EMESTRADA
EXÁMENES DE SELECTIVIDAD

**PROBLEMAS RESUELTOS**
**SELECTIVIDAD ANDALUCÍA**
**2011**

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

**a) Calcule la función derivada de $f(x)=\dfrac{e^{-2x}}{(-x^2+2)^2}$**

**b) Se sabe que la expresión que representa el número medio de clientes $N(t)$ que acuden un día a una cadena de almacenes, en función del número de horas $t$ que llevan abiertos, es $N(t)=a\cdot t^2+b\cdot t$ , $0\le t\le 8$ , $a,b\in\mathbb{R}$ .**

**Sabiendo que el máximo de clientes que han acudido ese día ha sido de 160 y que se ha producido a las 4 horas de abrir, calcule *a* y *b*.**

**SOCIALES II. 2011. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A**

R E S O L U C I Ó N

a)

$$f'(x)=\frac{-2e^{-2x}(-x^2+2)^2-2\cdot(-2x)(-x^2+2)\cdot e^{-2x}}{(-x^2+2)^4}=\frac{-2e^{-2x}(-x^2+2)-2\cdot(-2x)\cdot e^{-2x}}{(-x^2+2)^3}=$$

$$=\frac{-2e^{-2x}(-x^2+2-2x)}{(-x^2+2)^3}=\frac{2e^{-2x}(x^2+2x-2)}{(-x^2+2)^3}$$

b) El problema nos dice que la función tiene un máximo en el punto $(4,160)$, con lo cual se verifica que:

$$N(4)=160\Rightarrow 16a+4b=160$$

$$N'(4)=0\Rightarrow 8a+b=0$$

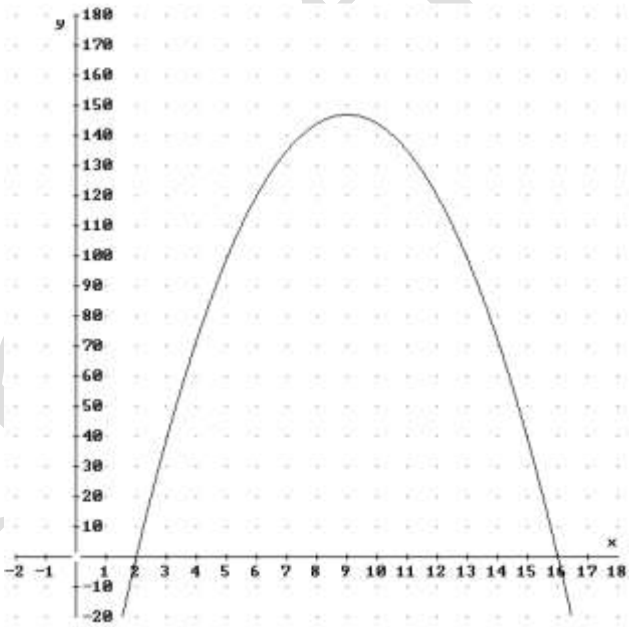
Resolviendo el sistema obtenemos que: $a=-10$ ; $b=80$

**Las funciones $I(t) = -2t^2 + 51t$ y $G(t) = t^2 - 3t + 96$ con $0 \le t \le 8$ representan, respectivamente, los ingresos y gastos de una empresa, en miles de euros, en función de los años, $t$, transcurridos desde su inicio y en los últimos 18 años.**
**a) ¿Para qué valores de *t*, desde su entrada en funcionamiento, los ingresos coincidieron con los gastos?**
**b) Determine la función que refleje los beneficios (ingresos menos gastos) en función de *t* y represéntela gráficamente.**
**c) ¿Al cabo de cuántos años, desde su entrada en funcionamiento ,los beneficios fueron máximos?. Calcule el valor de ese beneficio.**
**SOCIALES II. 2011. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B**

