SOLUCIONARIO

FÍSICA
2.º BACHILLERATO

2

McGraw Hill

MADRID - BARCELONA - BUENOS AIRES - CARACAS
GUATEMALA - LISBOA - MÉXICO - NUEVA YORK - PANAMÁ
SAN JUAN - BOGOTÁ - SANTIAGO - SÃO PAULO
AUCKLAND - HAMBURGO - LONDRES - MILÁN - MONTREAL
NUEVA DELHI - PARÍS - SAN FRANCISCO - SIDNEY - SINGAPUR
ST. LOUIS - TOKIO - TORONTO

ÍNDICE

Actividades

1. ¿Qué se entiende por periodo y frecuencia de un movimiento circular uniforme? ¿Y de un movimiento vibratorio?

En un movimiento circular uniforme, se define el periodo como el tiempo que tarda la partícula en dar una vuelta a la circunferencia. La frecuencia sería el número de vueltas completas en un segundo.

En el movimiento vibratorio, periodo es el tiempo que tarda la partícula en dar una vibración completa. La frecuencia viene dada por el número de vibraciones completas en un segundo.

2. ¿Cuándo se produce un movimiento oscilatorio?

Un cuerpo que tenga una posición de equilibrio estable puede realizar oscilaciones alrededor de dicho punto. Cuando el cuerpo es desplazado una pequeña distancia de la posición de equilibrio en cualquier sentido, experimentará una fuerza que le obligará a regresar a dicha posición. Esta fuerza recibe el nombre de fuerza recuperadora. A medida que el cuerpo se acerca a la posición de equilibrio, la fuerza recuperadora disminuye gradualmente hasta anularse en el punto de equilibrio. Aunque la fuerza sea cero, por la Ley de la Inercia el cuerpo continúa moviéndose y supera la posición de equilibrio, de manera que se vuelve a desarrollar una fuerza recuperadora dirigida siempre hacia la posición de equilibrio, que frena el cuerpo hasta detenerlo momentáneamente y dirigirlo nuevamente hacia la posición de equilibrio. En ausencia de rozamiento, este movimiento de vaivén se repite indefinidamente.

El movimiento armónico simple es característico de los cuerpos elásticos y se distingue de un movimiento oscilatorio cualquiera en que la fuerza recuperadora produce una aceleración proporcional a la elongación.

3. ¿Qué tiempo emplea una partícula oscilante en desplazarse desde un extremo al otro extremo de la oscilación?

La distancia comprendida entre los dos puntos extremos del desplazamiento es una semioscilación. Por tanto, de acuerdo con la definición de periodo, tardará en ir de un extremo al otro la mitad de un periodo.

4. La ecuación del m.a.s. puede escribirse en seno o en coseno. ¿En qué se diferencian ambas formas?

Un movimiento armónico viene dado por:

$$x = 0{,}3 \text{ sen} \left(20\,t + \frac{\pi}{3}\right)$$

en unidades del SI. Escribe la ecuación de este movimiento utilizando el coseno.

El m.a.s. se puede expresar tanto en seno como en coseno, si utilizamos un desfase de 90°. Por tanto, se cumple:

$$x = 0{,}3 \cos \left(20\,t + \frac{\pi}{3}\right) = 0{,}3 \cos \left(20\,t - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 0{,}3 \cos \left(20\,t - \frac{\pi}{6}\right)$$

5. Una partícula realiza 20 vibraciones en un segundo. ¿Cuánto vale su periodo? ¿Y su frecuencia angular?

Aplicamos la relación que existe entre la frecuencia y el periodo: $T\,f = 1$.

$$T = \frac{1}{20 \text{ s}^{-1}} = 0{,}05 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = 6{,}28 \cdot 20 \text{ s}^{-1} = 125{,}6 \text{ rad/s}$$

6. El movimiento de una partícula viene dado por la ecuación $x = 0{,}4 \text{ sen} \left(\pi \dfrac{t}{2}\right)$ en unidades del SI. Calcula:

***a)* Las constantes de dicho movimiento.**

***b)* ¿Con qué frecuencia vibra la partícula?**

***c)* Calcula la posición de la partícula en los instantes que se indican en la tabla siguiente:**

***t* (s)**	0	1	2	3	4	5
***x* (m)**						

***d)* Representa los valores de dicha tabla en un diagrama *x – t*. ¿Cada cuánto tiempo se repite el movimiento?**

a) Las constantes del movimiento (A, ω, φ) se obtienen comparando la ecuación que nos dan:

$$x = 0{,}4 \text{ sen} \left(\frac{\pi}{2}\,t\right)$$

con la ecuación general del m.a.s.: $x = A \text{ sen } (\omega t + \varphi)$

Por tanto, se cumple que:
– La amplitud es $A = 0{,}4$ m.

– La frecuencia angular: $\omega = \dfrac{\pi}{2}$ rad/s.

– La fase inicial: $\varphi = 0°$.

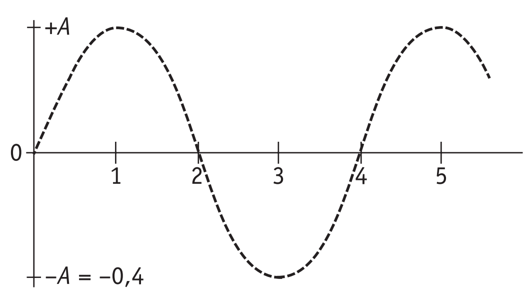
b) La frecuencia se obtiene de $\omega = 2\pi f$.

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi} = 0{,}25 \text{ Hz}$$

c) Las posiciones en distintos instantes son:

***t* (s)**	0	1	2	3	4	5
***x* (m)**	0	0,4	0	–0,4	0	0,4

d) La representación gráfica de la tabla:



Para $t = 0$, $x = 0$; para $t = 1$, $x = 0{,}4 \text{ sen } 90° \cdot 1 = 0{,}4 \text{ m} = A$
Para $t = 2$, $x = 0{,}4 \text{ sen } 180° = 0$

Para $t = 3$, $x = 0{,}4$ sen 270° = –0,4 m = $-A$
Para $t = 4$, $x = 0{,}4$ sen 360° = 0
Para $t = 5$, $x = 0{,}4$ sen 450° = 0,4 m = A
De acuerdo con esta gráfica, el movimiento se repite a los 4 s.
Esto se confirma utilizando el valor de la frecuencia:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}25\ \text{s}^{-1}} = 4\ \text{s}$$

7. Escribe la ecuación de un oscilador, sabiendo que se mueve entre dos puntos distantes entre sí 10 cm y que tiene una frecuencia de 20 Hz, con una fase inicial de 45°.

PAU

De acuerdo con el enunciado conocemos:

– La amplitud: $A = \dfrac{10\ \text{cm}}{2} = 5\ \text{cm} = 0{,}05\ \text{m}$.

– La frecuencia: $f = 20$ Hz; $\omega = 2\pi f = 40\pi$ rad/s.

– La fase inicial: $\varphi = 45°$.

Por tanto, la ecuación del movimiento será:

$$x = A\ \text{sen}\ (\omega\, t + \varphi) = 0{,}05\ \text{sen}\ (40\pi\, t + 45°)$$

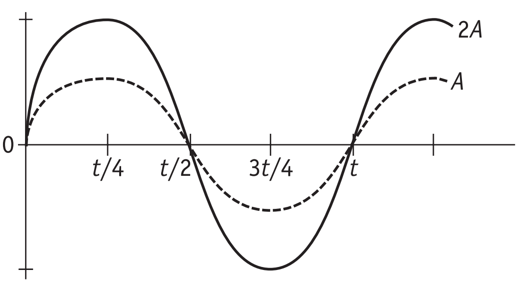
8. Representa en un mismo diagrama $x - t$ dos m.a.s. del mismo periodo pero uno de doble amplitud que el otro:

a) **Si inician el movimiento desde la posición de equilibrio.**

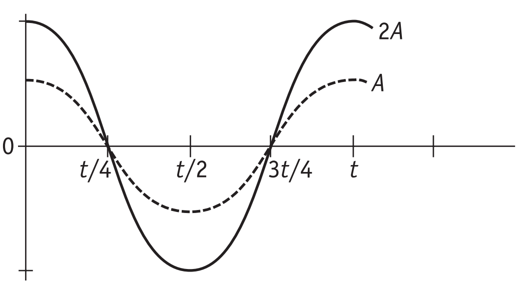
b) **Si inician el movimiento desde uno de los extremos (+).**

c) **Si el segundo inicia el movimiento un *T*/4 más tarde.**

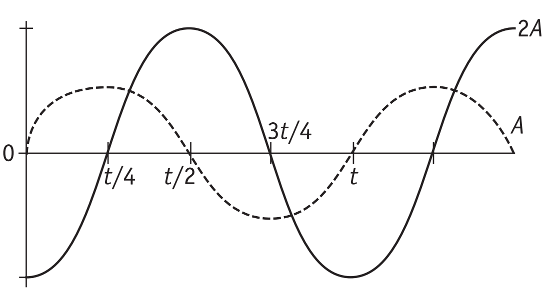
a)



b)



c)



9. Un oscilador armónico tarda 8 s en realizar 20 vibraciones completas. ¿Qué frecuencia angular posee?

La frecuencia natural vale $f = \dfrac{\text{n.º vib.}}{t} = \dfrac{20\ \text{vib.}}{8\ \text{s}} = 2{,}5\ \text{s}^{-1}$.

Por tanto, la frecuencia angular será $\omega = 2\pi f = 5\pi$ rad/s.

10. La ecuación de un m.a.s. es $x = 2$ sen πt, en unidades del SI.

PAU

a) **Escribe la ecuación de la velocidad.**

b) **¿Qué valor máximo alcanza esta velocidad?**

a) La velocidad viene dada por la derivada de la ecuación del movimiento:

$$v = \frac{dx}{dt} = 2\pi \cos\ (\pi\, t)\ \text{m/s}$$

b) El valor máximo que alcanza esta velocidad es $v_m = 6{,}28$ m/s.

11. La velocidad instantánea, ¿depende de la fase inicial? ¿Y la velocidad máxima?

Si la ecuación del movimiento es $x = A$ sen$(\omega\, t + \varphi)$, la velocidad instantánea se obtiene derivando la ecuación anterior:

$$v = \frac{dx}{dt} = A\ \omega \cos\ (\omega\, t + \varphi),$$

cuyo valor depende de la fase inicial.

En cambio, la velocidad máxima vale $v_m = \omega A$ y, por tanto, es independiente de la fase inicial.

12. Una partícula vibra con una velocidad máxima de 25 m/s y una amplitud de 0,05 m. Calcula la frecuencia con la que vibra.

La velocidad máxima de un movimiento armónico simple es $v_m = \omega\ A = 2\pi\ A\ f$, de donde se obtiene el valor de la frecuencia:

$$f = \frac{v_m}{2\pi\ A} = \frac{25\ \text{m/s}}{3{,}14 \cdot 0{,}1\ \text{m}} = 80\ \text{Hz}$$

13. ¿Cómo varían la velocidad máxima y la aceleración máxima de un oscilador?

PAU

a) **Si se duplican la amplitud y la frecuencia.**

b) **Si se duplica la amplitud y no varía la frecuencia.**

c) **Si se duplica la frecuencia y no varía la amplitud.**

d) **Si se duplican el periodo y la amplitud.**

La velocidad máxima y la aceleración máxima valen, respectivamente:

$v_m = \omega\ A = 2\pi f\ A$

$a_m = -A\ \omega^2 = -4\pi^2 f^2\ A$

a) Por tanto, si $f_2 = 2\ f_1$ y $A_2 = 2\ A_1$, se cumple que:

$$v_{m2} = 2\pi \cdot (2\ f_1) \cdot (2\ A_1) = 4 \cdot (2\pi\ f_1\ A_1) = 4\ v_{m1}$$

La velocidad se hace cuatro veces mayor.

$$a_{m2} = -4\pi^2\ (4\ f_1^2)\ (2\ A_1) = -8\ (4\pi^2\ f_1^2\ A_1)$$

La aceleración se hace ocho veces mayor.

b) Si $A_2 = 2\,A_1$ y $f_1 = f_2$:

$$v_{m2} = 2\pi\, f_2\, A_2 = 2\pi\, f_1\, 2\,A_1 = 2 \cdot (2\pi\, f_1\, A_1) = 2\, v_{m1}$$

La velocidad se hace el doble.

$$a_{m2} = 4\pi^2 f_2^2\, A_2 = 4\pi^2\, (f_1)^2\, 2\,A_1 = 2 \cdot (4\pi^2 f_1^2\, A_1) = 2\, a_{m1}$$

La aceleración también se duplica.

c) Si $f_2 = 2\,f_1$; $A_2 = A_1$:

$$v_{m2} = 2\pi\, f_2\, A_2 = 2\pi\, (2\,f_1)\, A_2 = 2 \cdot (2\pi\, f_1\, A_1) = 2\, v_{m1}$$

La velocidad se duplica.

$$a_{m2} = 4\pi^2 f_2^2\, A_2 = 4\pi^2\, (2\,f_1)^2\, A_1 = 4 \cdot (4\pi^2 f_1^2\, A_1) = 4\, a_{m1}$$

La aceleración se hace cuatro veces mayor.

d) Si $T_2 = 2\,T_1 \Rightarrow f_2 = \left(\dfrac{f_1}{2}\right)$; $A_2 = 2\,A_1$:

$$v_{m2} = 2\pi\, f_2\, A_2 = 2\pi \left(\frac{f_1}{2}\right)(2\,A_1) = (2\pi\, f_1\, A_1) = v_{m1}$$

La velocidad se conserva.

$$a_{m2} = 4\pi^2 f_2^2\, A_2 = 4\pi^2 \left(\frac{f_1}{2}\right)^2 (2\,A_1) = (2\pi^2 f_1^2\, A_1) = \frac{a_{m1}}{2}$$

La aceleración se divide por dos.

14. Un oscilador tiene una amplitud de 15 cm y alcanza una velocidad máxima de 8,0 m/s. ¿Cuánto vale la aceleración máxima? ¿Qué velocidad y qué aceleración tiene el oscilador cuando se encuentra a 5,0 cm de la posición de equilibrio?

De las expresiones $v_m = \omega\, A$; $a_m = \omega^2 A$, obtenemos la relación:

$$a_m = \left(\frac{v_m}{A}\right)^2 A = \frac{v_m^{\,2}}{A}$$

por tanto, la aceleración máxima será:

$$a_m = \frac{(8\ \text{m/s})^2}{0{,}15\ \text{m}} = 427\ \text{m/s}^2$$

Tanto la velocidad como la aceleración dependen de la posición:

$$v = \pm\omega\,\sqrt{A^2 - x^2} = \pm 53\ \text{rad/s} \cdot \sqrt{0{,}02\ \text{m}^2} = 7{,}5\ \text{m/s}$$

$$a = -\omega^2\, x = -(53\ \text{rad/s})^2 \cdot 0{,}05\ \text{m} = 140\ \text{m/s}^2$$

Siendo $\omega = \dfrac{v_m}{A} = \dfrac{8\ \text{m/s}}{0{,}15\ \text{m}} = 53\ \text{rad/s}$

15. Un oscilador vibra de forma que la aceleración máxima es 20,0 veces mayor que la velocidad máxima. ¿Cuánto vale la frecuencia?

PAU

En la actividad anterior hemos obtenido la relación entre los valores máximos de la velocidad y de la aceleración:

$$a_m = \frac{v_m^{\,2}}{A}$$

Si $a_m = 20{,}0\, v_m$, se obtiene que $v_m = 20{,}0\, A$.

Comparando esta igualdad con la expresión de la velocidad máxima $v_m = \omega\, A = 2\pi\, f\, A$, tenemos que $2\pi\, f = 20{,}0$.

De donde: $\quad f = \dfrac{20{,}0}{2\pi} = 3{,}18\ \text{Hz}$

16. ¿En qué condiciones el valor máximo de la aceleración coincide con el valor máximo de la velocidad?

Comparando las expresiones de los valores máximos de la velocidad y de la aceleración, se deduce que $\dfrac{a_m}{v_m} = \omega$; por tanto, si $a_m = v_m$, la frecuencia angular ha de valer uno.

17. ¿Para qué valores de la elongación coinciden la velocidad y la aceleración de un oscilador?

Expresamos la velocidad y la aceleración en función de la elongación:

$$v = \omega\,\sqrt{A^2 - x^2}$$

$a = \omega^2\, x$; para que estos valores coincidan, se debe cumplir que:

$$\omega\,\sqrt{A^2 - x^2} = \omega^2\, x$$

$$A^2 - x^2 = \omega^2\, x^2; \quad x^2\, (\omega^2 + 1) = A^2$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{A^2}{\omega^2 + 1}} = \pm\frac{A}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

18. ¿Por qué la frecuencia angular de un oscilador armónico es una característica que depende de las propiedades físicas del sistema?

La frecuencia angular de un oscilador viene dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Esto indica que su valor depende de la masa y de la elasticidad del oscilador, dos propiedades características del sistema.

19. La frecuencia de oscilación de una masa *m* unida a un resorte es el doble que la de otra masa *m′* unida a otro resorte de las mismas características que el anterior. ¿Qué relación guardan entre sí ambas masas?

PAU

De acuerdo con la expresion $2\pi\, f = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, la frecuencia del oscilador depende de la masa:

$$m = \frac{k}{4\pi^2 f^2}$$

Si los dos resortes tienen la misma constante elástica, aplicamos la expresión anterior, teniendo en cuenta que se cumple $f = 2\,f'$.

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{k}{4\pi^2 f^2} \\ m' &= \frac{k}{4\pi^2 f'^2} \end{aligned}\right\}\ \frac{m}{m'} = \frac{f'^2}{f^2} = \frac{f'^2}{4\,f'^2} = \frac{1}{4}$$

$$m' = 4\,m$$

Observa cómo la frecuencia es inversamente proporcional al cuadrado de la masa.

20. De dos resortes con idéntica constante *k* (de la misma elasticidad) se cuelga la misma masa. Uno de los resortes tiene doble longitud que el otro. ¿La masa vibrará con la misma frecuencia?

La frecuencia de oscilación no depende de la longitud del resorte.

Si los dos resortes tienen la misma elasticidad, la masa vibrará con la misma frecuencia, de acuerdo con la ecuación:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

21. Supongamos que la frecuencia angular de un oscilador se duplica. ¿Cómo varía? PAU

***a)* La frecuencia.**

***b)* El periodo.**

***c)* La amplitud.**

***d)* La constante de fase.**

***e)* La energía cinética.**

***f)* La energía potencial.**

a), b) y *c)* La frecuencia angular, por definición, depende de la frecuencia natural y del periodo, como se deduce de las igualdades:

$$\omega = 2\pi\, f; \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Por tanto, si la frecuencia angular se duplica, la frecuencia natural también se hace doble; en cambio, el periodo se reduce a la mitad. La amplitud no varía, puesto que no depende de la frecuencia angular.

e) La energía cinética máxima de un oscilador se hace cuatro veces mayor, puesto que la velocidad máxima es proporcional a la frecuencia angular, $v_m = \omega A$.

f) La energía potencial $E_p = \frac{1}{2}\, k\, A^2 = \frac{1}{2}\, \omega^2\, m\, A^2$ también se hace cuatro veces mayor.

g) La frecuencia angular no depende de la fase inicial o constante de fase.

22. Dos partículas de masas *m* y *m′* (*m′* > *m*) están animadas de m.a.s. de igual amplitud unidas a resortes de la misma constante *k*. PAU

***a)* ¿Qué partícula tiene mayor energía mecánica?**

***b)* ¿Cuál de las dos partículas tiene mayor energía cinética al pasar por la posición de equilibrio? ¿Cuál de las dos pasa por esta posición con mayor velocidad?**

La energía mecánica de un oscilador viene expresada por:

$$E_m = \frac{1}{2}\, k\, A^2 = \frac{1}{2}\, \omega^2\, m\, A^2 = \frac{1}{2}\, (2\pi\, f)^2\, m\, A^2 = 2\pi^2\, f^2\, m\, A^2$$

a) Por tanto, si la constante *k* y la amplitud son las mismas, las dos masas poseen la misma energía mecánica, aunque vibran con distinta frecuencia.

b) Al pasar por la posición de equilibrio, la energía cinética es máxima y vale $E_c = \frac{1}{2}\, k\, A^2$. Por tanto, las dos partículas pasan por la posición de equilibrio con la misma energía cinética. En cambio, pasará por esa posición con mayor velocidad la partícula que posee menor masa, como se deduce de:

$$E_c = \frac{1}{2}\, m\, v^2$$

23. Para comparar masas se utiliza una balanza. ¿Podríamos comparar masas midiendo sus frecuencias de oscilación al colgarlas de un mismo resorte? Razona la respuesta.

La frecuencia de oscilación de una masa que cuelga de un resorte viene dada por:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Si utilizamos el mismo resorte, la constante *k* no varía, y la frecuencia depende exclusivamente de la masa. Por tanto, sí es posible comparar masas midiendo las frecuencias de oscilación.

24. Una masa de 1000 g cuelga de un resorte. Si añadimos a la masa anterior otra de 500 g, el resorte se alarga 2,0 cm. Al retirar la segunda masa, la primera empieza a oscilar. ¿Con qué frecuencia lo hará? PAU

En primer lugar calculamos la constante elástica del resorte:

$$k = \frac{m\, g}{x} = \frac{0{,}5 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2}{0{,}02 \text{ m}} = 245 \text{ N/m}$$

La frecuencia de oscilación será:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{245 \text{ N m}^{-1}}{1 \text{ kg}}} = 2{,}5 \text{ Hz}$$

25. Una masa de 0,500 kg se cuelga de un muelle de *k* = 200 N/m para que oscile. Calcula la frecuencia y el periodo. PAU

Aplicamos la expresión anterior:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{200 \text{ N m}^{-1}}{0{,}5 \text{ kg}}} = 3{,}2 \text{ Hz}; \quad T = \frac{1}{f} = 0{,}3 \text{ s}$$

26. ¿Cuál es la fuerza recuperadora en el caso de un péndulo simple? ¿Es de tipo elástico o de tipo gravitatorio?

La fuerza recuperadora es la componente perpendicular al hilo, $F_t = mg\text{sen}\theta$. En este caso la componente tangencial del peso (fuerza de tipo gravitatorio) se puede asimilar a una fuerza de tipo elástico si se aproxima el ángulo $\theta \approx \text{sen}\,\theta$, donde la constante elástica es $k = \frac{mg}{\ell}$.

