consumo de cereales corresponde a $t=12$ y se consumieron 334.000 toneladas

b) El consumo de cereales decrece en el intervalo $(3,7)$

c) Hacemos la gráfica de la función



El beneficio, en miles de euros, que ha obtenido una almazara a lo largo de 50 años viene dado por la expresión: $B(t)=\begin{cases} -0.04t^2+2.4t & si \quad 0\le t<40 \\ \dfrac{40t-320}{t} & si \quad 40\le t\le 50\end{cases}$

Donde t es el tiempo transcurrido.

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función $B(t)$ en el intervalo $[0,50]$.

b) Estudie la monotonía de la función $B(t)$ y determine en qué momento fueron mayores los beneficios de la almazara, así como el beneficio máximo.

c) Represente la gráfica de la función y explique la evolución del beneficio.

SOCIALES II. 2018. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCION B

R E S O L U C I Ó N

a) La función $-0'04t^2+2'4t$ por ser polinómica, es continua y derivable en $\mathbb{R}$. La función $\dfrac{40t-320}{t}$ es continua y derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$. Estudiamos la continuidad en $t=40$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to 40^-}(-0'04t^2+2'4t)=32 \\ \lim\limits_{t\to 40^+}\left(\dfrac{40t-320}{t}\right)=32 \end{array}\right\} \Rightarrow B(40)=\lim_{t\to 40}B(t)=32 \Rightarrow \text{ Es continua}$$

Estudiamos la derivabilidad en $t=40$

Calculamos la función derivada: $B'(t)=\begin{cases} -0'08t+2'4 & si \quad 0\le t<40 \\ \dfrac{320}{t^2} & si \quad 40<t\le 50\end{cases}$ y como:

$$\left.\begin{array}{l} B'(40^-)=-0'8 \\ B'(40^+)=0'2 \end{array}\right\} \Rightarrow B'(40^-)\ne B'(40^+) \Rightarrow \text{No derivable en } t=40$$

Luego, la función es continua en $[0,50]$ y derivable en $[0,40)\cup(40,50]$

b) El máximo puede estar en los extremos del intervalo $t=0$ y $t=50$, y también en las soluciones de $B'(t)=0$ y donde no es derivable $t=40$.

$$B(0)=0 \;\; ; \;\; B(50)=33'6 \;\; ; \;\; B'(t)=-0'08t+2'4=0 \Rightarrow t=30 \Rightarrow B(30)=36 \;\; ; \;\; B(40)=32$$

Luego, el máximo beneficio fue de 36.000 € y corresponde a $t=30$

La función es creciente en el intervalo $[0,30)\cup(40,50]$ y decreciente en el intervalo $(30,40)$

c)