R E S O L U C I Ó N

a)
$$I(t) = G(t) \Rightarrow -2t^2 + 51t = t^2 - 3t + 96 \Rightarrow 3t^2 - 54t + 96 = 0 \Rightarrow t = 2 \;\; y \;\; t = 16$$

b) $B = I(t) - G(t) = -2t^2 + 51t - t^2 + 3t - 96 \Rightarrow -3t^2 + 54t - 96$




c) Calculamos el máximo.

$$B' = -6t + 54 = 0 \Rightarrow t = 9$$

El máximo corresponde a los 9 años y el beneficio obtenido es: $B(9) = -3 \cdot 9^2 + 54 \cdot 9 - 96 = 147$

**Sea la función** $f(x)=\begin{cases} -x+4 & si \quad x<2 \\ \dfrac{4}{x} & si \quad 2\le x<4 \\ x^2-4x+1 & si \quad x\ge 4 \end{cases}$

**a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de *f*.**
**b) Determine los extremos locales de *f*.**
**c) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=3$.**
**SOCIALES II. 2011. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A**

R E S O L U C I Ó N

a) La función $-x+4$ es continua y derivable para todos los valores; la función $\dfrac{4}{x}$ es continua y derivable para todos los valores excepto en $x=0$; la función $x^2-4x+1$ es continua y derivable para todos los valores. Vamos a estudiar si la función $f(x)$ es continua y derivable en $x=2$ y $x=4$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-}(-x+4)=2 \\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{4}{x}=2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(2)=\lim_{x\to 2} f(x)=2 \Rightarrow \text{Continua en } x=2$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{4}{x}=1 \\ \lim\limits_{x\to 4^+}(x^2-4x+1)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(4)=\lim_{x\to 4} f(x)=1 \Rightarrow \text{Continua en } x=4$$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} -1 & si \quad x<2 \\ -\dfrac{4}{x^2} & si \quad 2<x<4 \\ 2x-4 & si \quad x>4 \end{cases}$ y como:

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-)=-1 \\ f'(2^+)=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(2^-)=f'(2^+) \Rightarrow \text{Derivable en } x=2$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(4^-)=-\dfrac{1}{4} \\ f'(4^+)=4 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(4^-)\neq f'(4^+) \Rightarrow \text{No derivable en } x=4$$

Luego la función *f(x)* es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{4\}$

b) La función $f(x)=-x+4$ es la ecuación de una recta de pendiente $-1$, por lo tanto, es decreciente en el intervalo $(-\infty,2)$. La función $f(x)=\dfrac{4}{x}$ es una hipérbola, que es decreciente en el intervalo $[2,4)$. La función $f(x)=x^2-4x+1$ es una parábola y en el intervalo $[4,+\infty)$ es creciente. Por lo tanto, la función tiene un mínimo relativo en el punto $(4,1)$.

c) La ecuación de la tangente es: $y-f(3)=f'(3)\cdot(x-3) \Rightarrow y-\dfrac{4}{3}=-\dfrac{4}{9}(x-3) \Rightarrow 4x+9y-24=0$

**Calcule las derivadas de las siguientes funciones:**

$$f(x)=\frac{2^x+x^2}{x} \quad ; \quad g(x)=\left(x^2+1\right)^2\cdot\ln\left(e^{3x}+4\right) \quad ; \quad h(x)=\frac{1}{3x}-\frac{5}{x^2-2}$$

**SOCIALES II. 2011. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B**

R E S O L U C I Ó N

$$f'(x)=\frac{(2^x\ln 2+2x)\cdot x-1\cdot(2^x+x^2)}{x^2}=\frac{2^x\cdot x\cdot\ln 2+2x^2-2^x-x^2}{x^2}=\frac{2^x(x\ln 2-1)+x^2}{x^2}$$

$$g'(x)=2\cdot\left(x^2+1\right)\cdot 2x\cdot\ln\left(e^{3x}+4\right)+\frac{3e^{3x}}{e^{3x}+4}\left(x^2+1\right)^2=\left(x^2+1\right)\left[4x\cdot\ln\left(e^{3x}+4\right)+\frac{3e^{3x}\left(x^2+1\right)}{e^{3x}+4}\right]$$

$$h'(x)=\frac{-3}{(3x)^2}-\frac{-2x\cdot 5}{(x^2-2)^2}=-\frac{1}{3x^2}+\frac{10x}{(x^2-2)^2}$$