Oscilaciones forzadas. Resonancia mecánica

Cuestiones

1. ¿Qué sucede si la frecuencia de oscilación natural de un edificio es igualada por la ω de oscilación del viento?

***a)* amplificación de la oscilación;**

b) nada;

c) disminución de la oscilación.

2. ¿Qué tipo de fuerza es necesaria para producir el fenómeno de la resonancia?

a) rozamiento;

b) conservativa;

***c)* continua.**

3. ¿De qué orden de magnitud será la frecuencia de oscilación de un sistema de masa infinita?

a) infinita;

***b)* cercana al cero;**

c) negativa.

4. **¿Por qué dos frecuencias de oscilación iguales producen mayor amplitud en la oscilación?**

   a) se suman;

   b) se restan;

   ***c)* se solapan.**

Cuestiones y problemas

1. **Una partícula vibra con una frecuencia de 5 Hz. ¿Cuánto tiempo tardará en desplazarse desde un extremo hasta la posición de equilibrio?**

   Por definición, una partícula animada de m.a.s. tarda un cuarto de periodo en desplazarse desde un extremo hasta la posición de equilibrio.

   $$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{5\ s^{-1}} = 0{,}2\ s$$

   Por tanto, el tiempo transcurrido será:

   $$t = \frac{T}{4} = \frac{0{,}2\ s}{4} = 0{,}05\ s$$

2. **Una partícula de 5,0 g de masa animada de m.a.s. vibra con una amplitud de 0,20 cm y una velocidad máxima de 8,0 m/s. ¿Con qué frecuencia vibra la partícula? ¿Cuánto vale la constante recuperadora?**

   Despejamos la frecuencia de la igualdad que expresa la velocidad máxima $v_m = \omega\ A = 2\pi\ f\ A$.

   $$f = \frac{v_m}{2\pi\ A} = \frac{8{,}0\ m/s}{6{,}28 \cdot 0{,}20 \cdot 10^{-2}\ m} = 6{,}4 \cdot 10^2\ Hz$$

   La constante elástica se calcula combinando las expresiones $k = \omega^2\ m$; $v_m = \omega\ A$.

   $$k = \frac{m\ v_m^2}{A^2} = \frac{5{,}0 \cdot 10^{-3}\ kg \cdot (8{,}0\ m/s)^2}{(0{,}20 \cdot 10^{-2}\ m)^2} = 8{,}0 \cdot 10^4\ N/m$$

3. **Una partícula vibra de modo que tarda 0,50 s en ir desde un extremo a la posición de equilibrio, distantes entre sí 8,0 cm. Si para t = 0 la elongación de la partícula es 4,0 cm, halla la ecuación que define este movimiento.**

   Del enunciado se deduce que el periodo del movimiento es $T = 4 \cdot 0{,}50\ s = 2{,}0\ s$, y que, por tanto, la frecuencia angular vale:

   $$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi\ rad/s$$

   Para hallar la fase inicial, aplicamos, para t = 0, la ecuación del movimiento:

   $$x = A\ \text{sen}\ (\omega\ t + \varphi);\quad \frac{A}{2} = A\ \text{sen}\ \varphi \Rightarrow \frac{1}{2} = \text{sen}\ \varphi$$

   de donde $\varphi = 30° = \dfrac{\pi}{6}$

   De acuerdo con estos valores, el movimiento indicado está definido por la ecuación:

   $$x = 8{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{sen} \left(\pi\ t + \frac{\pi}{6}\right)\ m$$

4. **Un m.a.s. está definido por la siguiente ecuación: 0,40 sen $\left(120\ t + \dfrac{\pi}{6}\right)$ con las unidades en el SI. Calcula:** PAU

   ***a)* Las condiciones iniciales x_0, v_0.**

   ***b)* La frecuencia del movimiento.**

   a) Para hallar la posición inicial sustituimos en la ecuación del movimiento el valor del tiempo t = 0.

   $$x_0 = 0{,}4\ \text{sen}\ (120 \cdot 0 + 30°) = 0{,}20\ m$$

   La velocidad viene dada por:

   $v = 0{,}4 \cdot 120\ \cos\ (120\ t + 30°)$, que para t = 0 toma el valor $v_0 = 0{,}4 \cdot 120\ \cos\ 30° = 42\ m/s$

   b) La frecuencia será:

   $$f = \frac{\omega}{2\ \pi} = \frac{120\ rad/s}{6{,}28} = 19{,}1\ Hz$$

5. **Un niño de 30,0 kg se columpia con una amplitud de 0,50 m en un columpio de 3,0 m de longitud. ¿Con qué periodo y frecuencia se columpia? ¿Cuál es la velocidad máxima del muchacho? Dato: g_0 = 9,8 m s^{-2}.** PAU

   El columpio se comporta como un péndulo simple. Por tanto, el periodo de oscilación viene dado por:

   $$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 6{,}28 \sqrt{\frac{3{,}0\ m}{9{,}8\ m/s^2}} = 3{,}5\ s$$

   $$f = \frac{1}{T} = 0{,}29\ Hz$$

   $$v_m = \omega\ A = 2\pi\ f\ A = 6{,}28 \cdot 0{,}29\ Hz \cdot 0{,}50\ m = 0{,}91\ m/s$$

6. **Una partícula de 0,050 kg vibra con una amplitud de 0,40 m y una frecuencia de 25 Hz.**

   ***a)* ¿En qué puntos de la trayectoria la energía cinética es el 80 % de la energía total?**

   ***b)* ¿En qué puntos la energía cinética y la energía potencial coinciden?**

   ***c)* ¿Cuánto vale la energía total?**

   a) Se ha de cumplir:

   $$\frac{1}{2}\ m\ v^2 = 0{,}8 \cdot \frac{1}{2}\ k\ A^2$$

   $$k\ (A^2 - x^2) = 0{,}8\ k\ A^2$$

   De donde $x^2 = 0{,}2\ A^2$; $x = \pm\sqrt{0{,}2} \cdot 0{,}40\ m = \pm 0{,}18\ m$

   b) En este caso se cumple:

   $$\frac{1}{2}\ k\ (A^2 - x^2) = \frac{1}{2}\ k\ x^2;\quad A^2 = 2\ x^2$$

   $$x = \frac{A}{\pm\sqrt{2}} = \pm 0{,}28\ m$$

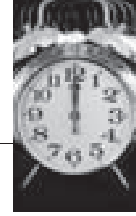
   c) La energía total coincide con la energía mecánica:

   $$E_m = \frac{1}{2}\ k\ A^2 = \frac{1}{2}\ m\ \omega^2\ A^2 =$$

   $$= \frac{1}{2}\ m\ 4\pi^2\ f^2\ A^2 = 2\ m\ \pi^2\ f^2\ A^2 =$$

   $$= 2 \cdot 0{,}050\ kg \cdot 9{,}86 \cdot 625\ s^{-2} \cdot (0{,}40\ m)^2 = 99\ J$$

7. **Una partícula de 250 g de masa vibra con m.a.s. de forma que, para t = 0, pasa por la posición de equilibrio en sentido positivo. Si tarda 1 min y 40 s en dar 125 oscilaciones com-**



pletas y el valor máximo de la fuerza recuperadora es 25 N, calcula:

a) **Las constantes del movimiento.**

b) **La ecuación del movimiento, expresada en seno y en coseno.**

a) Sea $x = A$ sen $(\omega\ t + \pi)$ la ecuación que define el m.a.s. de la partícula. Del enunciado se deduce que $x_0 = 0$, y por tanto, $0 =$ sen $\varphi \Rightarrow \varphi = 0$.

Además, la frecuencia vale $f = \dfrac{\text{n.º}}{t} = \dfrac{125 \text{ vibr.}}{100 \text{ s}} = 1{,}25$ Hz; por tanto, la frecuencia angular es $\omega = 2\pi\ f = 7{,}85$ rad/s.

b) El valor máximo de la fuerza recuperadora viene dado por $F_m = k\ A = m\ \omega^2\ A$; de donde despejamos la amplitud:

$$A = \frac{\boldsymbol{F}_\text{m}}{m\ \omega^2} = \frac{25 \text{ N}}{0{,}25 \text{ kg} \cdot (7{,}85 \text{ rad/s})^2} = 1{,}62 \text{ m}$$

Las constantes del movimiento son:

$$A = 1{,}62 \text{ m}; \quad \omega = 7{,}85 \text{ rad/s}; \quad \varphi = 0$$

De acuerdo con estos valores, la ecuación del movimiento es:

$$x = 1{,}62 \text{ sen } (7{,}85\ t) = 1{,}62 \cos \left(7{,}85\ t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ m}$$

8. Una partícula de 2,0 kg vibra a lo largo del eje *Ox* por la acción de una fuerza recuperadora *F* = –10*x*. Inicialmente se encuentra a + 2 m del origen, moviéndose con una velocidad de 10 m/s hacia la posición de equilibrio. Calcula:

a) **El periodo del movimiento.**

b) **El instante que pasa por primera vez por el origen.**

a) De la expresión de la fuerza recuperadora $F = -k\ x$, se deduce que la constante elástica en este caso vale $k = 10$ N/m.

La frecuencia angular toma el valor:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10 \text{ N/m}}{2{,}0 \text{ kg}}} = 2{,}23 \text{ rad/s}$$

de donde se deduce el valor del periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2{,}81 \text{ s}$$

b) Para hallar la fase inicial utilizamos las condiciones iniciales:

$$x_0 = 2 \text{ m}; \quad v_0 = -10 \text{ m/s}$$

$$x_0 = A \text{ sen } \varphi; \quad v_0 = A\ \omega \cos \varphi$$

de donde:

$$\text{tg } \varphi = \frac{x_0\ \omega}{v_0} = \frac{2 \text{ m} \cdot 2{,}23 \text{ rad/s}}{-10 \text{ m/s}} = -0{,}446; \quad \varphi = -24°$$

Para hallar el instante en que pasa por el origen, aplicamos la ecuación del movimiento al caso $x = 0$:

$$0 = A \text{ sen } (\omega\ t + \varphi) \Rightarrow \omega\ t + \varphi = 0$$

$$t = \frac{-\varphi}{\omega} = \frac{24°}{2{,}23 \text{ rad/s}} = \frac{0{,}42 \text{ rad/s}}{2{,}23 \text{ rad/s}} = 0{,}19 \text{ s}$$

9. Una partícula de 5,0 g se mueve con m.a.s. Si su frecuencia es 25 Hz y su amplitud 8,0 cm, calcula:
PAU

a) **Su periodo.**

b) **La frecuencia angular.**

c) **Su velocidad máxima.**

d) **La constante recuperadora.**

a) El periodo, por definición, es igual al valor que toma el inverso de la frecuencia:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{25 \text{ Hz}} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ s}$$

b) La frecuencia angular es igual a $\omega = 2\pi\ f$.

$$\omega = 2\pi \cdot 25 \text{ rad/s} = 157 \text{ rad/s}$$

c) La velocidad máxima es:

$$v = A\ \omega = 8{,}0 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot 157 \text{ rad/s} = 12{,}6 \text{ m/s}$$

d) La constante recuperadora es:

$$k = m\ \omega^2 = 5{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot (157 \text{ rad/s})^2 = 123 \text{ N/m}$$

10. Una masa de 0,50 kg cuelga de un resorte de *k* = 50 N/m. Si la desplazamos 5,0 cm y la soltamos, calcula:
PAU

a) **La frecuencia.**

b) **La velocidad que tiene cuando pasa por la posición de equilibrio.**

En primer lugar, hallamos la frecuencia angular que depende de la constante elástica y de la masa:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{50 \text{ N/m}}{0{,}50 \text{ kg}}} = 10 \text{ rad/s}$$

a) De $\omega = 2\pi\ f$ obtenemos la frecuencia natural que se nos pide:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10 \text{ rad/s}}{6{,}28} = 1{,}6 \text{ Hz}$$

b) La velocidad máxima vale:

$$v_m = \omega\ A = 10 \text{ rad/s} \cdot 5{,}0 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 0{,}50 \text{ m/s}$$

11. Una partícula de 250 g tiene un periodo de vibración de 0,040 s. Calcula la constante recuperadora.
PAU

La constante recuperadora, en función del periodo, viene dada por:

$$k = \omega^2\ m = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 m = \left(\frac{6{,}28}{0{,}40 \text{ s}}\right)^2 \cdot 0{,}25 \text{ kg} = 6{,}2 \cdot 10^2 \text{ N/m}$$

12. Un muelle se alarga 25 cm al colgar de él una masa de 2,0 kg. Calcula la frecuencia y la velocidad máxima de oscilación de la masa, sabiendo que la amplitud del movimiento es 5,0 cm. Dato: g_o = 9,8 m s^{-2}.
PAU

En primer lugar calculamos la constante del resorte:

$$k = \frac{m\ g}{x} = \frac{2{,}0 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2}{0{,}25 \text{ m}} = 78{,}4 \text{ N/m}$$

La frecuencia de la oscilación vale:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{6{,}28} \cdot \sqrt{\frac{78{,}4 \text{ N/m}}{2{,}0 \text{ kg}}} = 1 \text{ Hz}$$

La velocidad máxima es:

$$v_m = \omega\ A = 2\pi\ f\ A = 6{,}28 \cdot 1 \text{ s}^{-1} \cdot 5{,}0 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 0{,}31 \text{ m/s}$$

13. Una partícula vibra de acuerdo con la ecuación $x = 0{,}080$ sen 100 t en unidades del SI. Calcula:

PAU

***a)* La frecuencia.**

***b)* La velocidad máxima de vibración.**

***c)* La velocidad de la partícula cuando se encuentra a 5,0 cm de la posición de equilibrio.**

La frecuencia angular de este movimiento es $\omega = 100$ rad/s, como indica su ecuación. De la expresión $\omega = 2\pi f$ obtenemos la frecuencia natural del oscilador.

a) $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{100 \text{ rad/s}}{6{,}28} = 16 \text{ Hz}$

b) Velocidad máxima:

$$v_m = \omega A = 100 \text{ rad/s} \cdot 0{,}080 \text{ m} = 8{,}0 \text{ m/s}$$

c) La velocidad, en función de la elongación, viene dada por:

$$v = \omega \sqrt{A^2 - x^2} = 100 \text{ rad/s} \cdot \sqrt{(0{,}080^2 - 0{,}050^2)} \text{ m} = 6{,}2 \text{ m/s}$$

14. Una masa de 0,20 kg que está unida a un resorte se mueve con m.a.s. con un periodo de 0,50 s. Si la energía potencial máxima del sistema es 5,0 J, calcula:

PAU

***a)* La constante del resorte.**

***b)* La amplitud del movimiento.**

a) La constante del resorte se obtiene de $k = m\,\omega^2$:

$$k = m\,\frac{4\pi^2}{T^2} = 0{,}20 \text{ kg} \cdot \frac{4 \cdot 9{,}85}{0{,}25 \text{ s}^2} = 32 \text{ N/m}$$

b) De la energía potencial despejamos la amplitud:

$$A = \sqrt{\frac{2\,E_p}{k}} = \sqrt{\frac{10 \text{ J}}{32 \text{ N/m}}} = 0{,}56 \text{ m}$$

15. Un cuerpo de 200 g está unido a un resorte horizontal, sin rozamiento, sobre una mesa, a lo largo del eje *Ox*, con una frecuencia angular $\omega = 8{,}00$ rad/s. En el instante $t = 0$, el alargamiento del resorte es de 4,0 cm respecto a la posición de equilibrio y el cuerpo lleva una velocidad de –20 cm/s. Determina:

PAU

***a)* La amplitud y la fase inicial del m.a.s. realizado por el cuerpo.**

***b)* La constante elástica del resorte y la energía mecánica del sistema.**

a) De la ecuación $x = A$ sen $(\omega\, t + \varphi)$, que define el movimiento armónico, se deduce que la posición y velocidad iniciales (para $t = 0$) valen:

$$x_0 = A \text{ sen } \varphi$$

$$v_0 = A\,\omega \cos \varphi$$

De estas expresiones se obtiene la fase inicial:

$$\text{tg } \varphi = \frac{x_0\,\omega}{v_0} = \frac{4{,}0 \text{ cm} \cdot 8{,}0 \text{ rad/s}}{-20 \text{ cm/s}} = -1{,}6; \quad \varphi = -58°$$

De $x_0 = A$ sen φ se deduce el valor de la amplitud:

$$A = \frac{x_0}{\text{sen } \varphi} = \frac{4 \text{ cm}}{\text{sen } 58°} = 4{,}7 \text{ cm}$$

b) $k = m\,\omega^2 = 0{,}200 \text{ kg} \cdot 64{,}0 \text{ s}^{-2} = 12{,}8 \text{ N/m}$

$$E_m = \frac{1}{2}\,k\,A^2 = \frac{1}{2} \cdot 12{,}8 \text{ N/m} \cdot (0{,}047 \text{ m})^2 = 0{,}014 \text{ J}$$

16. Una masa de 100 g está unida a un resorte de constante elástica $k = 80$ N/m. Se separa de su posición de equilibrio 20 cm y se deja en libertad para que oscile libremente. Calcula:

PAU

***a)* La frecuencia con que oscila.**

***b)* La energía mecánica con que inicia el movimiento.**

***c)* La velocidad que posee cuando tiene una elongación de 15 cm.**

***d)* La ecuación que define este movimiento.**

a) La frecuencia se obtiene directamente de los datos del problema aplicando la ecuación:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{6{,}28} \cdot \sqrt{\frac{80 \text{ N/m}}{0{,}1 \text{ kg}}} = 4{,}5 \text{ Hz}$$

b) Energía mecánica:

$$E_m = \frac{1}{2}\,k\,A^2 = \frac{1}{2} \cdot 80 \text{ N/m} \cdot (0{,}20 \text{ m})^2 = 1{,}60 \text{ J}$$

c) Aplicamos el Principio de Conservación de la Energía:

$$E_c = E_m - E_p = \frac{1}{2}\,m\,v^2 = \frac{1}{2}\,k\,A^2 - \frac{1}{2}\,k\,x^2$$

$$v = \sqrt{\frac{k\,(A^2 - x^2)}{m}} = \sqrt{\frac{80 \text{ N/m} \cdot (0{,}2^2 \text{ m}^2 - 0{,}15^2 \text{ m}^2)}{0{,}1 \text{ kg}}} = 3{,}7 \text{ m/s}$$

d) Para escribir la ecuación del movimiento determinamos en primer lugar sus constantes:

$A = 0{,}2$ m, porque es un dato del problema.

$\omega = 2\pi f = 6{,}28 \cdot 4{,}5 \text{ Hz} = 28$ rad/s.

$\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, porque se inicia el movimiento cuando la partícula se encuentra en un extremo.

Por tanto, la ecuación del movimiento viene dada por:

$$x = 0{,}2 \text{ sen}\left(28\,t + \frac{\pi}{2}\right)$$

17. Una partícula que está animada de m.a.s. tiene una aceleración de 8,0 m/s² cuando se encuentra a 0,15 m de la posición de equilibrio. Calcula su periodo.

PAU

La aceleración se puede expresar en función del periodo:

$$a = \omega^2\,x = \frac{4\pi^2}{T^2}\,x$$

de donde se obtiene el valor de T:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2\,x}{a}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 9{,}86 \cdot 0{,}15 \text{ m}}{8{,}0 \text{ m/s}^2}} = 0{,}86 \text{ s}$$

18. Una masa con m.a.s. tiene una velocidad de 2,0 m/s cuando se encuentra a 0,050 m de la posición de equilibrio, y cuando se encuentra a 0,020 m de dicha posición, la velocidad es de 3,0 m/s. Calcula la frecuencia angular y la amplitud.

PAU

La velocidad del m.a.s. en función de la elongación viene dada por $v = \omega\,\sqrt{A^2 - x^2}$, que aplicada a los dos casos del problema, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = \omega \sqrt{A^2 - x_1^2} \\ v_2 = \omega \sqrt{A^2 - x_2^2} \end{array}\right\}$$

de donde se obtiene la relación:

$$\frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{A^2 - x_1^2}{A^2 - x_2^2}$$

y despejando la amplitud, tenemos:

$$A = \sqrt{\frac{v_1^2\, x_2^2 - v_2^2\, x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4{,}0\ \text{m}^2/\text{s}^2 \cdot 4{,}00 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2 - 9{,}0\ \text{m}^2/\text{s}^2 \cdot 25 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2}{4{,}0\ \text{m}^2/\text{s}^2 - 9{,}0\ \text{m}^2/\text{s}^2}} =$$

$= 6{,}5 \cdot 10^{-2}$ m

De $v_1 = \omega \sqrt{A^2 - x_1^2}$ obtenemos la frecuencia angular:

$$\omega = \frac{v_1}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \frac{2{,}0\ \text{m/s}}{\sqrt{42{,}25 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2 - 25 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2}} = 49\ \text{rad/s}$$

19. ¿Cómo se modifica la energía mecánica de un oscilador en los siguientes casos?

PAU

a) **Si se duplica la frecuencia.**

b) **Si se duplica la masa.**

c) **Si se duplica el periodo.**

d) **Si se duplica la amplitud.**

La energía mecánica de un oscilador depende de la frecuencia, de la masa y de la amplitud, de acuerdo con la siguiente expresión:

$$E_m = \frac{1}{2}\, k\, A^2 = \frac{1}{2}\, \omega^2\, m\, A^2 = 2\pi^2 f^2\, m\, A^2$$

Por tanto:

a) Se hace cuatro veces mayor si se duplica la frecuencia.

b) Se duplica si la masa se hace el doble.

c) Se reduce a la cuarta parte si el periodo se duplica, ya que $T\, f = 1$.

d) Se hace cuatro veces mayor si se duplica la amplitud.