**Tras un test realizado a un nuevo modelo de automóvil, se ha observado que el consumo de gasolina, $c(x)$ , expresado en litros, viene dado por la función**

$$c(x) = 7.5 - 0.05x + 0.00025x^2$$

**siendo $x$ la velocidad en Km/h y $25 \leq x \leq 175$**
**a) Determine el consumo de gasolina a las velocidades de 50 Km/h y 150 Km/h.**
**b) Estudie el crecimiento y decrecimiento de la función $c(x)$.**
**c) ¿A qué velocidades de ese intervalo se obtiene el mínimo consumo y el máximo consumo y cuáles son éstos?.**
**SOCIALES II. 2011. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A**

R E S O L U C I Ó N

a) $c(50) = 7'5 - 0'05 \cdot 50 + 0'00025 \cdot 50^2 = 5'625\ L$

$c(150) = 7'5 - 0'05 \cdot 150 + 0'00025 \cdot 150^2 = 5'625\ L$

b) Calculamos la derivada y la igualamos a cero.

$$c'(x) = -0'05 + 0.0005x = 0 \Rightarrow x = 100$$

| | (25,100) | (100,175) |
|---|---|---|
| Signo $c'(x)$ | $-$ | + |
| Función | D | C |

$\downarrow$
Mínimo $(100,5)$

c)
$c(25) = 7'5 - 0'05 \cdot 25 + 0'00025 \cdot 25^2 = 6'40625\ L$

$c(100) = 7'5 - 0'05 \cdot 100 + 0'00025 \cdot 100^2 = 5\ L$

$c(175) = 7'5 - 0'05 \cdot 175 + 0'00025 \cdot 175^2 = 6'40625\ L$

El consumo máximo es 6’40625 litros y se alcanza a las velocidades de 35 Km/h y 175 Km/h.

El consumo mínimo es 5 litros y se alcanza a la velocidad de 100 Km/h.

**Se considera la función dada por** $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{2}{x+2} & \text{si} \quad x\le 0 \\ \dfrac{2}{x-2} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

**a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de *f*.**
**b) Halle las ecuaciones de las asíntotas de esta función.**
**SOCIALES II. 2011. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B**

R E S O L U C I Ó N

a) La función $-\dfrac{2}{x+2}$ es continua en $\mathbb{R}-\{-2\}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{-2\}$. La función $\dfrac{2}{x-2}$ es continua en $\mathbb{R}-\{2\}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{2\}$. Por lo tanto, debemos estudiar la continuidad y derivabilidad en $x=0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} -\dfrac{2}{x+2}=-1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2}{x-2}=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=-1 \Rightarrow \text{Continua en } x=0$$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{(x+2)^2} & si \quad x<0 \\ -\dfrac{2}{(x-2)^2} & si \quad x>0 \end{cases}$ y como:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=\dfrac{1}{2} \\ f'(0^+)=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0^-)\neq f'(0^+) \Rightarrow \text{No derivable en } x=0$$

Luego la función *f(x)* es continua en $\mathbb{R}-\{-2,2\}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{0,-2,2\}$

b)

La recta $x=-2$ es una asíntota vertical, ya que: $\lim\limits_{x\to -2} -\dfrac{2}{x+2}=\infty$

La recta $x=2$ es una asíntota vertical, ya que: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2}{x-2}=\infty$

La recta $y=0$ es una asíntota horizontal, ya que: $\lim\limits_{x\to -\infty} -\dfrac{2}{x+2}=\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2}{x-2}=0$

**Un banco lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad $R(x)$, en miles de euros, viene dada en función de la cantidad, *x*, que se invierte, también en miles de euros, por la siguiente expresión:**

$$R(x) = -0.001x^2 + 0.4x + 3.5 \quad \text{con } x \geq 10$$

**a) Calcula la rentabilidad para una inversión de 100000 euros.**
**b) Deduzca y razone qué cantidad habría que invertir para obtener la máxima rentabilidad.**
**c) ¿Qué rentabilidad máxima se obtendría?.**
**SOCIALES II. 2011. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A**

R E S O L U C I Ó N

a) Como la función está dada en miles de euros, entonces $x = 100$

$$R(100) = -0'001 \cdot 100^2 + 0'4 \cdot 100 + 3'5 = 33'5 \Rightarrow 33500 \text{ €}$$

b y c) Calculamos la derivada y la igualamos a cero, para hallar el vértice de la parábola.

$$R'(x) = -0'002x + 0'4 = 0 \Rightarrow x = 200$$

La máxima rentabilidad estará en el vértice de la parábola o en el extremo $x = 10$

$$R(10) = -0'001 \cdot 10^2 + 0'4 \cdot 10 + 3'5 = 7'4 \Rightarrow 7400 \text{ €}$$

$$R(200) = -0'001 \cdot 200^2 + 0'4 \cdot 200 + 3'5 = 43'5 \Rightarrow 43500 \text{ €}$$

Luego, la máxima rentabilidad es de 43.500 € y se obtiene con una inversión de 200.000 €.

**Sea la función** $f(x)=\begin{cases} \mathbf{1-2x^2} & \mathbf{si \quad x\le 1} \\ \mathbf{x^2-2ax+3} & \mathbf{si \quad 1<x\le 3} \\ \mathbf{-x^2+8x-15} & \mathbf{si \quad x>3}\end{cases}$

**a) Calcule el valor de *a* para que *f* sea continua en $x=1$.**
**b) Para $a=2$ estudie la continuidad y la derivabilidad de *f*.**
**SOCIALES II. 2011. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B**

R E S O L U C I Ó N

a) Como es continua en $x=1$, se cumple que:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} 1-2x^2=-1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} x^2-2ax+3=4-2a \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} = \lim\limits_{x\to 1^+} \Rightarrow -1=4-2a \Rightarrow a=\frac{5}{2}$$

b) La función que tenemos es: $f(x)=\begin{cases} 1-2x^2 & si \quad x\le 1 \\ x^2-4x+3 & si \quad 1<x\le 3 \\ -x^2+8x-15 & si \quad x>3\end{cases}$

En $x=1$ la función no es continua, ya que el valor de a era $a=\frac{5}{2}$. Estudiamos en $x=3$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} x^2-4x+3=0 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} -x^2+8x-15=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(3)=\lim\limits_{x\to 3} f(x)=0 \Rightarrow \text{ Es continua}$$

En $x=1$ la función no es derivable ya que no es continua. Estudiamos la derivabilidad en $x=3$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} -4x & si \quad x<1 \\ 2x-4 & si \quad 1<x<3 \\ -2x+8 & si \quad x>3\end{cases}$ y como:

$$\left.\begin{array}{l} f'(3^-)=2 \\ f'(0^+)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(3^-)=f'(3^+) \Rightarrow \text{Derivable en } x=3$$

Luego la función *f(x)* es continua en $\mathbb{R}-\{1\}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{1\}$

**El beneficio, en miles de euros, alcanzado en una tienda de ropa el pasado año, viene dado por la función $B(t)$ expresada a continuación**

$$B(t)=\begin{cases} \frac{1}{8}t^2-t+5 & si \quad 0\le t\le 6 \\ \frac{t+1}{2} & si \quad 6<t\le 12 \end{cases}$$ **, $t$ es el tiempo transcurrido en meses**