20. Una partícula de 250 g vibra con una amplitud de 15,0 cm y una energía mecánica de 12,0 J. Calcula:

PAU

a) **La constante recuperadora.**

b) **La frecuencia de vibración.**

c) **La energía cinética de la partícula cuando se encuentra a 5,0 cm de la posición de equilibrio.**

a) y *b)* De la expresión de la energía mecánica $E_m = \frac{1}{2}\, k\, A^2$ despejamos la constante recuperadora:

$$k = \frac{2\, E_m}{A^2} = \frac{24{,}0\ \text{J}}{225{,}0 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2} = 1{,}07 \cdot 10^3\ \text{N/m}$$

$$f = \frac{1}{2\,\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{6{,}28} \cdot \sqrt{\frac{1{,}07 \cdot 10^3\ \text{N/m}}{0{,}25\ \text{kg}}} = 10{,}4\ \text{Hz}$$

c) La energía cinética se puede expresar en función de la elongación:

$$E_c = \frac{1}{2}\, k\, (A^2 - x^2) = 0{,}5 \cdot 1{,}07 \cdot 10^3\ \text{N/m} \cdot (2{,}25 - 0{,}25) \cdot 10^{-2}\ \text{m}^2 =$$

$= 10{,}7$ J

21. Una partícula de 50 g vibra de forma que, en un punto situado a 4,0 cm de la posición de equilibrio, la energía cinética y la energía potencial coinciden, y son iguales a 2,0 J.

PAU

a) **¿Cuánto vale la amplitud?**

b) **¿Cuánto vale la frecuencia?**

a) Si la energía cinética coincide con la energía potencial, se cumple que:

$$\frac{1}{2}\, k\, (A^2 - x^2) = \frac{1}{2}\, k\, x^2; \quad A^2 = 2\, x^2$$

$$A = \sqrt{2}\, x = \sqrt{2} \cdot 4{,}0\ \text{cm} = 5{,}7\ \text{cm}$$

b) Obtenemos la frecuencia a partir de la energía potencial:

$$E_p = 1/2\, k\, x^2 = 1/2\, m\, \omega^2\, x^2 = 1/2\, m\, (4\pi^2 f^2)\, x^2 = 2\, m\, \pi^2 f^2 x^2$$

$$f = \sqrt{\frac{E_p}{2\, m\, \pi^2\, x^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\ \text{J}}{2 \cdot 50{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot 9{,}86 \cdot (4{,}0 \cdot 10^{-2})^2\ \text{m}^2}} = 36\ \text{Hz}$$

22. Un oscilador armónico constituido por un muelle, de masa despreciable, y una masa de 40 g en su extremo, tiene un periodo de oscilación de 2 s.

PAU

a) **¿Cuál debe ser la masa de un segundo oscilador, construido con un muelle idéntico al primero, para que la frecuencia de oscilación se duplique?**

b) **Si la amplitud de las oscilaciones en ambos osciladores es de 10 cm, ¿cuánto vale, en cada caso, la máxima energía potencial del oscilador y la máxima velocidad alcanzada por la masa?**

a) Aplicamos la expresión de la frecuencia a cada oscilador, siendo $f_2 = 2\, f_1$.

$$\left.\begin{array}{l} f_1 = \dfrac{1}{2\pi} \sqrt{\dfrac{k}{m_1}} \\ 2\, f_1 = \dfrac{1}{2\pi} \sqrt{\dfrac{k}{m_2}} \end{array}\right\} \text{,de donde se deduce } \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{m_2}{m_1}; \quad m_2 = \frac{m_1}{4} = \frac{0{,}040\ \text{kg}}{4} = 0{,}010\ \text{kg}$$

b) La energía potencial máxima es:

$$E = \frac{1}{2}\, k\, A^2 = \frac{1}{2}\, m\, \omega^2\, A^2 = 2\pi^2 f^2\, m\, A^2$$

Para el primer oscilador:

$$E_1 = 2 \cdot 9{,}86 \cdot (0{,}5\ \text{s}^{-1})^2 \cdot 0{,}040\ \text{kg} \cdot 0{,}10^2\ \text{m}^2 = 2{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{J}$$

Para el segundo oscilador:

$$E_2 = 2 \cdot 9{,}86 \cdot (1\ \text{s}^{-1})^2 \cdot 0{,}010\ \text{kg} \cdot 0{,}10^2\ \text{m}^2 = 2{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{J}$$

Velocidades máximas:

$$v_1 = A\, \omega_1 = 2\pi\, f_1\, A = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}5\ \text{s}^{-1} \cdot 0{,}10\ \text{m} = 0{,}31\ \text{m/s}$$

$$v_2 = A\, \omega_2 = 2\pi\, f_2\, A = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 1\ \text{s}^{-1} \cdot 0{,}10\ \text{m} = 0{,}63\ \text{m/s}$$

23. Una masa *m* colgada de un muelle de constante elástica *k* y longitud ℓ oscila armónicamente con frecuencia *f*. A continuación, la misma masa se cuelga de otro muelle que tiene la misma constante elástica *k* y el doble de longitud, $2\ \ell$. ¿Con qué frecuencia oscilará? Razona la respuesta. PAU

La frecuencia de oscilación de una masa *m* que cuelga de un muelle de constante elástica *k* es:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

En este caso, como los dos muelles tienen la misma constante elástica e igual masa, la frecuencia de oscilación será la misma en ambos. Hay que considerar que la constante elástica no depende de la longitud total del muelle.

24. Una masa *m* oscila en el extremo de un resorte vertical con una frecuencia de 1 000 Hz y una amplitud de 5 cm. Cuando se añade otra masa de 300 g la frecuencia de oscilación es de 0,500 Hz. Determina: PAU

***a)* El valor de la masa *m* y de la constante recuperadora del resorte.**

***b)* El valor de la amplitud de oscilación en el segundo caso, si la energía mecánica es la misma en los dos casos.**

a) La frecuencia de oscilación en función de la masa viene dada por:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

si aplicamos esta expresión a las dos masas que nos da el problema, tenemos:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = 1\ \text{Hz}$$

$$f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m + 0{,}3\ \text{kg}}} = 0{,}5\ \text{Hz}$$

Relacionando ambas expresiones, tenemos:

$$\sqrt{\frac{m + 0{,}3\ \text{kg}}{m}} = \frac{1}{0{,}5},\quad \text{de donde } m = 0{,}1\ \text{kg}$$

Para hallar la constante elástica sustituimos este valor de la masa en la igualdad:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

y despejamos el valor de *k*:

$$k = 0{,}4\pi^2 = 3{,}95\ \text{N/m}$$

b) Si la energía mecánica no varía al añadir la masa de 0,3 kg, se debe cumplir que:

$\frac{1}{2}\,k\,A_1^2 = \frac{1}{2}\,k\,A_2^2$; de donde se deduce que la amplitud también es la misma: $A_2 = A_1 = 0{,}05$ m.

25. Un astronauta ha instalado en la Luna un péndulo simple de 0,86 m de longitud y comprueba que oscila con un periodo de 4,6 s. ¿Cuánto vale la aceleración de la gravedad en la Luna? PAU

De la ecuación $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ que define el movimiento de un péndulo simple, despejamos el valor de la gravedad:

$$g = \frac{4\pi^2\,\ell}{T^2} = \frac{4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 0{,}86\ \text{m}}{4{,}6^2\ \text{s}^2} = 1{,}6\ \text{m/s}^2$$

26. Una masa de 2,0 kg cuelga de un resorte. Si añadimos a la masa anterior otra de 0,5 kg, el resorte se alarga 4,0 cm. Al retirar la segunda masa, la primera empieza a oscilar. ¿Con qué frecuencia lo hará? Dato: $g_0 = 9{,}8\ \text{m s}^{-2}$. PAU

En primer lugar hallamos la constante del resorte:

$$k = \frac{m\,g}{\ell} = \frac{0{,}50\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2}{0{,}040\ \text{m}} = 1{,}2 \cdot 10^2\ \text{N/m}$$

La frecuencia de la oscilación será:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$f = \frac{1}{6{,}28} \cdot \sqrt{\frac{1{,}2 \cdot 10^2\ \text{N/m}}{2{,}0\ \text{kg}}} = 1{,}2\ \text{Hz}$$

27. Un muelle elástico de 10,0 cm tiene uno de sus extremos fijo en la pared vertical mientras que el otro está unido a una masa que descansa en una superficie horizontal sin rozamiento. Se le aplica una fuerza de 20 N para mantenerlo estirado hasta una longitud de 15,0 cm. En esta posición se suelta para que oscile libremente con una frecuencia angular de 1,57 rad/s. Calcula: PAU

***a)* La constante recuperadora del resorte.**

***b)* La masa que oscila.**

***c)* La ecuación del m.a.s. resultante.**

***d)* Las energías cinética y potencial cuando *x* = 2 cm.**

a) La constante elástica viene dada por el alargamiento que produce la fuerza aplicada, de acuerdo con $F = k\,x$.

$$k = \frac{F}{x} = \frac{20\ \text{N}}{0{,}05\ \text{m}} = 400\ \text{N/m}$$

b) Conociendo la constante elástica, podemos calcular la masa que oscila aplicando la expresión $k = m\,\omega^2$, siendo ω = 1,57 rad/s.

$$m = \frac{k}{\omega^2} = \frac{400\ \text{N/m}}{1{,}57^2\ \text{s}^{-2}} = 1{,}6 \cdot 10^2\ \text{kg}$$

c) La masa comienza a oscilar cuando se encuentra en un extremo. Esto quiere decir que la fase inicial vale $90° = \frac{\pi}{2}$.

La ecuación del movimiento viene dada por:

$$x = 0{,}05\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\,t + \frac{\pi}{2}\right)\ \text{m}$$

d) Energía mecánica:

$$E_m = \frac{1}{2}\,k\,A^2 = \frac{1}{2} \cdot 400\ \text{N/m} \cdot (0{,}05\ \text{m})^2 = 0{,}50\ \text{J}$$

Energía potencial:

$$E_p = \frac{1}{2}\,k\,x^2 = \frac{1}{2} \cdot 400\ \text{N/m} \cdot (0{,}02\ \text{m})^2 = 0{,}08\ \text{J}$$

En ese punto, la energía cinética será:

$$E_c = E_m - E_p = 0{,}50\ \text{J} - 0{,}08\ \text{J} = 0{,}42\ \text{J}$$

Actividades

1. **¿Se pueden aplicar las leyes de Newton al estudio del movimiento ondulatorio? ¿Por qué?**

   No se pueden aplicar las leyes de Newton para estudiar el movimiento ondulatorio, porque en este movimiento no existe desplazamiento de ninguna masa.

2. **¿El movimiento de una onda es uniforme o uniformemente acelerado? Razona la respuesta.**

   El movimiento de una onda es uniforme, porque al no existir masa que se mueva, no hay posibilidad de aceleración.

3. **¿Qué tipo de onda se origina cuando se propaga la energía de un oscilador mecánico?**

   Un oscilador mecánico origina una onda mecánica, porque la energía propagada por la onda es de naturaleza mecánica.

4. **El sonido se origina por la vibración de los cuerpos sonoros. ¿Qué tipo de onda es el sonido?**

   El sonido es una onda mecánica, porque es mecánica la energía que propaga la onda sonora.

5. **¿Por qué la luz se propaga en el vacío y en cambio el sonido no?**

   La luz es una onda electromagnética. No necesita un medio material para propagarse. Por eso se propaga en el vacío. En cambio, el sonido, al ser una onda mecánica, necesita un medio material de propagación. Por tanto, el sonido no se propaga en el vacío.

6. **Cada partícula de una cuerda por la que se propaga una onda realiza un m.a.s. ¿Falso o verdadero?**

   Es verdadero. Cuando una onda armónica se propaga, cada partícula del medio está animada de un m.a.s.

7. **¿Cómo debe aumentar la tensión en una cuerda para que la velocidad de propagación de una onda se duplique? ¿Influye la velocidad transversal de un punto de la cuerda en la velocidad de propagación?**

   La velocidad de propagación de una onda por una cuerda depende de la tensión de la cuerda, como indica la igualdad $v = \sqrt{\dfrac{F}{\eta}}$; de acuerdo con ella, la tensión debe ser cuatro veces mayor para que la velocidad sea el doble.

   La velocidad transversal de los puntos del medio no influye en la velocidad de propagación de la onda, que solamente depende de las características de la cuerda.

8. PAU **Cuando un músico tensa una cuerda de su instrumento, ¿cómo influye esta operación en las magnitudes que se indican?**

   a) **La velocidad de propagación de las ondas.**

   b) **La frecuencia del sonido.**

   a) y *b)* Cuando una cuerda se tensa, aumenta la velocidad de propagación de la onda, en cuanto a la frecuencia, se hará mayor, pues la longitud de onda resonante se mantiene pero la velocidad de propagación ha variado.

9. PAU **¿Qué ocurre con la longitud de onda cuando se duplica la frecuencia? ¿Cómo varía la velocidad de una onda cuando se duplica la frecuencia?**

   La longitud de onda depende de la frecuencia, de acuerdo con la ecuación $\lambda f = v$, donde la velocidad v es constante para un medio determinado. Por tanto, la longitud de onda se reduce a la mitad cuando se duplica la frecuencia. La velocidad de propagación no depende de la frecuencia, sino de las características del medio.

10. **Cuando todas las cuerdas de una guitarra se estiran a la misma tensión, ¿la velocidad de una onda que viaja sobre la cuerda más gruesa será mayor o menor que la de una onda que viaja sobre la cuerda más ligera?**

    La velocidad de propagación es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la densidad lineal. Si todas las cuerdas tienen la misma tensión y longitud, la velocidad será menor en las cuerdas con mayor masa, es decir, en las más gruesas.

11. **Si se estira una manguera y se le da un tirón, se puede observar un pulso que viaja de un lado a otro de la manguera.**

    a) **¿Qué ocurre con la velocidad del pulso si se estira más la manguera?**

    b) **¿Qué pasa si la manguera está llena de agua?**

    c) **Si cada tres segundos se da un tirón, ¿cuál es el periodo de las ondas que se generan en la manguera?**

    a) Al estirar la manguera, aumenta la velocidad de propagación, puesto que aumenta la tensión.

    b) La velocidad disminuye porque aumenta la densidad lineal de la manguera.

    c) La frecuencia viene determinada por el número de tirones por segundo, $f = \dfrac{1}{3}\ s^{-1}$, por tanto, el periodo será $T = 3$ s.

12. **Después de que una motora pasa por un lago, un observador en la orilla se da cuenta de que las ondas chocan contra ella cada dos segundos y que la distancia entre dos crestas es de 2,5 m aproximadamente. ¿Con qué velocidad se mueven las ondas en el lago?**

    La distancia entre dos crestas consecutivas mide la longitud de las ondas. Por tanto, $\lambda = 2{,}5$ m. Además, el periodo del movimiento es de 2 s, puesto que transcurrido este tiempo el movimiento se repite. De acuerdo con estos datos, la velocidad de las ondas será:

    $$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{2{,}5\ \text{m}}{2\ \text{s}} = 1{,}25\ \text{m/s}$$

13. PAU **Una emisora de radio emite en una frecuencia de 98 MHz. ¿Con qué longitud de onda emite esta emisora? Recuerda que las ondas de la radio son electromagnéticas.**

    La longitud de onda viene dada por:

    $$\lambda = \frac{v}{T} = \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{98 \cdot 10^6\ \text{s}^{-1}} = 3\ \text{m}$$

14. **Una onda viene dada por la ecuación:**

    $$\boldsymbol{y\ (x,\ t) = 0{,}2 \cos\ (50\ t + x)}$$

    a) **¿En qué sentido se propaga?**

b) **¿Cuál es su longitud de onda?**

c) **¿Con qué velocidad se propaga?**

a) El signo (+) indica que la onda se propaga en sentido negativo del eje *0x*.

b) La longitud de onda se obtiene a partir del número de onda $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \text{ m}$$

c) La velocidad de propagación será:

$$v = \lambda\, f = 2\pi \text{ m} \cdot \frac{50}{2\pi} = 50 \text{ m/s}$$

15. Una onda se propaga con una velocidad de 20 m/s y una frecuencia de 50 Hz. Escribe la ecuación de esta onda sabiendo que su amplitud es de 0,5 m.

En general, una onda armónica viene determinada por la siguiente expresión matemática, conocida con el nombre de ecuación de la onda:

$$y = A \cos (\omega\, t \pm k\, x)$$

En este caso las constantes del movimiento valen:

$$A = 0{,}5 \text{ m}; \quad \omega = 2\pi\, f = 100\pi; \quad k = \frac{\omega}{v} = \frac{100\pi}{20} = 5\,\pi$$

De acuerdo con estos valores, la ecuación de la onda es:

$$y = 0{,}5 \cos (100\pi\, t \pm 5\pi\, x)$$

16. ¿Depende la velocidad transversal con que oscilan los puntos de una cuerda de la velocidad con que se propaga una onda por dicha cuerda?

La velocidad transversal con que vibran las partículas del medio es independiente de la velocidad de fase con que se propaga la energía mecánica de los osciladores.

17. Un oscilador produce ondas circulares en un estanque a intervalos regulares de tiempo. Si hacemos que el oscilador produzca el triple número de ondas por segundo:

PAU

a) **¿Se triplica el periodo?**

b) **¿Se triplica la frecuencia?**

c) **¿Se triplica la longitud de onda?**

d) **¿Las ondas se propagan con triple velocidad?**

Si hacemos que el oscilador produzca triple número de ondas por segundo, estamos multiplicando por tres la frecuencia.

a) De $T = \dfrac{1}{f}$, se deduce que el periodo se reduce a la tercera parte cuando se triplica la frecuencia.

b) Se triplica la frecuencia: es un dato del problema.

c) La longitud de onda depende de la frecuencia $\lambda = \dfrac{v}{f}$. Por tanto, para un medio de propagación determinado, la longitud de onda disminuye en un tercio.

d) La velocidad de propagación no depende de la frecuencia, sino de las características del medio.

18. De las propiedades estudiadas, ¿cuáles son específicas de las ondas? ¿Y cuáles se pueden aplicar tanto a las ondas como al movimiento de partículas materiales?

Las propiedades específicas de las ondas son la difracción, la polarización y las interferencias. En cambio, la reflexión y la refracción se pueden aplicar tanto a las ondas como a las partículas materiales. De hecho, el propio Newton explicó estas dos últimas propiedades aplicando su Teoría Corpuscular de la Luz.

19. ¿Se puede polarizar una onda sonora? ¿Por qué?

La polarización solamente es aplicable, por definición, a las ondas transversales. Por tanto, las ondas sonoras no se pueden polarizar porque son longitudinales.

20. ¿En una interferencia se destruye la energía que propagan las ondas?

En una interferencia no se destruye la energía. Solamente se produce una compensación de energía en el punto de interferencia si esta es destructiva.

21. ¿Cuándo tiene lugar una interferencia constructiva entre dos ondas idénticas? ¿Y cuándo es destructiva?

La interferencia es constructiva si las ondas llegan en fase al punto de interferencia. Esto ocurre cuando la diferencia entre las distancias recorridas por las ondas desde los centros emisores hasta el punto de interferencia es un múltiplo entero de longitudes de onda.

En cambio, la interferencia es destructiva cuando dicha diferencia es un múltiplo impar de semilongitudes de onda.

22. La intensidad y la amplitud de una onda disminuyen con la distancia. ¿Cuál de las dos lo hace más rápido?

De las relaciones $I\, r^2$ = cte. y $A\, r$ = cte., se deduce que la intensidad disminuye más rápidamente con la distancia, puesto que es inversamente proporcional al cuadrado de esta.

23. Cuando una onda se amortigua, ¿cambia su frecuencia? ¿Y su longitud de onda? ¿Y su amplitud?

Para un medio determinado, la energía que transmite una onda solamente depende de la amplitud, como indica la fórmula $E = \dfrac{1}{2}\, k\, A^2$. Por tanto, cuando una onda se amortigua, solamente cambia su amplitud.

24. Dos ondas de igual amplitud se propagan con frecuencias 225 Hz y 450 Hz. ¿Cuál propaga más energía? ¿Cuál tiene mayor intensidad?

PAU

La energía transmitida por una onda es proporcional al cuadrado de la frecuencia. Por tanto, propaga cuatro veces más de energía la onda de 450 Hz. Lo mismo ocurre con la intensidad.

25. Explica por qué el sonido se transmite más deprisa en el aire caliente que en el aire frío.

La velocidad del sonido en un gas aumenta con la temperatura, como se deduce de la ecuación:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}}$$

26. Admitiendo que los factores que influyen en la velocidad del sonido son la temperatura y la densidad del medio, clasifica de mayor a menor la velocidad de propagación de una onda sonora en los siguientes medios a temperatura ambiente: aire, vidrio, agua, corcho.

La velocidad de propagación disminuye con la densidad. Por tanto, contando con su estado sólido, líquido o gaseoso, el orden será: vidrio, agua, corcho, aire.

27. Calcula la velocidad del sonido en el argón a 20,0 °C. (Coeficiente adiabático del argón: $\gamma = 1{,}67$; $M = 39{,}9 \cdot 10^{-3}$ kg/mol.)

Aplicamos la ecuación:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = \sqrt{\frac{1{,}67 \cdot 8{,}31 \text{ J mol}^{-1}\text{ K}^{-1} \cdot 293 \text{ K}}{39{,}9 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}}} = 319 \text{ m/s}$$

28. La velocidad del sonido en un gas a 10 °C es de 200 m/s. ¿Cuál será la velocidad del sonido en dicho gas si la temperatura aumenta hasta 20 °C?

Si v_1 es la velocidad a 10 °C, se cumple:

$$v_1 = \sqrt{\frac{\gamma R \cdot 283 \text{ K}}{M}}$$

y si v_2 es la velocidad a 20 °C, tenemos:

$$v_2 = \sqrt{\frac{\gamma R \cdot 293 \text{ K}}{M}}$$

Dividimos miembro a miembro y obtenemos la expresión:

$$\frac{200}{v_2} = \sqrt{\frac{283}{293}} = 0{,}98; \quad v_2 = \frac{200 \text{ m/s}}{0{,}98} = 204 \text{ m/s}$$

29. Si el sonido se propaga en un gas a 0 °C con una velocidad de 317 m/s, calcula la masa molar del gas. $\left(\text{Dato: } \gamma = \frac{7}{5}.\right)$

De la ecuación $v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$ despejamos la masa molar:

$$M = \frac{\gamma RT}{v^2} = \frac{\frac{7}{5} \cdot 8{,}31 \text{ J mol}^{-1} K^{-1} \cdot 273 \text{ K}}{317^2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}} = 32 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$$

Aplicaciones de los ultrasonidos

Cuestiones

1. Una fuente ultrasónica emite ondas de frecuencia 45 kHz. ¿En qué proporción ha de variar la energía de esa fuente para destruir unas bacterias a una frecuencia de 30 kHz?