**a) Estudie la derivabilidad de la función al cabo de 6 meses.**
**b) ¿Cuándo fue mínimo el beneficio?. ¿Cuál fue dicho beneficio?.**
**c) Represente gráficamente la función $B(t)$. ¿Cuándo fue máximo el beneficio?. ¿A cuánto ascendió?.**
**SOCIALES II. 2011. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A**

R E S O L U C I Ó N

a) Estudiamos primero la continuidad en $t=6$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{t\to 6^-} \frac{1}{8}t^2-t+5=\frac{7}{2} \\ \lim_{t\to 6^+} \frac{t+1}{2}=\frac{7}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow B(6)=\lim_{t\to 6} B(t)=\frac{7}{2}\Rightarrow \text{Es continua}$$

Estudiamos la derivabilidad en $t=6$

Calculamos la función derivada: $B'(t)=\begin{cases} \frac{t}{4}-1 & si \quad 0\le x<6 \\ \frac{1}{2} & si \quad 0<x\le 12 \end{cases}$ y como:

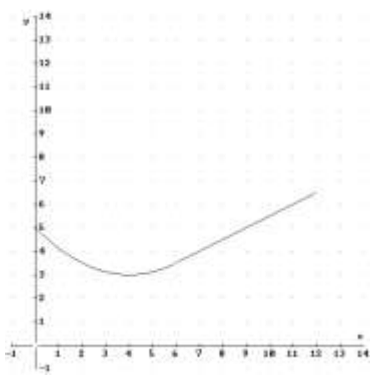
$$\left.\begin{array}{l} B'(6^-)=\frac{1}{2} \\ B'(6^+)=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow B'(6^-)=B'(6^+)\Rightarrow \text{Derivable en } t=6$$

b) El mínimo pueden estar en los extremos del intervalo $t=0$ y $t=12$, y también en las soluciones de $B'(t)=0$.

$$B(0)=5 \;\; ; \;\; B(12)=6'5 \;\; ; \;\; B'(t)=\frac{t}{4}-1=0\Rightarrow t=4\Rightarrow B(4)=3$$

Luego, el mínimo beneficio fue de 3000 € y corresponde a $t=4$

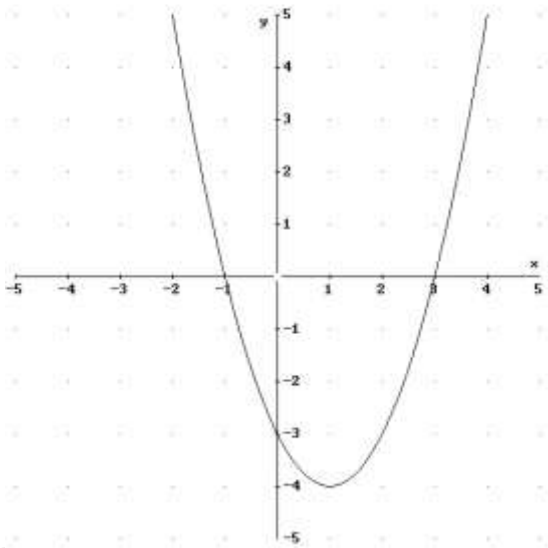
c) El máximo beneficio fue de 6500 € y corresponde a $t=12$. La representación gráfica de la función es:



**a) La gráfica de la función derivada, $f$ ’, de una función $f$ es una parábola que corta al eje OX en los puntos $(-1,0)$ y $(3,0)$, y tiene su vértice en $(1,-4)$.**
**Estudie, a partir de ella, la monotonía de la función $f$ e indique la abscisa de cada extremo relativo.**
**b) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x)=-2e^{3x}$ en el punto de abscisa $x=0$**
**SOCIALES II. 2011. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B**

R E S O L U C I Ó N

a) Hacemos la representación gráfica de la función derivada.




Vemos que $f'(x)$ es positiva en el intervalo $(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$, luego en ese intervalo $f(x)$ será creciente.
Vemos que $f'(x)$ es negativa en el intervalo $(-1,3)$, luego en ese intervalo $f(x)$ será decreciente.

| | $(-\infty,-1)$ | $(-1,3)$ | $(3,\infty)$ |
|---|---|---|---|
| Signo $f'$ | + | – | + |
| Función | C | D | C |

Máximo $x=-1$ mínimo $x=3$

b) La recta tangente en $x=0$ es $y-g(0)=g'(0)\cdot(x-0)$

$$g(0)=-2$$

$$g'(x)=-6e^{3x}\Rightarrow g'(0)=-6$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y+2=-6\cdot(x-0)\Rightarrow y=-6x-2$

**a) Halle el dominio, los puntos de corte con los ejes, y las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{4x}{2x+1}$**

**b) Halle los intervalos de monotonía, los extremos relativos, los intervalos de curvatura y los puntos de inflexión de la función $g(x)=x^3+3x^2+3x$.**

**SOCIALES II. 2011. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A**

R E S O L U C I Ó N

a) El dominio de la función *f(x)* es $\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

Asíntotas Verticales: $x=-\dfrac{1}{2}$.

Asíntotas Horizontales: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{4x}{2x+1}=\dfrac{\infty}{\infty}=\dfrac{4}{2}=2 \Rightarrow y=2$

Asíntota Oblicua: No tiene

Corte eje X $\Rightarrow y=0\Rightarrow 4x=0\Rightarrow x=0\Rightarrow(0,0)$
Corte eje Y $\Rightarrow x=0\Rightarrow y=0\Rightarrow(0,0)$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

$$g'(x)=3x^2+6x+3=0\Rightarrow x=-1$$

| | $(-\infty,-1)$ | $(-1,\infty)$ |
|---|---|---|
| Signo g ' | + | + |
| Función | C | C |

La función es creciente en su dominio. No tiene máximos ni mínimos.

Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero.

$$g''(x)=6x+6=0\Rightarrow x=-1$$

| | $(-\infty,-1)$ | $(-1,\infty)$ |
|---|---|---|
| Signo g ´´ | $-$ | + |
| Función | Cn | Cx |

La función es cóncava en $(-\infty,-1)$ y convexa en $(-1,\infty)$. Su punto de inflexión es $(-1,-1)$

**Sea la función** $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+4 & si \quad x\le 2 \\ 4-\dfrac{a}{x} & si \quad x>2 \end{cases}$

**a) Halle el valor de *a* para que dicha función sea continua y estudie la derivabilidad de *f* para ese valor de *a*.**

**b) Para $a=1$, ¿existe alguna asíntota vertical de esa función? ¿Y horizontal?. Razone las respuestas y calcule, en caso afirmativo, dichas asíntotas.**

**SOCIALES II. 2011. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B**

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} x^2-3x+4=2 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} 4-\dfrac{a}{x}=4-\dfrac{a}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x) \Rightarrow 2=4-\frac{a}{2} \Rightarrow a=4$$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} 2x-3 & si \quad x<2 \\ \dfrac{4}{x^2} & si \quad x>2 \end{cases}$ y como:

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-)=1 \\ f'(2^+)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(2^-)=f'(2^+) \Rightarrow \text{Es derivable en } x=2$$

Luego, la función es derivable en $\mathbb{R}$.

b) La función $x^2-3x+4$ es polinómica, por lo tanto, no tiene asíntotas. La función $4-\dfrac{1}{x}$, tendría una asíntota vertical en $x=0$, pero está fuera de su dominio. Tiene una asíntota horizontal

Asíntota Horizontal: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 4-\dfrac{1}{x}=4-\dfrac{1}{\infty}=4 \Rightarrow y=4$