***a)* 2,25** *b)* 0,44 *c)* 1,5.

2. ¿A qué profundidad estará localizado un galeón si se envía un ultrasonido con módulo volumétrico $B = 0{,}22 \cdot 1010$ Nm^{-2} y densidad 1,030 g/cm^3 y tarda 3 s en recibirse la señal?

a) 4 450 m ***b)* 2 192 m** *c)* 4 384 m.

3. Una onda presenta la siguiente ecuación de onda $y\ (x, t) = 0{,}8 \cos\ (2\,000\ t + x)$, ¿puede tratarse de un ultrasonido?

a) Sí; ***b)* no;** ***c)*** solo si interfiere con otra onda de f mayor.

Recordar el orden de magnitud de las frecuencias de los ultrasonidos.

4. La reparación de una placa solar en la Estación Espacial Internacional precisa una soldadura. Una de las aplicaciones del ultrasonido es precisamente esa, ¿qué frecuencia ultrasónica es la óptima para la reparación?

a) 50 kHz; ***b)* no se puede reparar con ultrasonido;**

c) 100 kHz.

El sonido no se transmite en el vacío, y la Estación Espacial Internacional está en él.

Cuestiones y problemas

1. *a)* Comenta la siguiente afirmación: «Las ondas estacionarias no son ondas propiamente dichas» y razona si una onda estacionaria transporta energía.

***b)* Al arrojar una piedra en un estanque con agua y al pulsar la cuerda de una guitarra se producen fenómenos ondulatorios. Razona qué tipo de onda se ha producido en cada caso y comenta las diferencias entre ambas.**

a) Las ondas estacionarias son aquellas que resultan de la interferencia de dos ondas idénticas que se propagan en la misma dirección y sentido contrario. Al decir que las ondas estacionarias no son realmente ondas se entiende que la onda estacionaria es una perturbación que está limitada a una región del espacio. Es decir, en este caso, la propagación de la onda queda confinada a los límites entre nodo y nodo.

La energía en una onda estacionaria permanece confinada entre los nodos, pues en estos las partículas se mantienen en reposo.

b) Cuando tocamos una guitarra producimos ondas estacionarias, mientras que las ondas que se provocan al lanzar una piedra a un estanque son viajeras. La diferencia principal entre las dos es que la perturbación se limita a un área del espacio en las estacionarias y se propaga por todo el espacio en las viajeras.

2. Uno de los extremos de una cuerda tensa, de 6 m de longitud, se hace oscilar armónicamente con una f = 60 Hz. Calcula la longitud de onda y el número de onda de las ondas de la cuerda. PAU

Velocidad de propagación: $v = \frac{x}{t} = \frac{6 \text{ m}}{0{,}5 \text{ s}} = 12$ m/s

Longitud de onda: $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{12 \text{ m/s}}{60 \text{ s}^{-1}} = 0{,}20$ m

Número de onda: $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{6{,}28}{0{,}20} = 31{,}4$ m^{-1}

3. Una onda transversal, que se propaga de derecha a izquierda, tiene una longitud de onda de 20 m, una amplitud de 4 m y una velocidad de propagación de 200 m/s. Calcula:

***a)* La ecuación de la onda.**

***b)* La velocidad transversal máxima de un punto alcanzado por la onda.**

***c)* La aceleración máxima de un punto del medio.**

Una onda sinusoidal transversal que se propaga de derecha a izquierda ($v < 0$) viene dada por la ecuación:

$$y = A \text{ sen } (2\pi f t + k x)$$

siendo A la amplitud, k el número de onda y f la frecuencia.

Empezamos calculando la frecuencia y el número de ondas:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{20} = 0{,}314; \quad f = \frac{v}{\lambda} = \frac{200}{20} = 10 \text{ Hz}$$

a) Con estos datos podemos escribir la ecuación de la onda $y = 4 \text{ sen } (20\pi\, t + 0{,}314\, x)$.

b) La velocidad de vibración de un punto del medio o velocidad transversal se obtiene derivando respecto del tiempo la ecuación de la onda:

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 4 \cdot 20\pi \cdot \cos (20\pi\, t + 0{,}314\, x)$$

Esta velocidad será máxima cuando:

$$\cos (20\pi\, t + 0{,}314) = \pm 1$$

De donde $v_{máx} = \pm 251$ m/s.

c) La aceleración se obtiene derivando la velocidad:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -1\,600\pi^2 \cdot \text{sen } (20\pi\, t + 0{,}314\, x)$$

y su valor máximo es $a_{máx} = \pm 1{,}6 \cdot 10^4$ m/s^2

4. En una cuerda colocada a lo largo del eje *Ox* se propaga una onda determinada por la función:

$$\boldsymbol{y\ (x,\ t) = 0{,}02 \text{ sen } (4\, x - 8\, t)}$$

donde *y*, *x* se expresan en metros y *t* en segundos. ¿Cuánto tiempo tarda la perturbación en recorrer una distancia de 8 m?

La función que se nos da es del tipo $y = A \text{ sen } (k\, x - 2\pi f t)$, que corresponde a la propagación de una perturbación en el sentido positivo del eje de las x con las siguientes características:

Amplitud: $A = 0{,}02$ m

Número de onda: $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = 4 \text{ m}^{-1}$

Frecuencia: $f = \dfrac{8}{2\pi} = \dfrac{4}{\pi}$ Hz

La velocidad de propagación de esta perturbación viene dada por:

$$v = \lambda\, f = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4}{\pi} = 2 \text{ m/s}$$

La perturbación viaja con una velocidad constante, mientras las propiedades del medio no varíen, de modo que:

$$t = \frac{x}{v} = \frac{8 \text{ m}}{2 \text{ m/s}} = 4 \text{ s}$$

5. En una cuerda se propaga una onda transversal definida por la ecuación: *y* (*x*, *t*) = 2 sen 2π (10*t* – 0,1*x*) en unidades del SI.

Determina:

***a)* El periodo, la longitud de onda y la velocidad de propagación.**

***b)* La velocidad y la aceleración máximas.**

$y = 2 \text{ sen } 2\pi\ (10\ t - 0{,}1\ x)$, corresponde a la propagación de una perturbación en el sentido negativo del eje de las x con las siguientes características:

a) Periodo $T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{2\pi}{20\pi} = 0{,}1$ s

Longitud de onda: $\lambda = \dfrac{2\pi}{k} = 10$ m

Velocidad de propagación $v = \lambda f = 10 \text{ m} \cdot 10 \text{ s}^{-1} = 100$ m/s

b) La velocidad máxima tiene lugar cuando la ecuación de la velocidad $v = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 40\pi \cos 2\pi\ (10\ t - 0{,}1\ x)$ alcance su valor máximo, en $\cos 2\pi\ (10\ t - 0{,}1\ x) = \pm 1$, entonces $v_{máx} = 40\pi$ m/s. De forma análoga obtenemos la aceleración máxima, $a = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -(40\pi)^2 \text{ sen } 2\pi\ (10\ t - 0{,}1\ x)$, de donde $a_{máx} = 800\pi^2$ m/s^2.

6. La ecuación de una onda tiene la expresión:

$$\boldsymbol{y\ (x,t) = A \text{ sen } (2\pi\, bt - cx)}$$

***a)* ¿Qué representan los coeficientes *b* y *c*? ¿Cuáles son sus unidades en el SI?**

***b)* ¿Qué interpretación tendría que el signo de dentro del paréntesis fuese positivo en lugar de negativo?**

a) Tomamos la ecuación de una onda armónica que se propaga en el sentido positivo del eje Ox $y(x,\ t) = A \text{ sen } (2\pi\, ft - kx)$. Comparando, b resulta ser la frecuencia de la onda, en Hz y c es la constante elástica, en N/m.

b) El signo dentro del paréntesis indica el sentido de propagación de la onda. Un signo positivo significaría que la onda se propaga en el sentido negativo del eje Ox.

7. Una onda armónica viaja a 30 m/s en la dirección positiva del eje *Ox* con una amplitud de 0,5 m y una longitud de onda de 0,6 m. Escribe la ecuación del movimiento, como una función del tiempo, para un punto al que le llega la perturbación y está situado en *x* = 0,8 m.

Las constantes del movimiento son:

$A = 0{,}5$ m

$\lambda = 0{,}6$ m; $f = \dfrac{v}{\lambda} = \dfrac{30 \text{ m/s}}{0{,}6 \text{ m}} = 50$ Hz

$k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{10}{3}\pi \text{ m}^{-1}$

La onda se propaga de acuerdo con la ecuación:

$$y = A \cos (2\pi f\, t - k\, x) = 0{,}5 \cos 100\pi\ (t - 0{,}03\ x)$$

En $x = 0{,}8$ m, la ecuación es $y = 0{,}5 \cos 100\pi\ (t - 0{,}026\ x)$

8. La ecuación de una onda que se propaga por una cuerda es *y* = 0,25 cos (0,50 *t* – 0,10 *x*) en el SI. Calcula:

PAU

***a)* La frecuencia.**

***b)* La longitud de onda.**

***c)* La velocidad de propagación.**

Comparamos la ecuación que se nos da con la ecuación general del movimiento ondulatorio:

$$y = A \cos (2\pi ft - kx)$$

De donde se deduce que:

a) $2\pi f = 0{,}50;\ f = \dfrac{0{,}50}{6{,}28} = 0{,}080 \text{ Hz}$

b) $k = \dfrac{2\pi}{\lambda};\ \lambda = \dfrac{2\pi}{0{,}10} = 63 \text{ m}$

c) $v = \lambda f = 63 \text{ m} \cdot 0{,}080 \text{ s}^{-1} = 5{,}0 \text{ m/s}$

PAU

9. Una cuerda puesta en el eje *0x* vibra según el eje *0y* con movimiento ondulatorio de ecuación $y\,(x, t) = 0{,}002 \text{ sen } (300\,t + 60\,x)$ en unidades del SI. Calcula:

***a)* El sentido y la velocidad con que se propaga la onda.**

***b)* La longitud de onda y la frecuencia del movimiento.**

a) y *b)* La onda se propaga en sentido negativo del eje *0x*.

La frecuencia se deduce de:

$$2\pi f = 300;\quad f = \frac{300}{2\pi} = 47{,}7 \text{ Hz}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda};\quad \lambda = \frac{2\pi}{60} = 0{,}10 \text{ m}$$

$$v = \lambda f = 0{,}10 \text{ m} \cdot 47{,}7 \text{ s}^{-1} = 5{,}0 \text{ m/s}$$

PAU

10. Dos ondas $y_1 = 0{,}3 \cos (200\,t - 0{,}050\,x_1)$ e $y_2 = 0{,}3 \cos (200\,t - 0{,}050\,x_2)$ se propagan por el mismo medio.

***a)* ¿Con qué velocidad se propagan?**

***b)* Si las ondas se anulan en un punto x_1, distante 10 m del centro emisor de la primera onda, calcula el valor más pequeño de x_2.**

a) De la ecuación de las ondas se deduce que:

$$f = \frac{200}{2\pi} \text{ Hz};\quad \lambda = \frac{2\pi}{0{,}05} \text{ m}$$

Por tanto, la velocidad de propagación será:

$$v = \lambda f = \frac{2\pi}{0{,}05} \text{ m} \cdot \frac{200}{2\pi} \text{ s}^{-1} = 4\,000 \text{ m/s}$$

b) Si las ondas se anulan en el punto indicado, la interferencia es destructiva, y por tanto, la diferencia $x_2 - x_1$ es un múltiplo impar de semilongitudes de onda:

$$x_2 - x_1 = \frac{\lambda}{2};\quad x_2 = x_1 + \frac{\lambda}{2} = 10 \text{ m} + 62{,}8 \text{ m} = 72{,}8 \text{ m}$$

PAU

11. La ecuación de una onda es:

$$\boldsymbol{y\,(x, t) = 6 \cdot 10^{-6} \cdot \cos (1\,900\,t + 5{,}72\,x)}$$

en unidades del SI. Calcula la frecuencia, la longitud de onda y la velocidad de propagación.

De la ecuación de la onda, se deduce que:

$$1\,900 = 2\pi f;\quad f = \frac{1\,900}{6{,}28} = 302{,}5 \text{ Hz}$$

$$5{,}72 = \frac{2\pi}{\lambda};\quad \lambda = \frac{2\pi}{5{,}72} = 1{,}10 \text{ m}$$

por tanto, la velocidad de propagación es:

$v = \lambda f = 1{,}10 \text{ m} \cdot 302{,}5 \text{ s}^{-1} = 333 \text{ m/s}$ en sentido negativo del eje *0x*.

PAU

12. La ecuación de una onda transversal que se propaga en una cuerda es $y\,(x, t) = 0{,}20 \cos (0{,}50\,x - 200\,t)$, donde *x* e *y* se miden en metros y *t* en segundos. Calcula la velocidad de fase y la velocidad transversal de un punto de la cuerda en $x = 40{,}0$ m en el instante $t = 0{,}15$ s.

De la ecuación de la onda se obtienen directamente los valores de la frecuencia y de la longitud de onda:

$$f = \frac{200}{2\pi};\quad \lambda = \frac{2\pi}{0{,}5} = 4\pi \text{ m}$$

por tanto, la velocidad de propagación será:

$$v = \lambda f = 4\pi \cdot \frac{200}{2\pi} = 400 \text{ m/s}$$

La velocidad transversal de las partículas del medio se obtiene derivando la ecuación de la onda:

$$v = \frac{dy}{dt} = -40 \text{ sen } (0{,}5\,x - 200\,t)$$

que en el punto indicado toma el valor:

$$v = -40 \text{ sen } (20 \text{ rad} - 30 \text{ rad}) = -22 \text{ m/s}$$

PAU

13. Se hace vibrar un extremo de una cuerda larga con un periodo de 2,0 s y una amplitud de 4,0 cm, con forma cosenoidal y sin fase inicial. La velocidad de las ondas es de 0,50 m/s. Calcula:

***a)* El desplazamiento de una partícula situada a 1,00 m del centro emisor en los tiempos $t = 4{,}0$ s, 4,5 s y 5,0 s.**

***b)* El desplazamiento de las partículas situadas a las distancias 0,25; 0,75 y 1,00 m del centro emisor para $t = 2$ s.**

Las partículas del medio están animadas de m.a.s. definido por la ecuación $y = A \cos (\omega\, t + \varphi)$.

En este caso, $A = 4{,}0 \text{ cm} = 4{,}0 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{2{,}0 \text{ s}} = \pi$ rad/s; $\varphi = 0$, como indica el enunciado.

$k = \dfrac{\omega}{v} = \dfrac{\pi}{0{,}50} = 2\pi \text{ m}^{-1}$

Por tanto, la ecuación del movimiento es: $y = 4{,}0 \cdot 10^{-2} \cos \pi t$

Este m.a.s. se transmite por el medio mediante una onda cuya ecuación es:

$$y = 4{,}0 \cdot 10^{-2} \cos (\pi\, t - 2\pi\, x)$$

a) La elongación de la partícula $x = 1{,}00$ m en los tiempos indicados es:

$y = 4{,}0 \cdot 10^{-2} \cdot \cos (\pi \cdot 4{,}0 - 2\pi) =$

$= 4{,}0 \cdot 10^{-2} \cdot \cos 2\pi = 4{,}0 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

$y = 4{,}0 \cdot 10^{-2} \cdot \cos (\pi \cdot 4{,}5 - 2\pi) =$

$= 4{,}0 \cdot 10^{-2} \cdot \cos \dfrac{5}{2}\pi = 0 \text{ m}$

$y = 4{,}0 \cdot 10^{-2} \cdot \cos (\pi \cdot 5{,}0 - 2\pi) =$

$= 4{,}0 \cdot 10^{-2} \cdot \cos 3\pi = -4{,}0 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

b) Aplicamos la misma ecuación para las partículas que se indican:

$y = 4,0 \cdot 10^{-2} \cdot \cos(2\pi - 2\pi \cdot 0,25) =$

$= 4,0 \cdot 10^{-2} \cdot \cos\frac{3\pi}{2} = 0$ m

$y = 4,0 \cdot 10^{-2} \cdot \cos(2\pi - 2\pi \cdot 0,75) =$

$= 4,0 \cdot 10^{-2} \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 0$ m

$y = 4,0 \cdot 10^{-2} \cdot \cos(2\pi - \pi) = 4,0 \cdot 10^{-2}$ m

14. Una onda viene dada por la ecuación en el SI:

PAU

$$y\,(x, t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{x\,\pi}{0,80}\right)$$

Calcula:

a) **El carácter de la onda y su velocidad de propagación.**

b) **La diferencia de fase para dos posiciones de la misma partícula cuando el intervalo de tiempo transcurrido es de 2 s.**

c) **La diferencia de fase en un instante dado de dos partículas separadas 120 cm en el sentido de avance de la onda.**

a) Las partículas vibran paralelas al eje Oy, y la onda se propaga a lo largo del eje Ox en sentido negativo. Por tanto, se trata de una onda transversal, cuya frecuencia se obtiene de:

$$\frac{\pi}{2} = 2\pi f \qquad f = \frac{1}{4}\text{ Hz}$$

La velocidad con que se propaga es:

$$v = \lambda f = \frac{2\pi}{k}f = \frac{2\pi}{\pi/0,80} \cdot \frac{1}{4} = 0,4 \text{ m/s}$$

b) $\delta = \left(\frac{\pi}{2}t_1 + \frac{x\,\pi}{0,80}\right) - \left(\frac{\pi}{2}t_2 + \frac{x\,\pi}{0,80}\right) = \frac{\pi}{2}(t_1 - t_2) = \pi = 180°$

c) $\delta = \left(\frac{\pi}{2}t + \frac{x_1\,\pi}{0,80}\right) - \left(\frac{\pi}{2}t + \frac{x_2\,\pi}{0,80}\right) = \frac{\pi}{0,80}(x_1 - x_2) =$

$= \frac{\pi}{0,80} \cdot 1,2 = 1,5\pi = 270°$

15. La ecuación de una onda transversal que se propaga por una cuerda es: $y\,(x, t) = 0,40\cos\pi\,(100\,t - 25\,x)$.

Calcula:

a) **La longitud de onda.**

b) **Si la densidad lineal de la cuerda es 0,8 kg/m, la tensión a que está sometida.**

a) De la ecuación se deduce que:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 25\pi; \quad \lambda = \frac{2}{25} = 0,080 \text{ m}; \quad f = 50 \text{ Hz}$$

b) La velocidad de propagación es:

$$v = \lambda f = 0,080 \text{ m} \cdot 50 \text{ Hz} = 4 \text{ m/s}$$

Esta velocidad viene determinada por la tensión de la cuerda, de acuerdo con la ecuación:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\eta}}; \quad F = v^2\,\eta = 16 \text{ m}^2/\text{s}^2 \cdot 0,8 \text{ kg/m} = 12,8 \text{ N}$$

16. La ecuación de propagación de una onda que se genera en una cuerda se puede expresar de la forma $y\,(x, t) = 0,3\cos\left(300\pi\,t - 10\,x + \frac{1}{2}\pi\right)$, en unidades del SI. Calcula:

a) **La frecuencia y la longitud de onda.**

b) **La velocidad de propagación de la onda.**

a) Expresamos la ecuación de onda como:

$$y\,(x, t) = A\cos(2\pi ft - kx + h) = 0,3\cos\left(300\pi\,t - 10x + \frac{1}{2}\pi\right)$$

De donde $f = 150$ Hz y $\lambda f = \frac{2\pi}{k} = \frac{\pi}{5}$ m.

b) La velocidad de propagación de la onda es:

$$v = \lambda f = \frac{\pi}{5} \text{ m} \cdot 150 \text{ Hz} = 30\pi \text{ m/s}$$

17. En un punto *O* de la superficie libre de un líquido dejamos caer regularmente gotas a razón de 90 por minuto. Si la velocidad de propagación de las ondas que se generan es de 30 cm/s:

a) **¿Cuál es la distancia entre dos crestas consecutivas?**

b) **Supongamos que a 45 cm de *O* hay un corcho flotando y que empieza a vibrar con una amplitud de 5 cm cuando las olas inciden en él. Escribe la ecuación del movimiento del corcho.**

a) En primer lugar, definimos la perturbación con sus condiciones. Cada 60 s se produce una perturbación de modo que la frecuencia de la misma es:

$$f = \frac{90 \text{ gotas}}{60 \text{ s}} = 1,5 \text{ Hz}$$

Por otra parte, la velocidad de las ondas producidas es de 30 cm/s, luego:

$$v = \lambda f = \frac{2\pi}{k}f; \quad k = \frac{2\pi f}{v} = \frac{2\pi \cdot 1,5 \text{ Hz}}{0,3 \text{ m/s}} = 10\pi \text{ m.}$$

Despejamos la longitud de onda, $\lambda = 0,3 \text{ m/s} \cdot 1,5 \text{ Hz} = 0,20$ m.

b) Con los parámetros de onda conocidos podemos escribir la ecuación de ondas como $y\,(x, t) = A\cos(3\pi\,t - 10\pi\,x)$.

Si el corcho vibra con amplitud $A = 0,05$ m, a 45 cm de O, esta ecuación se transforma en:

$$y\,(x, t) = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) = A\cos 2\pi f\left(t - \frac{x}{v}\right) =$$

$$= 0,05\cos 3\pi\left(t - \frac{45}{30}\right) = 0,05\cos 3\pi\,(t - 1,5)$$

18. Una onda armónica se propaga en el sentido positivo de eje *Ox* con las siguientes características: amplitud 8 cm, frecuencia 100 Hz y velocidad 20 m/s. Escribe la ecuación de onda.

$A = 0,08$ m; $f = 100$ Hz; $k = \frac{2\pi f}{v} = \frac{2\pi \cdot 100 \text{ Hz}}{0,2 \text{ m/s}} = 1000\pi$ m

Así, la ecuación de onda es:

$$y\,(x, t) = 0,08\cos 200\pi\,(t - 0,05\,x)$$

19. Una onda armónica cuya frecuencia es de 50 Hz, se propaga en el sentido positivo del eje *Ox*. Sabiendo que la diferencia

PAU

de fase, en un instante dado, para dos puntos separados 20 cm es de 90°:

a) **Determina el periodo, la longitud de onda y la velocidad de propagación de la onda.**

b) **En un punto dado, ¿qué diferencia de fase existe entre los desplazamientos que tienen lugar en dos instantes separados por un intervalo de 0,01 s?**

a) Sea $y = A \cos (2\pi f t - k x)$ la ecuación de onda. La diferencia de fase entre dos puntos x_1 y x_2 viene dada por:

$$\left(2\pi f t - \frac{2\pi}{\lambda} x_1\right) - \left(2\pi f t - \frac{2\pi}{\lambda} x_2\right) = \frac{2\pi}{\lambda} (x_2 - x_1)$$

En nuestro caso se cumple que $\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (0{,}2 \text{ m})$.

De donde se deduce que la longitud de onda es $\lambda = 0{,}80$ m.

El periodo viene dado por el inverso de la frecuencia:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50 \text{ Hz}} = 0{,}020 \text{ s}$$

La velocidad de propagación será:

$$v = \lambda f = 0{,}80 \text{ m} \cdot 50 \text{ s}^{-1} = 40 \text{ m/s}$$

b) El desfase vale:

$$\delta = (2\pi f t_1 - k x) - (2\pi f t_2 - k x) = 2\pi f (t_1 - t_2) =$$

$$= 2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot 0{,}01 \text{ s} = \pi \text{ rad} = 180°$$

20. Una onda de frecuencia 500 Hz tiene una velocidad de fase de 300 m/s.

a) **¿Cuál es la separación entre dos puntos que tengan una diferencia de fase de 60°?**

b) **¿Cuál es la diferencia de fase entre dos elongaciones en un mismo punto que estén separados por un intervalo de tiempo de una milésima de segundo?**

a) Hallamos en primer lugar la longitud de onda y el número de onda:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{3}{5} \text{ m}; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{10}{3} \pi \text{ m}$$

Diferencia de fase en función de las distancias:

$$\delta = k (x_2 - x_1)$$

En este caso será:

$$\frac{10}{3} \pi \cdot (x_2 - x_1) = \frac{\pi}{3}$$

de donde se deduce que $x_2 - x_1 = 0{,}1$ m.

b) La diferencia de fase en función de los tiempos viene dada por:

$$\delta = \omega (t_2 - t_1) = 2\pi f (t_2 - t_1) = 2\pi \cdot 500 \text{ Hz} \cdot 10^{-3} \text{ s} = \pi = 180°$$

21. La ecuación de una onda es $y (x,t) = 25$ sen $(0{,}40\, t - 3{,}14\, x)$ expresada en unidades del SI. Calcula:

PAU

a) **Los puntos que están en fase y en oposición de fase.**

b) **¿Qué tiempo debe transcurrir para que un punto situado a 5,0 m del foco tenga velocidad máxima?**

a) En primer lugar hallamos la longitud de onda. De la ecuación que se nos da se deduce que:

$$f = \frac{0{,}40}{2\pi} = 0{,}064 \text{ Hz}; \quad \lambda = \frac{2\pi}{3{,}14} = 2 \text{ m}$$

Estarán en fase todos aquellos puntos que disten entre sí $2n$ metros, como se deduce de la condición de interferencia constructiva: $d = x_2 - x_1 = n\, \lambda = 2n$.

Estarán en oposición de fase aquellos que cumplan la condición $d = x_2 - x_1 = (2n + 1)\, \frac{\lambda}{2}$

Es decir, en este caso todos aquellos que disten entre sí $(2n + 1)$ metros.

b) La velocidad transversal de un punto del medio se obtiene derivando la ecuación del movimiento, $v = 10 \cos (0{,}40\, t - 3{,}14\, x)$, cuyo valor máximo tiene lugar cuando se cumple que $\cos (0{,}40\, t - 3{,}14\, x) = 1$; es decir, cuando la fase vale $0{,}40\, t - 3{,}14\, x = 0$.

De donde $t = \frac{3{,}14\, x}{0{,}40} = \frac{3{,}14 \cdot 5{,}0 \text{ m}}{0{,}40} = 39{,}3$ s

22. La ecuación de una onda viene dada por la expresión: $y (x, t) = 0{,}5 \cos 8\pi\, (40\, t - 0{,}5\, x)$ en el SI. Calcula la diferencia de fase que existirá entre dos puntos del medio de propagación si están separados por una distancia de 0,25 m.

La diferencia de fase es:

$$\delta_2 - \delta_1 = 8\pi \cdot (40\pi\, t_2 - 0{,}5\, x_2) - (40\pi\, t_1 - 0{,}5\, x_1)$$

Si consideramos un instante de tiempo t, y la distancia $x_2 - x_1 =$ $= 25$ m, la diferencia de fase resulta:

$$\delta_2 - \delta_1 = 8\pi \cdot (40\, t - 40\pi\, t) - 8\pi \cdot 0{,}5\, (x_2 - x_1) =$$

$$= 8\pi \cdot 0{,}125 = \pi$$

Es decir, estos dos puntos se encuentran en oposición de fase.

23. Un tren de ondas se propaga según la ecuación:

$$\boldsymbol{y (x, t) = 10 \text{ sen } 2\pi \left(\frac{t}{T} + kx\right)}$$

en cm y s. Si la longitud de onda es de 2 m, calcula en un instante dado la diferencia de fase correspondiente a dos partículas separadas 1 m en la dirección de propagación.

La ecuación $y\, (x,t) = 10$ sen $2\pi \left(\frac{t}{T} + k\, x\right)$ la podemos convertir a $y\, (x,t) = A$ sen $\omega \left(t + \frac{x}{v}\right)$. Si se introduce el número de onda $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{2\pi f}{v}$, la ecuación queda:

$$y\, (x,t) = \text{A sen} \left(\omega t + \frac{\omega}{\lambda} x\right) = \text{A sen } (2\pi f t + kx).$$

El desfase sería $\delta = k\, (x_1 - x_2) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 1 \text{ m} = \frac{2\pi}{2 \text{ m}} \cdot 1 \text{ m} = \pi$.

24. PAU **Escribe la ecuación que representa una onda electromagnética polarizada de 5 V/m de amplitud y 1 MHz de frecuencia. Toma el eje *Ox* como dirección de propagación y *Oy* como plano de polarización.**

La ecuación es del tipo:

$$y = A \cos (2\pi\, f\, t - k\, x)$$

Para aplicarla a la onda del problema hallamos en primer lugar sus constantes:

$$A = 5\ \text{V/m};\quad f = 10^6\ \text{Hz};\quad \lambda = \frac{v}{f} = \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{10^6\ \text{Hz}} = 300\ \text{m}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{150}\ \text{m}^{-1}$$

De acuerdo con estos datos, la onda viene expresada por la siguiente ecuación:

$$y = 5 \cos (2\pi \cdot 10^6\, t - 6{,}7 \cdot 10^{-3}\, \pi \cdot x)\ \text{V/m}$$

25. PAU **Una onda armónica esférica tiene de intensidad $6 \cdot 10^{-8}$ W/m² a 20 m del foco emisor. Si no hay absorción, calcula:**

a) **La energía emitida por el foco emisor en un minuto.**

b) **La amplitud de la onda a los 40 m, si a los 20 m es de 4 mm.**

a) De $I = \dfrac{E}{S\, t} = \dfrac{P}{S}$, se deduce que la energía emitida es:

$$E = I\ S\ t = 6 \cdot 10^{-8}\ \text{W/m}^2 \cdot 4\pi \cdot 400\ \text{m}^2 \cdot 60\ \text{s} = 1{,}8 \cdot 10^{-2}\ \text{J}$$

b) La amplitud disminuye con la distancia, de acuerdo con la expresión $A\ r$ = cte. Por tanto, si la distancia se duplica, la amplitud se reduce a la mitad. Es decir, $A = 2$ mm.

26. PAU **Una partícula de masa 5,0 g oscila con movimiento armónico simple, en torno a un punto *O*, con una frecuencia de 12 Hz y una amplitud de 4 cm. En el instante inicial la elongación de la partícula es nula.**

a) **Si dicha oscilación se propaga según una dirección que tomamos como eje *Ox*, con una velocidad de 6,0 m/s, escribe la ecuación que representa la onda unidimensional originada.**

b) **Calcula la energía que transmite la onda generada por el oscilador.**

a) Las constantes del movimiento son:

$$\omega = 2\pi\, f = 24\pi\ \text{Hz};\quad A = 0{,}04\ \text{m}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\, f}{v} = \frac{24\pi}{6{,}0\ \text{m/s}} = 4\pi$$

La onda se propaga de acuerdo con la ecuación:

$$y = A \cos (2\pi\, f\, t - k\, x) = 0{,}04 \cos (24\pi\, t - 4\pi\, x)$$

b) Energía transmitida:

$$E = \frac{1}{2}\ \text{m}\ \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \cdot 5{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot 5\,678\ \text{s}^{-2} \cdot (0{,}04\ \text{m})^2 =$$
$$= 2{,}3 \cdot 10^{-2}\ \text{J}$$

27. Una masa de 2,0 g oscila con una frecuencia de 8,0 Hz y una amplitud de 4,0 cm.

a) **¿Qué energía transmite este oscilador?**

b) **Si la energía se transmite con una velocidad de 20 m/s, ¿cuál es la longitud de onda?**

a) La energía transmitida viene dada por:

$$E = \frac{1}{2}\ \text{m}\ 4\pi^2 f^2 A^2 = 2\pi^2\, m\, f^2 A^2 = 19{,}72 \cdot 2{,}0 \cdot$$
$$\cdot\ 10^{-3}\ \text{kg} \cdot 64{,}0\ \text{s}^{-2} \cdot 16{,}0 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2 = 4{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{J}$$

b) La longitud de onda es: $\lambda = \dfrac{v}{f} = \dfrac{20\ \text{m s}^{-1}}{8{,}0\ \text{s}^{-1}} = 2{,}5$ m

28. PAU **Una onda se propaga por una cuerda según la ecuación $y\ (x, t) = 0{,}2 \cos (200\ t - 0{,}10\ x)$ expresada en el SI. Calcula:**

a) **La longitud de onda y la velocidad de propagación.**

b) **La onda estacionaria resultante de la interferencia de la onda anterior y otra igual que se propaga en sentido contrario.**

c) **La distancia entre dos nodos consecutivos.**

a) De la ecuación de la onda que se da en el enunciado se deduce que:

$$200 = 2\pi\, f;\quad f = \frac{200}{2\pi} = \frac{100}{\pi}\ \text{Hz}$$

$$0{,}1 = \frac{2\pi}{\lambda};\quad \lambda = 20\pi\ \text{m}$$

$$v = \lambda\, f = 20\pi\ \text{m} \cdot \frac{100}{\pi}\ \text{Hz} = 2\,000\ \text{m/s}$$

b) La onda estacionaria que resulta de la interferencia viene dada por la ecuación:

$$y = 0{,}4\ \text{sen}\ 200\ t \cdot \text{sen}\ 0{,}1\ x$$

o también: $y = 2A \cos 200\ t \cdot \cos 0{,}1\ x$

c) La distancia entre dos nodos consecutivos es $\dfrac{\lambda}{2}$, por definición.

Por tanto, $d = 10\pi$ m.

29. La ecuación de una onda transversal que se propaga por una cuerda viene dada por $y\ (x, t) = 0{,}080 \cos \pi\ (100\ t - 0{,}80\ x)$ en unidades del SI. Calcula:

a) **La frecuencia, la longitud de onda y la velocidad de propagación.**

b) **La máxima velocidad transversal de un punto de la cuerda.**

c) **La ecuación de la onda estacionaria que resultaría de la interferencia de la onda anterior con otra igual que se propagase en sentido contrario.**

a) De la ecuación se deduce que:

$f = 50$ Hz; $\lambda = 2{,}5$ m; $v = \lambda f = 2{,}5\ \text{m} \cdot 50\ \text{Hz} = 125$ m/s

b) La velocidad transversal de las partículas del medio es:

$$v = \frac{\text{d}y}{\text{d}t} = -8\pi \cdot \text{sen}\ \pi\ (100\ t - 0{,}80\ x)$$

Cuyo valor máximo es:

$$v_m = \ -8\pi = -25\ \text{m/s}$$

c) La ecuación de la onda estacionaria es del tipo:

$y = 2\,A \cos k\,x \cdot \cos 2\pi\,ft = 0{,}16 \cos 0{,}8\pi\,x \cdot \cos 100\pi\,t$

30. Una cuerda vibra según la ecuación en el SI:

PAU

$$y\,(x,\,t) = 10 \text{ sen } \frac{x\,\pi}{2} \text{ sen } 50\pi\,t$$

Calcula:

a) **La amplitud y la velocidad de las ondas cuya superposición da lugar a la onda anterior.**

b) **Distancia entre dos vientres consecutivos.**

a) Se trata de una onda estacionaria, cuya amplitud es el doble de las amplitudes de las ondas que interfieren. Por tanto, la amplitud de cada onda es $\frac{A}{2} = 5$ m. El número de onda y la frecuencia de la onda estacionaria coinciden con los valores de dichas magnitudes de las ondas concurrentes:

$$50\pi = 2\pi\,f;\quad f = 25 \text{ Hz}$$

$$k = \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\lambda};\quad \lambda = 4 \text{ m}$$

Por tanto, la velocidad de la propagación es:

$$v = \lambda\,f = 100 \text{ m/s}.$$

b) La distancia entre dos vientres consecutivos es media longitud de onda, $d = 2$ m.

31. Una onda viene dada por la ecuación:

$$y\,(x,\,t) = 0{,}2 \text{ sen } (\pi\,x) \cos (100\pi\,t) \text{ m}$$

en donde x está comprendida entre 0 y 6 m.

Calcula:

a) **La longitud de onda y la frecuencia de la onda.**

b) **El número de nodos, incluidos los extremos.**

c) **La velocidad de propagación de la onda.**

a) La ecuación general de una onda estacionaria puede presentarse así:

$$y\,(x,\,t) = A_r \text{ sen } (2\pi\,ft)$$

La amplitud resultante es, en este caso, $A_r = 0{,}2 \text{ sen } (\pi\,x)$, de donde podemos hallar la longitud de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \pi;\ \lambda = 2 \text{ m}$$

La parte de le ecuación de esta onda estacionaria, $\cos (100\pi\,t)$, proporciona el valor de la frecuencia, si consideramos que:

$$\cos (100\pi\,t) = \cos \left(100\pi\,t + \frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{2}t\right) = \cos \left(\frac{201\pi}{2}t - \frac{\pi}{2}t\right)$$

Como además $\cos \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\text{sen } \alpha$, sucede que:

$$\cos (100\pi\,t) = \cos \left(\frac{201\pi}{2}t - \frac{\pi}{2}t\right) = -\text{sen } \frac{201\pi}{2}t.$$

Así, la frecuencia $f = \frac{201}{4} = 50{,}25$ Hz.

b) La longitud de onda es $\lambda = 2$ m y la onda se desplaza entre las posiciones $x = 0$ m y $x = 6$ m, por lo que el número de nodos es $N = \frac{L}{\lambda} + 1 = \frac{6 \text{ m}}{2 \text{ m}} + 1 = 7$.

c) La velocidad es $v = \lambda f = 2 \text{ m} \cdot 50{,}25 \text{ Hz} = 100{,}5$ m/s.

32. Una onda estacionaria viene expresada por la ecuación $y\,(x,\,t) = 0{,}4 \cos (0{,}1\,x) \cos 200\,t$ en unidades del SI.

a) **Calcula la distancia entre dos nodos consecutivos.**

b) **¿Cuál es la longitud de onda?**

c) **¿A qué distancia del origen de la onda se halla el nodo número 15?**

a) y *b)* La distancia entre dos nodos consecutivos es $\frac{\lambda}{2}$, por definición. Así, calculamos el valor de la longitud de onda a partir de la ecuación de la onda, $y\,(x,\,t) = 0{,}4 \cos (0{,}1\,x) \cos 200\,t$:

$k = 0{,}1$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{0{,}1} = 20\pi \text{ m}$$

Es decir, la distancia entre nodos es $d = \frac{\lambda}{2} = 10\pi$.

c) La sucesión de nodos será $x = 5\pi\,(2n + 1)$, es decir, para el primer nodo, $n = 0$, $x = 5\pi$ m. Para el nodo que ocupa la posición 15, $n = 14$, es decir, $x = 5\pi \cdot (14 \cdot 2 + 1) = 145\pi$ m.

33. En un día de tormenta mides el intervalo de tiempo transcurrido entre la percepción del relámpago y la percepción del trueno. Si este intervalo es de 4,00 s, ¿a qué distancia se encuentra la tormenta? (Velocidad del sonido en el aire: 340 m/s.)

Suponiendo que la percepción del relámpago es instantánea, el tiempo indicado es empleado por el sonido en recorrer la distancia que separa la tormenta del observador. Si la velocidad del sonido en el aire es 340 m/s, la distancia pedida será:

$$d = vt = 340 \text{ m/s} \cdot 4 \text{ s} = 1360 \text{ m}$$

34. Halla la velocidad del sonido en el hidrógeno a 27 °C y compara dicha velocidad con la que tendría en el aire a la misma temperatura. El coeficiente adiabático de ambos gases es 1400.

La velocidad del sonido en el hidrógeno viene dada por:

$$v = \sqrt{\frac{1{,}4 \cdot 8{,}31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 300 \text{ K}}{2 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}}} = 1\,321 \text{ m/s}$$

Y la velocidad en el aire es:

$$v = \sqrt{\frac{1{,}4 \cdot 8{,}31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 300 \text{ K}}{28{,}88 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}}} = 347{,}6 \text{ m/s}$$

La relación entre ambas velocidades es:

$$\frac{v_H}{v_a} = \frac{1\,321}{347{,}6} = 3{,}8$$

35. Un altavoz emite con una potencia de 40 W. Calcula la intensidad de la onda sonora en los siguientes puntos:

$d_1 = 5$ m; $d_2 = 10$ m; $d_3 = 15$ m.

La intensidad de la onda viene dada por: $I = \frac{P}{S}$, siendo $S = 4\pi\,d^2$ la superficie de los frentes de onda.

$$I_1 = \frac{P}{4\pi\,d_1^2} = \frac{40 \text{ W}}{4\pi \cdot 25 \text{ m}^2} = \frac{2}{5\pi} \text{ W/m}^2$$

$$I_2 = \frac{P}{4\pi\,d_2^2} = \frac{40 \text{ W}}{4\pi \cdot 100 \text{ m}^2} = \frac{1}{10\pi} \text{ W/m}^2$$

$$I_3 = \frac{P}{4\pi\,d_3^2} = \frac{40 \text{ W}}{4\pi \cdot 225 \text{ m}^2} = \frac{2}{45\pi} \text{ W/m}^2$$

36. Dos sonidos tienen niveles de intensidad sonora de 50 dB y 70 dB, respectivamente. Calcula la relación de sus intensidades.

PAU

Aplicamos la ecuación del nivel de intensidad sonora a los dos casos que se nos dan en el enunciado.

$$\left.\begin{aligned} 50\text{ dB} &= 10\log\frac{I_1}{I_0} \\ 70\text{ dB} &= 10\log\frac{I_2}{I_0} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\frac{I_1}{I_0} = 10^5;\ I_1 = 10^5\,I_0 \\ &\frac{I_2}{I_0} = 10^7;\ I_2 = 10^7\,I_0 \end{aligned}$$

La relación pedida será:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{10^7\,I_0}{10^5\,I_0} = 10^2;\ I_2 = 100\ I_1$$

37. Se emite un sonido de 80 dB y una f = 2 000 Hz. Calcula la longitud de onda y la intensidad sonora.

Supongamos que la velocidad es 340 m/s. De acuerdo con este dato, la longitud de onda será:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340\text{ m/s}}{2\,000\text{ Hz}} = 0{,}17\text{ m}$$

Intensidad sonora:

$$80\text{ dB} = \log\frac{I}{10^{-12}};\ \log I + 12 = 8;\ \log I = -4$$

por tanto, $I = 10^{-4}$ W/m^2.

38. Una ambulancia que emite un sonido de 520 Hz se acerca con una velocidad de 72 km/h hacia un observador en reposo situado en el arcén de una carretera, ¿qué frecuencia detecta el peatón?

Aplicamos la ecuación del efecto Doppler:

$$f' = f\,\frac{v + v_0}{v - v_f} = 520\text{ Hz};\ \frac{340\text{ m/s} + 0}{340\text{ m/s} - 20\text{ m/s}} = 553\text{ Hz}$$

Actividades

1. Describe en unas líneas el proceso que siguió Newton hasta enunciar la Ley de la Gravitación Universal.

Esta actividad es abierta. Para contestar, los alumnos pueden consultar el libro de texto.

2. ¿Cómo son las órbitas que describen los planetas en torno al Sol? ¿Es erróneo suponer que tales órbitas son circulares? ¿Por qué?

Las órbitas reales son elípticas. Pero se comete un error despreciable si se las considera circulares, porque su excentricidad es muy pequeña.

3. ¿Por qué la Ley de Newton tiene carácter universal?

Porque es válida para todos los cuerpos del Universo.

4. Newton dedujo la Ley de la Gravitación partiendo de la Tercera Ley de Kepler. Realiza el proceso inverso: comprueba que se cumple la Tercera Ley de Kepler partiendo de la Ley de Newton. *Orientación:* consulta la primera aplicación de la Teoría de la Gravedad.

Si un planeta describe una órbita circular, la fuerza centrípeta necesaria para ello la origina la atracción que ejerce el Sol sobre él. Es decir, se debe cumplir:

$$G\,\frac{M\,m}{R_0^2} = m\,\frac{v^2}{R_0}$$

De donde se obtiene la velocidad con que describe la órbita:

$$v = \sqrt{\frac{G\,M}{R_0}}$$

El tiempo empleado en describir la órbita será:

$$T = \frac{2\,\pi\,R_0}{v} = \frac{2\,\pi\,R_0}{\sqrt{\dfrac{G\,M}{R_0}}}$$

Si elevamos al cuadrado el valor de este periodo, tenemos:

$$T^2 = \frac{4\,\pi^2\,R_0^2}{\dfrac{G\,M}{R_0}} = \frac{4\,\pi^2\,R_0^3}{G\,M} = k\,R_0^3$$

que es la expresión de la Tercera Ley de Kepler, siendo $k = \dfrac{4\,\pi^2}{G\,M}$

5. PAU Supongamos que conoces el periodo y el radio de la órbita de un satélite que gira alrededor de la Tierra. Con esta información y con ayuda de las leyes de Newton, ¿puedes calcular la masa del satélite? ¿Podrías calcular la masa de la Tierra?

Con los datos que se indican se puede calcular la masa de la Tierra, pero no la del satélite, puesto que esta no depende ni del radio ni del periodo. En efecto, con el radio de la órbita y el periodo de revolución se puede calcular la velocidad orbital:

$$v = \frac{2\,\pi\,R}{T}$$

Además, si la órbita es estable, se debe cumplir que la fuerza gravitatoria origina la aceleración centrípeta del satélite:

$$G\,\frac{M\,m}{R^2} = m\,\frac{v^2}{R}$$

De donde se obtiene la masa de la Tierra:

$$M = \frac{v^2\,R}{G} = \frac{4\,\pi^2\,R^3}{T^2\,G}$$

6. Si la Luna estuviera siempre en el mismo punto aparentemente inmóvil respecto de la Tierra, ¿qué dirías acerca del periodo de nuestro satélite?

Si la Luna estuviera aparentemente estacionaria, tendría el mismo periodo de revolución que el periodo de rotación de la Tierra, es decir $T = 8{,}64 \cdot 10^4$ s (365 días). Con este dato se podría calcular el radio de la órbita descrita por la Luna.

7. PAU Calcula la masa del Sol sabiendo que la Tierra gira en torno a él describiendo una órbita de radio $1{,}49 \cdot 10^{11}$ m y que la Tierra da una vuelta alrededor del Sol cada 365 días ($G = = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2).

Conocemos el radio orbital y el periodo de revolución, que en este caso es de un año: $T = 365 \cdot 86\,400$ s.

Por tanto, aplicamos la expresión deducida en la Actividad 5.

$$M = \frac{4\,\pi^2\,R^3}{T^2\,G} = \frac{4 \cdot 9{,}85 \cdot 149^3 \cdot 10^{27}\ \text{m}^3}{(365 \cdot 86\,400\ \text{s})^2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2\ \text{kg}^{-2}} =$$

$$= 2{,}0 \cdot 10^{30}\ \text{kg}$$

8. PAU Un satélite se encuentra en una órbita circular alrededor de la Tierra y tiene un periodo de 2 h. ¿A qué altura de la superficie de la Tierra se encuentra el satélite? (Toma como radio de la Tierra el valor de 6 400 km.)

Si el satélite tiene una órbita estable, se cumple que:

$$m\,\frac{v^2}{R} = G\,\frac{M\,m}{R^2}$$

de donde se deduce que el radio de la órbita vale:

$$\left.\begin{aligned} R &= \frac{G\,M}{v^2} \\ v &= \frac{2\,\pi\,R}{T} \end{aligned}\right\}\quad R^3 = \frac{G\,M\,T^2}{4\,\pi^2}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot (2 \cdot 3\,600\ \text{s})^2}{4 \cdot 9{,}85}} =$$

$= 7{,}9 \cdot 10^6$ m = 7 900 km

Luego la altura será h = 7 900 km − 6 400 km = 1 500 km.

9. ¿La energía potencial asociada al sistema Luna-Tierra es mayor, igual o menor que la E_c de la Luna en su movimiento alrededor de la Tierra?

La energía potencial asociada al sistema Luna-Tierra viene dada por

$$E = -G\,\frac{M_L\,M_T}{R_0} = M_L\,\frac{v^2}{R_0},$$

siendo R_0 el radio orbital de la Luna.

Para hallar la energía cinética de la Luna calculamos primero la velocidad orbital, teniendo en cuenta la condición de estabilidad de la órbita circular que describe:

$$G\,\frac{M_L M_T}{R_0^2} = M_L\,\frac{v^2}{R_0}; \qquad \text{de donde} \qquad v^2 = \frac{G M_T}{R_0}$$

Por tanto, la energía cinética de la Luna viene dada por:

$$E_c = \frac{1}{2}\,M_L v^2 = \frac{1}{2}\,G\,\frac{M_L M_T}{R_0}$$

Del resultado se deduce que, en valor absoluto, la energía potencial es doble que la energía cinética. Sin embargo, teniendo en cuenta el signo, la energía cinética, al ser positiva, es mayor que la energía potencial.

10. Supongamos un cometa de un periodo muy largo, 10^6 años, por ejemplo. ¿Qué tipo de trayectoria tendría este cometa?

Para un periodo muy grande, la trayectoria se puede considerar parabólica.

11. Describe cómo varía la masa de un astronauta y la fuerza gravitatoria sobre él durante un viaje de la Tierra a la Luna.

La masa es una magnitud característica de cada cuerpo, que no depende de las interacciones con otros cuerpos. Por tanto, la masa del astronauta no varía. En cambio, la fuerza gravitatoria depende de la intensidad del campo gravitatorio en que se encuentre. A medida que se aleja de la Tierra, la fuerza gravitatoria terrestre disminuye hasta hacerse prácticamente nula. Cuando se aproxima a la Luna, el campo gravitatorio de ésta aumenta y la fuerza gravitatoria sobre el astronauta se va haciendo mayor hasta alcanzar un valor máximo en la superficie lunar, que viene a ser la sexta parte del valor que tenía en la superficie de la Tierra.

12. ¿Con qué aceleración debe descender un ascensor para que el peso aparente de un pasajero de 80 kg sea 600 N?

Cuando el ascensor desciende con una aceleración a, el peso aparente del pasajero viene dado por:

$$P' = mg - ma$$

Por tanto, la aceleración será:

$$a = \frac{mg - P'}{n} = \frac{80\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 - 600\ \text{N}}{80\ \text{kg}} = 2{,}3\ \text{m/s}^2$$

13. Un satélite artificial describe una órbita circular alrededor de la Tierra. La velocidad de escape a la atracción terrestre desde esa órbita es la mitad que la velocidad de escape desde la superficie terrestre.

***a)* ¿A qué altura se encuentra el satélite?**

***b)* ¿Se trata de un satélite estacionario?**

a) La velocidad de escape se obtiene aplicando el Principio de Conservación de la Energía Mecánica, ya que la fuerza gravitatoria que actúa sobre el satélite es conservativa.

Así, la velocidad de escape desde la superficie terrestre se obtiene igualando la energía mecánica inicial en la superficie a la final, en el infinito.

$$\frac{1}{2}\,m v_T^2 + \left(-G\,\frac{M_T m}{R_T}\right) = 0$$

Es decir: $$v_T = \sqrt{\frac{2 G M_T}{R_T}}$$

La velocidad de escape desde la órbita a una altura h sobre la superficie terrestre es análogamente:

$$v_h = \sqrt{\frac{2 G M_T}{R_T + h}}$$

Como la relación entre las velocidades de escape es v_h=1/2v_T, resulta que:

$$v_h = \sqrt{\frac{2 G M_T}{R_T + h}} = \frac{1}{2}\,v_T = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2 G M_T}{R_T}}$$

de donde podemos hallar la altura a la que está el satélite:

$$\frac{2 G M_T}{R_T + h} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2 G M_T}{R_T} \;\Rightarrow\; h = 3\,R_T$$

b) No, porque el periodo de rotación del satélite es distinto que el de rotación terrestre.

14. El radio de un planeta es la tercera parte del radio terrestre, y su masa la mitad. Calcula la gravedad en su superficie y la velocidad de escape del planeta en función de sus correspondientes valores terrestres.

La intensidad del campo gravitatorio con la distancia se obtiene aplicando la Ley de la Dinámica.

El caso general para un cuerpo esférico uniforme de masa M y radio R la intensidad de campo gravitatorio en su superficie es:

$$g_P = G\,\frac{M_p}{R_P^2}$$

Según los datos del problema, $R_P = \frac{1}{3}\,R_T$ y $M_P = \frac{1}{2}\,M_T$, así que sustituyendo resulta:

$$g_P = G\,\frac{M_P}{R_P^2} = G\,\frac{\frac{1}{2}\,M_T}{\left(\frac{1}{3}\,R_T\right)^2} = \frac{9}{2}\,G\,\frac{M_T}{R_T^2} = \frac{9}{2}\,g_0$$

La velocidad de escape se obtiene aplicando el Principio de Conservación de la Energía Mecánica, de donde se obtiene:

$$v_P = \sqrt{\frac{2 G M_P}{R_P}}$$

Sustituyendo la masa del planeta y su radio en función de los de la Tierra, la velocidad de escape es:

$$v_P = \sqrt{\frac{2 G\,\frac{1}{2}\,M_T}{\frac{1}{3}\,R_T}} = \sqrt{\frac{3 G M_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\;v_T$$

La Teoría de la Gravitación y el Método Científico

Cuestiones

1. **El movimiento de los planetas del Sistema Solar es uniforme:**

   ***a)* Siempre.** *b)* Nunca.

   c) Si la órbita es circular. *d)* Si la órbita es elíptica.

2. **La energía potencial de un planeta:**

   a) Es constante siempre.

   ***b)* Es constante si la trayectoria es circular.**

   c) Es variable.

   d) Es constante si la órbita es elíptica.

3. **La energía mecánica de un satélite:**

   ***a)* Es constante siempre.**

   b) Es constante si la órbita es circular.

   c) Es constante si la órbita es elíptica.

   d) Varía continuamente.

4. **Las hipótesis de Copérnico sobre el sistema solar:**

   a) Fueron válidas en su tiempo pero están superadas actualmente.

   ***b)* Tienen plena validez en la actualidad.**

   c) Son falsas.

   d) Han pasado de hipótesis a hechos confirmados por la experiencia.

Cuestiones y problemas

1. **Si la Tierra describe una órbita de $1,5 \cdot 10^{11}$ m de radio, calcula la velocidad areolar (área barrida en un segundo) en m^2/s del radio vector trazado desde el Sol a la Tierra.**

   La velocidad areolar, por definición, se obtiene de:

$$v_a = \frac{\pi R^2}{T} = \frac{3{,}14 \cdot (1{,}5 \cdot 10^{11}\ \text{m})^2}{365 \cdot 86\,400\ \text{s}} = 2{,}2 \cdot 10^{15}\ \text{m}^2/\text{s}$$

2. PAU **Marte tiene dos satélites, llamados Fobos y Deimos, cuyas órbitas tienen radios de 9 400 y 23 000 km, respectivamente. Fobos tarda 7,7 h en dar una vuelta alrededor del planeta. Aplicando las leyes de Kepler, halla el periodo de Deimos.**

   De la Tercera Ley de Kepler despejamos el periodo T_1:

$$T_1 = \sqrt{\frac{T_2^2\, r_1^3}{r_2^{\,3}}} = \sqrt{\frac{(7{,}7\ \text{h})^2 \cdot (23\,000\ \text{km})^3}{(9\,400\ \text{km})^3}} = 29{,}4\ \text{h}$$

3. **Dos bolas de acero de masas 8 y 6 kg, respectivamente, están colocadas a 2 m de distancia medida desde sus centros. ¿Cuánto vale su interacción gravitatoria?**

   La interacción gravitatoria viene dada por la Ley de Newton:

$$F = G\,\frac{m_1 m_2}{r_2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\,\text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{8\ \text{kg}\ .\ 6\ \text{kg}}{4\ \text{m}^2} = 8 \cdot 10^{-10}\ \text{N}$$

4. PAU **La masa de la Tierra es $6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg y la masa de la Luna $7{,}2 \cdot 10^{22}$ kg. Si la fuerza gravitatoria entre ellas es $1{,}9 \cdot 10^{20}$ N, ¿qué distancia hay entre el centro de la Tierra y el centro de la Luna?**

   De la Ley de Newton despejamos la distancia:

$$r = \sqrt{\frac{G M m}{F}} =$$

$$= \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{N}\,\text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 6{,}0 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot 7{,}2 \cdot 10^{22}\ \text{kg}}{1{,}9 \cdot 10^{20}\ \text{N}} = 3{,}9 \cdot 10^{8}\ \text{m}$$

5. **Si la Ley de la Gravitación variara *a)* $\frac{1}{r}$, *b)* $\frac{1}{r^3}$ en lugar de $\frac{1}{r^2}$, ¿cómo afectaría esto al peso de un cuerpo sobre la superficie de la Tierra?**

   El peso de un cuerpo en la superficie de la Tierra vale:

$$P = m g, \quad \text{siendo} \quad g = \frac{G M}{R^2}$$

   a) Si la Ley de la Gravitación dependiera de $\frac{1}{r}$, el valor de la gravedad y el peso serían:

$$g' = G\,\frac{M}{R}; \qquad P' = m g' = m\,\frac{G M}{R} = R m g$$

   Sería, por tanto, R veces mayor: $P' = R P$.

   b) En este caso la gravedad y el peso serían:

$$g'' = G\,\frac{M}{R^3}; \qquad P'' = m g'' = \frac{1}{R}\, m g = \frac{P}{R}$$

   El peso sería R veces menor.

6. PAU **El satélite mayor de Saturno, Titán, describe una órbita de radio medio $r = 1{,}222 \cdot 10^6$ km en un periodo de 15,945 días. Determina la masa del planeta Saturno y su densidad. (Radio de Saturno: 58 545 km.)**

   Igualamos la fuerza gravitatoria con la fuerza centrípeta:

$$G\,\frac{M m}{r^2} = m\,\frac{v^2}{r} \ \Rightarrow\ v = \sqrt{\frac{G M}{r}}$$

   siendo M la masa de Saturno, cuyo valor obtenemos a partir del periodo:

$$T = \frac{2 \pi r}{\sqrt{\dfrac{G M}{r}}}$$

$$M = \frac{4 \pi^2 r^3}{G T^2} = \frac{4 \cdot 9{,}86\ \cdot\ (1{,}222 \cdot 10^9\ \text{m})^3}{(15{,}945 \cdot 86\,400\ \text{s})^2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N}\,\text{m}^2\,\text{kg}^{-2}} =$$

$$= 5{,}67 \cdot 10^{26}\ \text{kg}$$

   Densidad del planeta:

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3 \cdot 5{,}7 \cdot 10^{26}\ \text{kg}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot (5{,}85 \cdot 10^{7}\ \text{m})^3} = 677\ \text{kg}\,\text{m}^{-3}$$

7. Desde una altura de 50 m se deja caer un cuerpo de 500 g. Si al llegar al suelo penetra en este una distancia de 8,0 cm, calcula la resistencia media que ofrece el suelo. ¿En qué se ha empleado la energía mecánica que poseía el cuerpo? Se desprecia la resistencia del aire.

Si no existe rozamiento, toda la energía potencial perdida se ha convertido en trabajo: $mg\,(h + x) = Fx$

$$F = \frac{mg(h+x)}{x} = \frac{0{,}5 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 50{,}08 \text{ m}}{0{,}08 \text{ m}} =$$

$$= 3\,067{,}4 \text{ N} = 3{,}1 \cdot 10^3 \text{ N}$$

Si despreciamos la variación de energía potencial que tiene lugar mientras penetra en el suelo, obtenemos la solución aproximada: $mgh = Fx$

$$F = \frac{mgh}{x} = \frac{0{,}5 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 50 \text{ m}}{0{,}08 \text{ m}} = 3\,062{,}5 \text{ N} = 3{,}1 \cdot 10^3 \text{ N}$$

De todas formas, ambas soluciones coinciden si redondeamos el resultado al número de cifras significativas determinado por los datos.

8. Se lanza verticalmente hacia arriba un cuerpo de 225 g de masa con una velocidad de 100 m/s y vuelve al punto de partida con una velocidad de 95 m/s. Calcula la fuerza media de rozamiento del aire si el cuerpo alcanzó una altura de 495 m.

Cuando el cuerpo vuelve al punto de partida, la disminución de energía cinética se ha empleado en vencer la fuerza de rozamiento, tanto en la subida como en la bajada. Se cumple entonces que:

$$F_r \cdot 2\text{ h} = \frac{1}{2}\text{ m }(v_0^2 - v_f^2)$$

$$F_r = \frac{m\,(v_0^2 - v_f^2)}{4h} = \frac{0{,}225 \text{ kg} \cdot (100^2 \text{ m}^2/\text{s}^2 - 95^2 \text{ m}^2/\text{s}^2)}{4 \cdot 495 \text{ m}} =$$

$$= 0{,}113 \text{ N}$$

PAU **9. Se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 50 m/s. Si el rozamiento con el aire es despreciable, calcula, utilizando el principio de conservación de la energía mecánica, la altura máxima que alcanza. ¿Qué altura máxima alcanzará en el caso de que haya rozamiento y se pierda para vencerlo el 20 % de la energía de lanzamiento?**

La energía mecánica en el suelo debe ser igual a la energía mecánica en el punto más alto.

$$\frac{1}{2} mv^2 + 0 = mg\text{h} + 0$$

de donde se deduce que:

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{2\,500 \text{ m}^2/\text{s}^2}{19{,}6 \text{ m}^2/\text{s}^2} = 128 \text{ m}$$

En el caso de que se pierda energía por causa del rozamiento:

$$\frac{1}{2} mv^2 = mgh + 0{,}2 \cdot \frac{1}{2} mv^2$$

$$h = \frac{v^2 - 0{,}2\,v^2}{2g} = \frac{2\,500 \text{ m}^2/\text{s}^2 - 0{,}2 \cdot 2\,500 \text{ m}^2}{19{,}6 \text{ m/s}^2} = 102 \text{ m}$$

10. En el movimiento circular de un satélite en torno a la Tierra, determina:

a) **La expresión de la energía cinética en función de las masas del satélite, de la Tierra y del radio de la órbita.**

b) **La relación que existe entre su energía mecánica y su energía potencial.**

a) De la condición de equilibrio para mantenerse en órbita, deducimos la velocidad del satélite:

$$m\,\frac{v^2}{R_0} = G\,\frac{Mm}{R_0^2} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{R_0}$$

Siendo R_0 el radio de la órbita $R_0 = R_T + h$.

Por tanto, la energía cinética viene dada por:

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{GMm}{R_0}$$

b) La energía potencial asociada al sistema Tierra-satélite es $E_p = -\dfrac{GMm}{R_0}$, cuya relación con la energía mecánica es:

$$E_m = E_c + E_p = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{R_0} = \frac{1}{2} E_p$$

11. Un satélite artificial gira en torno a la Tierra describiendo una órbita de 7 000 km de radio. Calcula la velocidad y el periodo de revolución del satélite suponiendo que la masa de la Tierra es $M_T = 6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg.

Para que el satélite describa la órbita circular se debe cumplir que:

$$m\,\frac{v^2}{R} = G\,\frac{Mm}{R^2}$$

de donde se deduce la velocidad del satélite:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} =$$

$$= \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2 \cdot 6{,}0 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{7 \cdot 10^6 \text{ m}}} = 7{,}6 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

El periodo de revolución vale:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 7 \cdot 10^6 \text{ m}}{7{,}6 \cdot 10^3 \text{ m/s}} = 5\,784 \text{ s} = 1{,}6 \text{ h}$$

12. Un satélite artificial gira en torno a la Tierra describiendo una órbita situada a 500 km de altura y tarda 1,57 h en dar una vuelta. Calcula la masa de la Tierra. (Toma para el radio de la Tierra el valor de 6 400 km.)

La fuerza gravitatoria ha de ser igual a la fuerza centrípeta para que el satélite esté en equilibrio dinámico en la trayectoria:

$$m\,\frac{v^2}{R} = G\,\frac{Mm}{R^2}; \text{ de donde } v^2 = \frac{GM}{R}$$

También sabemos que $v = \dfrac{4\pi^2 R^2}{T^2}$, por tanto, se cumple que:

$$\frac{4\pi^2 R^2}{T^2} = \frac{GM}{R};$$

de donde se obtiene la masa de la Tierra:

$$M = \frac{4\pi^2 R^3}{T^2 G} = \frac{4 \cdot 3{,}14^2 \cdot (6{,}9 \cdot 10^6\ \text{m})^3}{(1{,}57 \cdot 3\,600\ \text{s})^2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2} =$$

$= 6 \cdot 10^{24}$ kg

13. El satélite *Meteosat* nos envía tres veces al día imágenes de Europa para la confección de los mapas del tiempo. Calcula:

PAU

***a)* Su periodo de revolución.**

***b)* El radio de la órbita que describe.**

Del enunciado se deduce que el periodo es la tercera parte de un día.

a) $T = \frac{1}{3} \cdot 24\ \text{h} = 8\ \text{h}$

b) Sabemos que la velocidad orbital es: $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$

Por consiguiente: $T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{\sqrt{\frac{GM}{R}}}$

de donde: $R = \sqrt[3]{\frac{T^2 GM}{4\pi^2}} =$

$$= \sqrt[3]{\frac{(8 \cdot 3\,600\ \text{s})^2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2 \cdot 6{,}0 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{4\pi^2}} =$$

$= 2{,}0 \cdot 10^7$ m

14. *a)* ¿Cuál será el valor de *g* a una altura igual al radio de la Tierra? (R_T = 6 370 km; g_0 = 9,8 m/s^2.)

***b)* ¿Cuál será el periodo de un satélite artificial de la Tierra en una órbita circular a dicha altura?**

a) El valor de la gravedad para cualquier altura *h* viene dado por:

$$g_h = G\,\frac{M}{(R+h)^2}$$

En este caso se cumple:

$$g_h = \frac{GM}{4R^2} = \frac{g_0}{4} = 2{,}45\ \text{m/s}^2$$

b) En primer lugar, determinamos la velocidad orbital a partir del valor de la fuerza centrípeta:

$$m\,\frac{v^2}{R_0} = G\,\frac{Mm}{R_0^2}$$

siendo el radio de la órbita $R_0 = 2\,R_T$; $\quad v^2 = \frac{GM}{R_0}$

combinando este valor con el que se deduce de la definición de periodo, $v = \frac{2\pi R_0}{T}$, obtenemos $\frac{4\pi^2 R_0^2}{T^2} = \frac{GM}{R_0}$, de donde despejamos el periodo:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2\,(2R_T)^3}{GM}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot 8R_T^3}{g R_T^2}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot 8R_T}{g}} =$$

$$= \sqrt{\frac{32 \cdot 9{,}85 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6\ \text{m}}{9{,}8\ \text{m/s}^2}} = 14\,320\ \text{s} = 4{,}0\ \text{h}$$

15. Se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una velocidad de 4 000 m/s. Calcula la altura máxima que alcanzará. (Dato: R_T = 6 400 km.)

Para hallar la altura máxima alcanzada aplicamos el Principio de Conservación de la Energía Mecánica, puesto que el cuerpo se mueve bajo la acción de la gravedad, que es una fuerza conservativa.

$$-G\,\frac{Mm}{R_T} + \frac{1}{2}\,m v^2 = -G\,\frac{Mm}{R_T + h}$$

de donde: $\frac{1}{2}\,m v^2 = \frac{GMm}{R_T} - \frac{GMm}{R_T + h}$

$$\frac{1}{2}\,v^2 = \frac{GM}{R_T} \cdot \frac{h}{R_T + h}$$

Como no nos han dado el dato de la masa de la Tierra, expresamos la igualdad anterior en función de la gravedad, que suponemos conocida:

$$g = \frac{GM}{R_T^2}$$

Luego: $\frac{1}{2}\,v^2 = R_T g\,\frac{h}{R_T + h}$

Despejando *h* tenemos:

$$h = \frac{0{,}5\,v^2 R_T}{R_T g - 0{,}5\,v^2} =$$

$$= \frac{0{,}5 \cdot 16 \cdot 10^6\ \text{m}^2/\text{s}^2 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6\ \text{m}}{6{,}4 \cdot 10^6\ \text{m} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 - 0{,}5 \cdot 16 \cdot 10^6\ \text{m}^2/\text{s}^2} = 9{,}4 \cdot 10^5\ \text{m}$$

16. Calcula la velocidad de escape de un cohete lanzado desde la Luna. Datos: $M_L = 7{,}36 \cdot 10^{22}$ kg; $R_L = 1{,}74 \cdot 10^6$ m.

La velocidad de escape se obtiene aplicando el Principio de Conservación de la Energía Mecánica, ya que la fuerza gravitatoria que actúa sobre el cohete es conservativa. Energía mecánica inicial = energía mecánica final (que es cero):

$$\frac{1}{2}\,m v_e^2 + \left(-\frac{GM_L m}{R_L}\right) = 0$$

Por tanto, el valor de v_e será:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_L}{R_L}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2\ \text{kg}^{-2} \cdot 7{,}36 \cdot 10^{22}\ \text{kg}}{1{,}74 \cdot 10^6\ \text{m}}} =$$

$= 2{,}38 \cdot 10^3$ m/s

17. Calcula el valor de la velocidad que hay que comunicar a un cuerpo en la superficie terrestre, en dirección horizontal, para que se mueva en torno a la Tierra describiendo una órbita circular ($R_T = 6{,}4 \cdot 10^6$ m).

La velocidad se obtiene igualando la fuerza gravitatoria con la fuerza centrípeta:

$$G\,\frac{Mm}{R_T^2} = m\,\frac{v^2}{R_T}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R_T}} = \sqrt{g R_T} = \sqrt{9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6\ \text{m}} = 7{,}9 \cdot 10^3\ \text{m/s}$$

18. La nave espacial *Apolo VIII* estuvo en órbita circular alrededor de la Luna 113 km por encima de su superficie.

PAU

Calcula:

a) El periodo de movimiento.

b) Las velocidades lineal y angular de la nave.

c) La velocidad de escape a la atracción lunar desde esa posición.

Datos: Constante de Gravitación $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg². Masa de la Luna, $M_L = 7{,}36 \cdot 10^{22}$ kg; Radio de la Luna, $R_L = 1\,740$ km.

a) y *b)* La velocidad lineal de la nave en función de la altura viene dada por:

$$v = \sqrt{\frac{GM_L}{R_L + h}} =$$

$$= \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2\,\text{kg}^{-2} \cdot 7{,}36 \cdot 10^{22}\ \text{kg}}{(1\,740 \cdot 10^3 + 113 \cdot 10^3)\ \text{m}}} = 1\,630\ \text{m/s}$$

La velocidad angular ω es:

$$\omega = \frac{v}{R_L + h} = \frac{1{,}627 \cdot 10^3\ \text{m/s}}{1{,}853 \cdot 10^3\ \text{m}} = 8{,}8 \cdot 10^{-4}\ \text{m/s}$$

El periodo viene dado por:

$$T = \frac{2\pi\,(R + h)}{v} =$$

$$= \frac{2\,\pi \cdot (1\,740 \cdot 10^3 + 133 \cdot 10^3)\ \text{m}}{1\,630\ \text{m/s}} = 7\,219\ \text{s}$$

c) La expresión de la velocidad de escape a la altura a la que se encuentra el *Apolo VIII* se obtiene aplicando el Principio de Conservación de la Energía Mecánica.

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R_L + h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}36 \cdot 10^{22}}{1{,}853 \cdot 10^6}} = 2{,}3 \cdot 10^3\ \text{m/s}$$

19. Se coloca un satélite meteorológico de 1 000 kg en órbita circular a 300 km sobre la superficie terrestre. Determina:

PAU

a) La velocidad lineal, la aceleración radial y el periodo en la órbita.

b) El trabajo que se requiere para poner en órbita el satélite.

Datos: Radio medio de la Tierra, 6 370 km; $g_0 = 9{,}80$ m/s².

a) La fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra origina la fuerza centrípeta necesaria para que el satélite describa una órbita circular:

$$G\,\frac{Mm}{(R + h)^2} = m\,\frac{v^2}{R + h}$$

De donde se obtiene la velocidad lineal:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R + h}} = \sqrt{\frac{gR^2}{R + h}} =$$

$$= \sqrt{\frac{9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot (6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m})^2}{6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m} + 0{,}3 \cdot 10^6\ \text{m}}} = 7\,721{,}3\ \text{m/s}$$

La aceleración centrípeta viene determinada por:

$$a = \frac{v^2}{R + h} = \frac{5{,}93 \cdot 10^7\ \text{m}^2/\text{s}^2}{6{,}67 \cdot 10^6\ \text{m}} = 8{,}94\ \text{m/s}^2$$

El periodo de revolución es:

$$T = \frac{2\pi\,(R + h)}{v} = \frac{6{,}28 \cdot 6{,}67 \cdot 10^6\ \text{m}}{7{,}7 \cdot 10^3\ \text{m/s}} = 15\ \text{h}$$

b) El trabajo realizado es igual al incremento de la energía mecánica que ha experimentado el satélite respecto de la superficie terrestre.

$$W = -\frac{1}{2}\,\frac{GMm}{R + h} - \left(-\frac{GMm}{R}\right) = \frac{gRm\,(R + 2h)}{2\,(R + h)} =$$

$$= \frac{9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m} \cdot 10^3\ \text{kg} \cdot 6{,}97 \cdot 10^6\ \text{m}}{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^6\ \text{m}} =$$

$$= 3{,}26 \cdot 10^{10}\ \text{J}$$

20. ¿Qué radio debe tener la órbita de un satélite artificial de 200 kg que gira alrededor de la Tierra con una velocidad de 5 434 m/s?

La velocidad de traslación viene dada por:

$$v^2 = \frac{GM}{R}$$

Por tanto, el radio de la órbita debe ser:

$$R = \frac{GM}{v^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2 \cdot 6{,}0 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{5\,434^2\ \text{m}^2/\text{s}^2} = 1{,}35 \cdot 10^7\ \text{m}$$

21. Un satélite artificial gira en torno a la Tierra en una órbita circular de radio igual al diámetro de la Tierra. Calcula la velocidad del satélite.

Aplicando la condición de equilibrio orbital:

$$m\,\frac{v^2}{R_0} = G\,\frac{Mm}{R_0^2}$$

siendo R_0 el radio de la órbita.

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R_0}} = \sqrt{\frac{gR_T}{2}} = \sqrt{\frac{9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6\ \text{m}}{2}} = 5\,592\ \text{m/s}$$

22. La nave espacial *Discovery*, lanzada en octubre de 1998, describía en torno a la Tierra una órbita circular con una velocidad de 7,62 km/s.

PAU

a) ¿A qué altura se encontraba?

b) ¿Cuál era su periodo? ¿Cuántos amaneceres contemplaban cada 24 h los astronautas que viajaban en el interior de la nave?

Datos: $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6\,370$ km.

a) La velocidad de la nave en función de la altura viene dada por:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R + h}}; \qquad R + h = \frac{GM}{v^2}$$

$$h = \frac{GM}{v^2} - R =$$

$$= \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2\,\text{kg}^{-2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{(7{,}62 \cdot 10^3)^2\ \text{m}^2/\text{s}^2} - 6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m} =$$

$$= 5{,}0 \cdot 10^5\ \text{m}$$

b) El periodo viene dado por:

$$T = \frac{2\pi\,(R+h)}{v} = \frac{6{,}28 \cdot 6{,}87 \cdot 10^6\ \text{m}}{7{,}62 \cdot 10^3\ \text{m/s}} = 5{,}66 \cdot 10^3\ \text{s} = 1{,}57\ \text{h}$$

En un día dan 15 vueltas a la Tierra:

$$n = \frac{24}{1{,}57} \simeq 15$$

23. La órbita de Venus, en su recorrido alrededor del Sol, es prácticamente circular. Calcula el trabajo desarrollado por la fuerza de atracción gravitatoria hacia el Sol a lo largo de media órbita. Si esa órbita, en lugar de ser circular, fuese elíptica, ¿cuál sería el trabajo de esa fuerza a lo largo de una órbita completa?

PAU

Es cero en ambos casos.

a) Si la órbita es circular, la fuerza conservativa es perpendicular al desplazamiento en todo momento. Por tanto, el trabajo realizado por esta fuerza es cero.

b) Si la órbita es elíptica, el trabajo a lo largo de una órbita completa es cero, porque en un campo conservativo el trabajo a lo largo de una línea cerrada es nulo.

24. Calcula el trabajo necesario para trasladar un satélite terrestre de 500 kg desde una órbita circular de radio $r_0 = 2\,R_T$ hasta otra de radio $r_1 = 3\,R_T$. Datos: $R_T = 6{,}4 \cdot 10^6$ m; $g_0 = 9{,}8$ m/s^2.

PAU

El trabajo necesario viene dado por el incremento de la energía mecánica del satélite al pasar de una órbita a la otra.

– Energía mecánica correspondiente a la órbita inicial:

$$E_1 = \frac{1}{2}\,m v^2 - \frac{G M m}{2R} = -\frac{R}{4}\,m g$$

– Energía mecánica correspondiente a la órbita final:

$$E_2 = -\frac{G M m}{6R} = -\frac{R}{6}\,m g$$

Trabajo realizado:

$$E_2 - E_1 = R m g \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12}\,R m g =$$

$$= \frac{1}{12} \cdot 6{,}4 \cdot 10^6\ \text{m} \cdot 500\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 = 2{,}6 \cdot 10^9\ \text{J}$$

25. Calcula la masa del Sol suponiendo que la Tierra describe en torno a él una órbita de $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m de radio.

PAU

Si la Tierra describe una órbita circular en torno al Sol, estará sometida a una fuerza centrípeta originada por la atracción solar:

$$m\,\frac{v^2}{R_0} = G\,\frac{M_s m}{R_0^2}$$

de donde se deduce la masa del Sol:

$$M_s = \frac{v^2 R_0}{G}$$

siendo R_0 el radio de la órbita terrestre.

También conocemos el periodo de la Tierra:

$$1\ \text{año} = 3{,}15 \cdot 10^7\ \text{s}; \qquad v = \frac{2\pi R_0}{T}$$

Por tanto, la masa del Sol será:

$$M_s = \frac{4\pi^2 R_0^3}{T^2 G} =$$

$$= \frac{4 \cdot 3{,}14^2 \cdot (1{,}5 \cdot 10^{11}\ \text{m})^3}{(3{,}15 \cdot 10^7\ \text{s})^2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2}} = 2{,}0 \cdot 10^{30}\ \text{kg}$$

26. Dos satélites artificiales de la Tierra S_1 y S_2 describen en un sistema de referencia geocéntrico dos órbitas circulares, contenidas en el mismo plano, de radios $r_1 = 8\,000$ km y $r_2 = 9\,034$ km, respectivamente. En un instante inicial dado, los satélites están alineados con el centro de la Tierra y situados del mismo lado.

PAU

***a)* ¿Qué relación existe entre las velocidades orbitales de ambos satélites?**

***b)* ¿Qué relación existe entre los periodos orbitales de los satélites? ¿Qué posición ocupará el satélite S_2 cuando el satélite S_1 haya completado 6 vueltas, desde el instante inicial?**

a) Sean m_1, r_1 y v_1 la masa, el radio orbital y la velocidad del satélite S_1, y m_2, r_2 y v_2 las mismas magnitudes del satélite S_2.

De: $$G\,\frac{M_T m_1}{r_1^2} = m_1\,\frac{v_1^2}{r_1} \;\Rightarrow\; v_1 = \sqrt{G\,\frac{M_T}{r_1}}$$

Lo mismo para el satélite S_2:

$$v_2 = \sqrt{G\,\frac{M_T}{r_2}}$$

Relacionando estas velocidades, tenemos:

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} = 1{,}063; \qquad v_1 = 1{,}063\ v_2$$

b) Aplicamos la Tercera Ley de Kepler:

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} \;\Rightarrow\; \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3} = 1{,}2; \qquad T_2 = 1{,}2\ T_1$$

En el mismo tiempo que el satélite S_1 emplea en realizar $n_1 = 6$ vueltas, el satélite S_2 habrá realizado $n_2 = 5$ vueltas, como se deduce de:

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = \dfrac{t}{n_1} \\[2ex] T_2 = \dfrac{t}{n_2} \end{array}\right\}\quad n_2 = \frac{n_1 T_1}{T_2} = \frac{6\,T_1}{1{,}2\,T_2} = 5$$

27. El periodo de revolución de Júpiter en su órbita alrededor del Sol es aproximadamente 12 veces mayor que el de la Tierra en su respectiva órbita. Considerando circulares las órbitas de los dos planetas, determina:

PAU

***a)* La razón entre los radios de las respectivas órbitas.**

***b)* La razón entre las aceleraciones de los dos planetas en sus órbitas.**

a) De la Tercera Ley de Kepler se deduce la relación entre los radios de las dos órbitas:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} \;\Rightarrow\; \frac{R_1}{R_2} = \sqrt[3]{\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2} = \sqrt[3]{12^2} = 5{,}2; \qquad R_1 = 5{,}2\,R_2$$

b) Para hallar la aceleración centrípeta de los dos planetas, igualamos la fuerza gravitatoria con la fuerza centrípeta:

$$m\,\frac{v^2}{R} = G\,\frac{Mm}{R^2}$$

De acuerdo con esta igualdad, la aceleración centrípeta de cada planeta es:

$$a_1 = \frac{v_1^2}{R_1} = \frac{GM_s}{R_1^2}; \qquad a_2 = \frac{v_2^2}{R_2} = \frac{GM_s}{R_2^2}$$

cuya relación viene dada por:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{R_2^2}{5{,}22\,R_2^2} = \frac{1}{27} = 0{,}04$$

$$a_1 = 0{,}04\,a_2$$

28. ¿Con qué frecuencia angular debe girar un satélite de comunicaciones, situado en una órbita ecuatorial, para que se encuentre siempre sobre el mismo punto de la Tierra? ¿A qué altura sobre la superficie de la Tierra se encontrará el satélite citado?

Si el satélite está estacionario respecto a la Tierra, su periodo orbital debe coincidir con el periodo de rotación de la Tierra. Por tanto, la frecuencia angular será:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24\text{ h}\,.\,3\,600\text{ s/h}} = \frac{6{,}28}{86\,400\text{ s}} = 7{,}27\cdot 10^{-5}\text{ rad/s}$$

La velocidad orbital se obtiene igualando la fuerza gravitatoria con la fuerza centrípeta:

$$m\,\frac{v^2}{R+h} = G\,\frac{Mm}{(R+h)^2} \;\Rightarrow\; v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$$

La altura a la que se encuentra el satélite viene determinada por el periodo de revolución:

$$T = \frac{2\pi R_0}{v} = \frac{2\pi\,(R+h)}{\sqrt{\dfrac{GM}{R+h}}}$$

Despejamos $R + h$:

$$R + h = \sqrt[3]{\frac{T^2GM}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{T^2R^2G}{4\pi^2}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{(8{,}64\cdot 10^4\text{ s})^2\cdot(6{,}37\cdot 10^6\text{ m})^2\cdot 9{,}8\text{ m/s}^2}{4\cdot 3{,}14^2}} = 42{,}2\cdot 10^6\text{ m}$$

$$h = 42{,}2\cdot 10^6 - 6{,}37\cdot 10^6 = 3{,}6\cdot 10^7\text{ m}$$

29. Un satélite artificial de 200 kg gira en una órbita circular a una altura *h* sobre la superficie de la Tierra. Sabiendo que a esa altura el valor de la aceleración de la gravedad es la mitad del valor que tiene en la superficie terrestre, averigua: PAU

***a)* La velocidad del satélite.**

***b)* Su energía mecánica.**

Dato: radio medio de la Tierra, $6{,}37\cdot 10^6$ m.

a) El valor de la gravedad en función de la altura viene dado por:

$$g_h = \frac{g_0R^2}{(R+h)^2}$$

En nuestro caso: $\dfrac{1}{2}\,g_0 = \dfrac{g_0R^2}{(R+h)^2}$

de donde: $R + h = \sqrt{2}\cdot R = 9{,}0\cdot 10^6$ m

Por otro lado, si la órbita del satélite es circular, se debe cumplir:

$$G\,\frac{Mm}{(R+h)^2} = m\,\frac{v^2}{(R+h)}$$

de donde se obtiene la velocidad orbital:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}} = \sqrt{\frac{R^2g}{R+h}} = \sqrt{\frac{(6{,}37\cdot 10^6\text{ m})^2\cdot 9{,}8\text{ m/s}^2}{9{,}0\cdot 10^6\text{ m}}} =$$

$$= 6{,}6\cdot 10^3\text{ m/s}$$

b) La energía mecánica es igual a la mitad de la energía potencial:

$$E = -\frac{1}{2}\,\frac{GMm}{(R+h)} = -\frac{1}{2}\,mg\,\frac{R^2}{R+h} =$$

$$= -0{,}5\cdot 200\text{ kg}\cdot 9{,}8\text{ m/s}^2\cdot\frac{6{,}37^2\cdot 10^{12}\text{ m}^2}{9{,}0\cdot 10^6\text{ m}} = -4{,}4\cdot 10^9\text{ J}$$

30. Una nave espacial sigue una órbita circular alrededor de la Tierra a una altura de 1 000 km. ¿Cuál es el peso de un astronauta a esa altura si en la superficie de la Tierra pesaba 735 N? (R_T = 6 400 km.) PAU

A esa altura el peso del astronauta sería:

$$mg_h = \frac{mg_0R^2}{(R+h)^2} = \frac{735\text{ N}\cdot(6{,}4\cdot 10^6\text{ m})^2}{(6{,}4\cdot 10^6 + 10^6)^2\text{ m}^2} = 550\text{ N}$$

31. Una persona de 80 kg sube en un ascensor. ¿Cuál es su peso aparente en los siguientes casos? PAU

***a)* Si el ascensor baja con una aceleración de 4,0 m/s².**

***b)* Si sube con la misma aceleración.**

a) Cuando el ascensor baja, el peso aparente vale:

$$P_a = m\,(g - a) = 80\text{ kg}\cdot 5{,}8\text{ m/s}^2 = 4{,}6\cdot 10^2\text{ N}$$

b) Peso aparente en la subida:

$$P_a = m\,(g + a) = 80\text{ kg}\cdot 13{,}8\text{ m/s}^2 = 1{,}10\cdot 10^3\text{ N}$$

Actividades

1. **La masa *m* de la figura siguiente describe una trayectoria circular situada en un plano horizontal. ¿Cuántas fuerzas actúan sobre *m*? ¿Alguna de estas fuerzas es central? ¿Por qué? Calcula el momento de torsión de las fuerzas indicadas respecto de la mano *O* de la persona.**

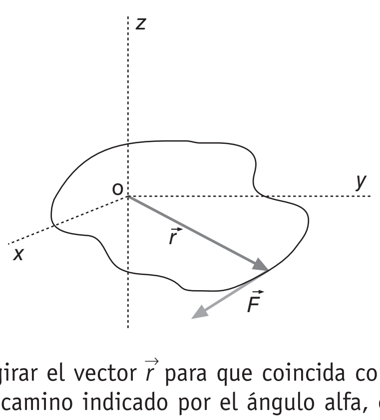
Sobre la masa *m* actúan dos fuerzas: su peso y la fuerza centrípeta que transmite la cuerda tensada. Esta última fuerza es central porque tiene la dirección de la cuerda que pasa por el punto *O*, cualquiera que sea la posición de la masa mientras gira.

El momento de torsión, respecto de *O*, de la fuerza centrípeta es nulo porque $\vec{F}$ y $\vec{r}$ son paralelos.

El momento de torsión del peso respecto de *O* sería:

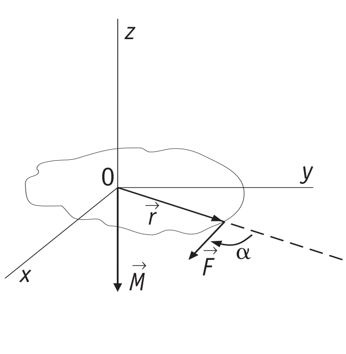
$$M = m\,g\,r$$

2. **Dibuja el vector momento de la fuerza representada en la figura siguiente. ¿El giro que produce *F* es positivo o negativo?**



Si hacemos girar el vector $\vec{r}$ para que coincida con el vector $\vec{F}$ siguiendo el camino indicado por el ángulo alfa, el vector momento tiene la dirección del eje *0z* con sentido negativo.

Se puede representar por $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = -|\vec{M}|\ \vec{u}_z$



3. **Si una partícula se mueve en línea recta, ¿puede ser cero su momento lineal? ¿Puede ser cero su momento angular? En caso afirmativo, ¿respecto de qué punto o puntos sería nulo?**

El momento lineal de una partícula viene dado por $\vec{p} = m\vec{v}$. Esta magnitud, por tanto, depende de dos factores: la masa y la velocidad. Para que una partícula tenga momento lineal cero debe estar en reposo. Por tanto, una partícula que se mueve en línea recta no puede tener movimiento lineal nulo, ya que su velocidad no es cero. En cambio, su momento angular viene dado por $L = m\,v\,r$ sen ϕ, siendo $\vec{r}$ el vector de posición de la partícula respecto del punto que se toma como referencia para hallar el momento, y ϕ el ángulo que forma el vector $\vec{r}$ con el vector velocidad.

Según esto, una partícula que se mueve en línea recta tiene momento angular nulo respecto de todos los puntos de su trayectoria, porque en este caso $\vec{v}$ y $\vec{r}$ tienen la misma dirección, siendo cero el ángulo que forman estos vectores.

4. **Si la velocidad lineal de una partícula es constante en el tiempo, ¿puede variar su momento angular en el tiempo? Razona la respuesta.**

De la expresión $L = m\,r\,v$ sen ϕ se deduce que si v = cte., el momento L puede variar con el tiempo; basta con que los factores $\vec{r}$ y sen ϕ varíen con el tiempo.

5. **¿Qué movimiento ha de tener una partícula para que su momento angular permanezca constante?**

Para que el momento angular de una partícula sea constante, el movimiento de esa partícula debe ser circular uniforme. En efecto: en este caso r (radio de la circunferencia) es constante y $\phi = 90°$.

Por tanto, el momento angular de la partícula sería $L = m\,r\,v$.

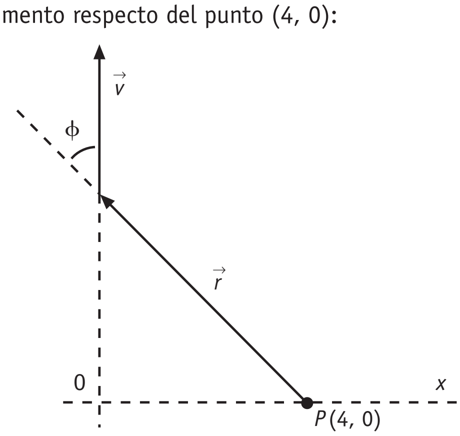
6. **Una partícula de 0,5 kg se mueve a lo largo del eje *0y* con una velocidad de 2 m/s.**

   a) **Calcula el módulo del momento angular de esta partícula respecto de los puntos (0, 0), (4, 0) y (3, 5).**

   b) **Calcula el momento angular de la partícula respecto de estos puntos si su trayectoria es la bisectriz *y* = *x*.**

a) Si la partícula se mueve a lo largo del eje *0y*, el momento angular respecto del punto (0, 0) es cero. Porque $\phi = 0$.

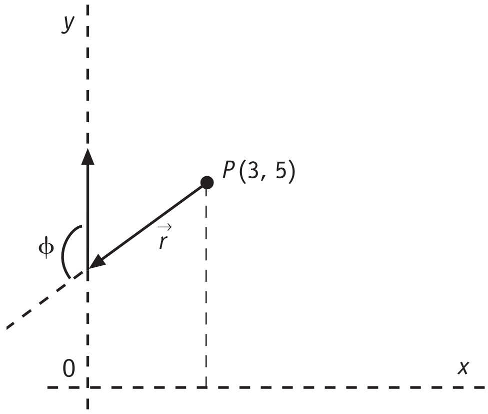
– Momento respecto del punto (4, 0):



$L = m\,r\,v$ sen ϕ. Este momento varía con el tiempo. Su valor es máximo cuando la partícula pasa por el origen de coordenadas:

$$L = 0{,}5\ \text{kg} \cdot 2\ \text{m/s} \cdot 4\ \text{m} = 4\ \text{kg}\,\text{m}^2/\text{s}$$

– Momento respecto del punto (3, 5):



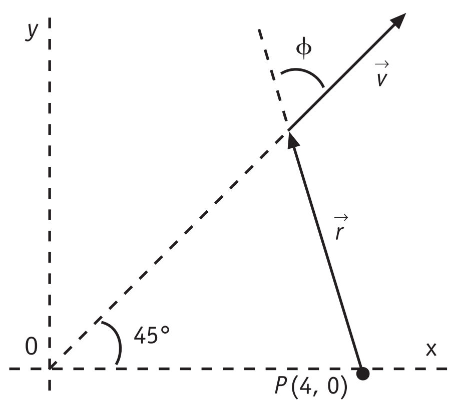
$L = m r v$ sen ϕ, que depende de la posición de la partícula. Cuando la partícula se encuentra en el origen, el momento angular es:

$$L = 0{,}5\ \text{kg} \cdot 2\ \text{m/s} \cdot \sqrt{34}\ \text{m} \cdot \frac{5}{\sqrt{34}} = 5\ \text{kg m}^2/\text{s}$$

b) En el caso de que la partícula se mueva a lo largo de la bisectriz $y = x$, los momentos respecto de los mismos puntos anteriores serán:

– Respecto del origen. El momento seguirá siendo nulo, porque $\phi = 0$.

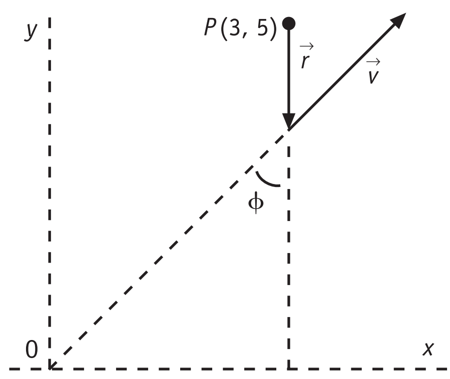
– Respecto del punto (4, 0):



$L = m r v$ sen ϕ, que depende de la posición de la partícula. Si la partícula se encuentra en el origen, el momento será:

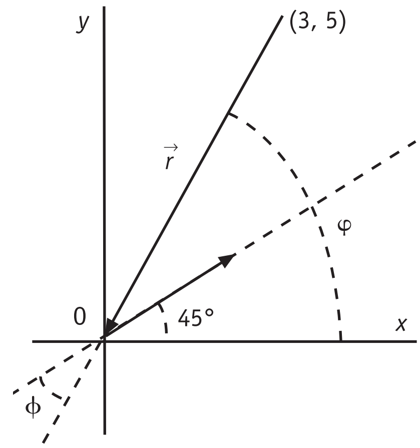
$$L = 0{,}5\ \text{kg} \cdot 2\ \text{m} \cdot 4\ \text{m} \cdot \text{sen}\ (180° - 45°) = 2{,}8\ \text{kg m}^2/\text{s}$$

– Momento respecto del punto (3, 5):



$L = m r v$ sen ϕ, que depende de la posición de la partícula. Si la partícula se encuentra en el origen: $L = m r v$ sen ϕ.

Siendo: $r = \sqrt{34}$; $\phi = \varphi - 45°$



$$\text{sen}\ \varphi = \frac{3}{\sqrt{34}} = 0{,}857; \qquad \varphi = 59°$$

de donde $\phi = 59° - 45° = 14°$. Luego el momento sería:

$$L = 0{,}5\ \text{kg} \cdot 2\ \text{m/s} \cdot \sqrt{34}\ \text{m} \cdot \text{sen}\ 14° = 1{,}4\ \text{kg m}^2/\text{s}$$

7. Una partícula se mueve sobre una recta y se sabe que el momento de torsión que actúa sobre ella es cero respecto de un punto no especificado. ¿Implica esto que sobre la partícula no actúa ninguna fuerza? ¿Puedes concluir que la velocidad de la partícula es constante?

Si el momento de torsión es cero, quiere decir que en la expresión $M = F r$ sen ϕ los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$ tienen la misma dirección. Por tanto, sobre la partícula puede actuar una fuerza que tenga la misma dirección del movimiento, y que el punto respecto del cual se halla el momento pertenezca a la trayectoria. En consecuencia, si el momento de torsión de una fuerza es cero, no implica que la velocidad de la partícula sea constante.

8. La masa de la Luna es $7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg y la distancia del centro de la Tierra al centro de la Luna $3{,}84 \cdot 10^8$ m. Calcula el momento angular de la Luna respecto a la Tierra. Dato: la Luna tarda 27,32 días en dar una vuelta alrededor de la Tierra.

Momento angular de la Luna respecto de la Tierra:

$$L = m r \omega = m r \frac{2 \pi r}{T} = 2 \pi \frac{m r^2}{T} =$$

$$= \frac{6{,}28 \cdot 7{,}35 \cdot 10^{22}\ \text{kg} \cdot 3{,}84^2 \cdot 10^{16}\ \text{m}^2}{27{,}32\ \text{días} \cdot 86\,400\ \text{s/día}} = 2{,}88 \cdot 10^{34}\ \text{kg m}^2/\text{s}$$

Observación: se ha despreciado el momento angular de rotación de la Luna sobre sí misma.

9. Una plataforma gira con una velocidad angular ω. En un momento dado se desprende una porción de ella. El resto de la plataforma:

***a)* No modifica la velocidad.**

***b)* Gira más deprisa.**

***c)* Gira más despacio.**

Como el momento angular se mantiene constante si no intervienen momentos de fuerzas externas sobre la plataforma, al variar la masa de la plataforma y hacerse menor, la velocidad angular del sistema ha de aumentar, para mantener el momento angular constante. Es decir, la respuesta correcta es la *b*).

10. Sobre un disco que gira con una velocidad ω cae libremente un trozo de plastilina quedándose adherida a él. El disco:

a) **Disminuirá su velocidad.**

b) **Aumentará su velocidad.**

c) **Seguirá girando con la misma velocidad.**

Al igual que en la actividad anterior, cuando sobre el sistema no actuan momentos de fuerzas, el momento angular permanece constante. En este caso, el sistema aumenta su masa, luego para conservar el momento angular, la velocidad ha de disminuir. Es decir, la respuesta correcta es la *a*).

11. Define el momento angular de una partícula de masa m y velocidad $\vec{v}$ respecto a un punto *O*. Pon un ejemplo razonado y de ley o fenómeno físico que sea una explicación de la conservación del momento angular.

PAU

El momento angular, con respecto a un punto *O*, de una partícula de masa *m* que se mueve con una velocidad *v* se define como el vector $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$.

Cuando no se produce momento de fuerzas sobre un sistema, el momento angular del mismo permanece constante.

Un ejemplo de la conservación del momento angular es el movimiento de las estrellas a lo largo de las etapas de su vida, así, una estrella joven, de gran radio, gira con una velocidad angular pequeña, mientras que a medida que evoluciona y se hace más pequeña, gira con una velocidad mucho mayor.

12. Un planeta sigue una órbita elíptica alrededor de una estrella, cuando pasa por el periastro *P*, punto de su trayectoria más próximo a la estrella, y por el apoastro *A*, punto más alejado, explica y justifica las siguientes afirmaciones:

a) **Su momento angular es igual en ambos puntos y su celeridad es diferente.**

b) **Su energía mecánica es igual en ambos puntos.**

a) Tanto en el periastro como en el apoastro el momento angular es $L = m\,v\,r$, donde *m* es la masa del planeta, *v* su velocidad y *r* la distancia al punto respecto del que se calcula el momento angular.

Se cumple el Principio de Conservación del Momento Angular en el sistema planeta-estrella, así que la consecuencia es que en el periastro la velocidad angular es mayor que en el apoastro.

b) Al tratarse la atracción gravitatoria de una fuerza conservativa, la energía mecánica del sistema se mantiene constante en toda la trayectoria.

13. ¿Cómo puedes demostrar que un planeta en una órbita circular se desplaza con movimiento circular uniforme?

El momento angular del planeta es constante, porque se mueve bajo la acción de una fuerza central. Además, si la órbita es circular, se cumple que $\alpha = 90°$. Por tanto, se cumple:

$$m\,|\vec{v}|\,|\vec{r}| = \text{cte.}$$

De donde $|\vec{v}| = \text{cte.}$

14. ¿Hay algún instante en que un planeta con órbita elíptica esté exento de aceleración?

En los puntos de perihelio y afelio. En estos puntos la velocidad del planeta es constante:

$$r_a v_a = r_p v_p = \text{cte.}$$

15. Supón que repentinamente se duplica la atracción del Sol sobre la Tierra. ¿Qué puedes decir en este caso sobre la velocidad orbital de la Tierra y de la órbita que describe? ¿Se modificará el momento angular de la Tierra? ¿Cambiará el plano de su órbita? Razona tus respuestas.

Para que la Tierra describa la órbita se debe cumplir que:

$$E_c = F_g \;\Rightarrow\; m\,\frac{v^2}{R} = G\,\frac{M\,m}{R^2}$$

y la velocidad será: $\quad v = \sqrt{\dfrac{G\,M}{R}}$

Si se duplica la fuerza gravitatoria, se seguirá cumpliendo la condición de equilibrio (manteniendo la misma órbita):

$$m\,\frac{v^2}{R} = 2\,G\,\frac{M\,m}{R^2}$$

en este caso la velocidad es:

$$v = \sqrt{\frac{2\,G\,M}{R}}$$

Por tanto, la velocidad orbital aumentará. Si admitimos que ese aumento de atracción es debido a que los dos astros están más próximos, el radio de la órbita es más pequeño. El momento angular de la Tierra no se modificaría, porque aunque la fuerza gravitatoria se duplicara, seguiría siendo una fuerza central y su momento de torsión seguiría siendo nulo. Si el momento angular permanece constante, también permanecerá constante el plano de la órbita, puesto que el vector que define el momento angular debe seguir siendo perpendicular a dicho plano.

El momento angular y la evolución de las estrellas

Cuestiones

1. El origen y evolución de las estrellas se basa en el principio de conservación:

a) De la energía.

b) **Del momento angular.**

c) Del momento lineal.

2. Una gigante roja de radio $R = 10^6$ km y de velocidad angular ω evoluciona durante millones de años hasta convertirse en una enana blanca de $R = 5 \cdot 10^3$ km. Señala la/s respuesta/s correcta/s:

a) **Su densidad ha aumentado 8 000 veces.**

b) ω se ha multiplicado por 40 000.

c) El momento angular se ha dividido entre 19.

3. En el movimiento de la Tierra alrededor del Sol:

a) Se conserva el momento angular y el momento lineal.

b) Se conserva el momento lineal y el momento de la fuerza.

***c)* Varía el momento lineal y se conserva el momento angular.**

4. Un satélite gira alrededor de un planeta describiendo una órbita elíptica, ¿cuál de las siguientes magnitudes permanece constante?

***a)* El momento angular.**

b) El momento lineal.

c) La energía potencial.

Cuestiones y problemas

1. ¿Cuánto vale el momento de torsión de una fuerza si $\vec{r}$ y $\vec{F}$ son paralelos? ¿Cómo deben ser $\vec{r}$ y $\vec{F}$ para que el momento de torsión de $\vec{F}$ sea máximo?

Si $\vec{r}$ y $\vec{F}$ son paralelos, el momento de torsión es nulo. Para que el momento de torsión sea máximo, los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$ deben ser perpendiculares entre sí, como se deduce de la igualdad:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

2. Una partícula se mueve en el eje *Ox* por la acción de una fuerza constante que la aleja del origen de coordenadas. ¿Cómo varía con el tiempo el momento angular de la partícula con respecto a dicho origen?

El momento angular de la partícula viene dado por $L = m\,r\,v$ sen ϕ. Si la partícula se desplaza a lo largo del eje Ox, los vectores $\vec{r}\,(x, 0, 0)$ y $\vec{v}\,(v_x, 0, 0)$ son paralelos. Por tanto, el ángulo que forman estos vectores es cero. El momento angular es siempre cero y no depende del tiempo.

3. Una partícula con velocidad constante tiene momento angular nulo respecto de un punto. ¿Qué se deduce de esto?

Que dicho punto pertenece a la trayectoria, como se deduce de la ecuación del momento angular $L = m\,r\,v$ sen ϕ. Si el momento angular es nulo, quiere decir que el ángulo ϕ formado por $\vec{r}$, $\vec{v}$ debe ser cero.

4. Se está poniendo de moda entre los ciclistas usar ruedas lenticulares cuando realizan pruebas contrarreloj. ¿Tiene alguna explicación física esta preferencia, suponiendo que estas ruedas tienen la misma masa y el mismo radio que las ruedas normales?

En igualdad de condiciones de masa y radio, el momento de inercia de una rueda lenticular es la mitad del momento de inercia de una rueda normal. Por tanto, una rueda lenticular necesita menos esfuerzo para iniciar y mantener el movimiento que una rueda normal. Pero tiene el inconveniente de que, en cuanto se deja de pedalear, la rueda lenticular disminuye su velocidad más rapidamente debido a su menor inercia. Para un esfuerzo determinado del ciclista, la rueda lenticular adquiere mayor velocidad que una rueda normal, pero exige un pedaleo continuo. Por eso es apropiada en etapas contrarreloj.

5. ¿Cuánto vale en m^2/s la velocidad areolar de la Tierra? Datos: radio medio de la órbita terrestre, $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m.

La velocidad areolar de la Tierra en su órbita circular viene dada por:

$$v_a = \frac{S}{T} = \frac{\pi R^2}{T} = \frac{3{,}14 \cdot (1{,}5 \cdot 10^{11}\ \text{m})^2}{365\ \text{días} \cdot 86\,400\ \text{s/días}} = 2{,}2 \cdot 10^{15}\ \text{m}^2/\text{s}$$

6. En su afelio, el planeta Mercurio está a $6{,}99 \cdot 10^{10}$ km del Sol, y en su perihelio queda a $4{,}63 \cdot 10^{10}$ km del mismo. Su velocidad orbital es $3{,}88 \cdot 10^4$ m/s en el afelio. ¿Cuál es su velocidad orbital en el perihelio? ¿Qué excentricidad tiene la órbita de Mercurio?

Aplicamos el Principio de Conservación del Momento Angular.

$$v_a r_a = v_p r_p$$

$$v_p = \frac{v_a r_a}{r_p} = \frac{3{,}88 \cdot 10^4\ \text{m/s} \cdot 6{,}99 \cdot 10^{10}\ \text{km}}{4{,}63 \cdot 10^{10}\ \text{km}} = 5{,}86 \cdot 10^4\ \text{m/s}$$

Semieje mayor de la elipse:

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} = \frac{(4{,}63 + 6{,}99) \cdot 10^{10}\ \text{km}}{2} = 5{,}81 \cdot 10^{10}\ \text{km}$$

Distancia de un foco al centro de la elipse:

$$c = a - r_p = (5{,}81 - 4{,}63) \cdot 10^{10}\ \text{km}$$

por tanto, la excentricidad será:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1{,}18 \cdot 10^{10}\ \text{km}}{5{,}81 \cdot 10^{10}\ \text{km}} = 0{,}203$$

7. Calcula el momento angular orbital de la Tierra si describe una órbita circular alrededor del Sol de radio $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m.

Datos: $M_T = 6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg.

El momento angular de la Tierra alrededor del Sol viene dado por:

$$L = m\,v\,r = m\,\omega\,r^2 =$$

$$= 6{,}0 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot \frac{2\pi}{365\ \text{días} \cdot 86\,400\ \text{s/día}} \cdot (1{,}5 \cdot 10^{11}\ \text{m})^2 =$$

$$= 2{,}7 \cdot 10^{40}\ \text{kg}\,\text{m}^2/\text{s}$$

8. Demuestra que el periodo de un planeta de masa m en función del área *S* de la órbita que describe y del momento angular viene dado por:

$$\boldsymbol{T = \frac{2\,m\,S}{L}}$$

Expresamos el momento angular en función del periodo:

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

y de la superficie de la órbita $S = \pi r^2$.

$$L = m\,r\,v = m\,r\,\frac{2\pi r}{T} = \frac{2\,m\,\pi\,r^2}{T} = \frac{2\,m\,S}{T}$$

de donde:

$$T = \frac{2\,m\,S}{L}$$

9. Cuando un patinador sobre hielo se encoge, su momento angular se conserva. ¿Se conserva también su energía cinética?

El momento angular del patinador se conserva, lo que significa que para obtener una velocidad de giro mayor, el patinador ha de reducir el momento de inercia, es decir, disminuir el radio del sistema.

Como la velocidad angular no permanece constante, la energía cinética tampoco lo hace.

10. Si dos partículas tienen el mismo momento lineal o cantidad de movimiento, ¿tendrán el mismo momento angular respecto del mismo punto? Razona la respuesta.

No necesariamente. Puede ocurrir que se muevan en trayectorias paralelas y la distancia r al punto sea distinta.

11. Un satélite gira en torno a la Tierra describiendo una órbita elíptica, de forma que su perigeo se encuentra a una distancia del centro de la Tierra $1{,}02\,R_T$, siendo $R_T = 6{,}4 \cdot 10^6$ m, mientras que en el apogeo su separación del centro de la Tierra es $1{,}06\,R_T$. Calcula la longitud del semieje mayor de la elipse y su excentricidad.

PAU

El semieje mayor es igual a la media aritmética de las distancias correspondientes al perigeo y al apogeo:

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} = \frac{1{,}02\,R_T + 1{,}06\,R_T}{2} = 1{,}04\,R_T$$

La distancia entre un foco y el centro de la elipse viene dada por $c = a - r_p = 1{,}04\,R_T - 1{,}02\,R_T = 0{,}02\,R_T$; por tanto, la excentricidad de la órbita será:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{0{,}02\,R_T}{1{,}01\,R_T} = 0{,}0192$$

12. ¿Cómo influirá en la duración de un día el hecho de que todos los habitantes de la Tierra se concentraran en el Ecuador? ¿Y si lo hicieran en los polos?

El momento de inercia de un sólido respecto de un eje depende de cómo está distribuida la masa del sólido respecto a ese eje. Si se concentra la masa de la Tierra en el Ecuador, el momento de inercia aumenta, pues la distancia de las partículas al eje aumentan. Por tanto, la velocidad angular disminuye y el día sería más largo.

Si los habitantes se concentrasen en los polos sucedería lo contrario: como de esa forma disminuye el momento de inercia, la velocidad angular aumenta y el día sería más corto.

En todo caso, la influencia en la variación del momento de inercia terrestre de la distribución de los habitantes en ella es despreciable.

13. ¿Cuánto tendría que reducirse R_T para que un día durase 2 h menos?

Aplicando el principio de conservación del momento cinético

El momento cinético inicial es $L_0 = \frac{2}{5} M R_0^2\, \omega_0$, donde $\omega_0 = \frac{2\pi}{24\ \text{h}}$.

El momento cinético final es $L_1 = \frac{2}{5} M R_1^2\, \omega_1$, donde $\omega_1 = \frac{2\pi}{22\ \text{h}}$.

Igualando ambos momentos cinéticos resulta que:

$R_0^2\, \omega_0 = R_1^2\, \omega_1 \Rightarrow R_1 = \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_0}} = \sqrt{\frac{22}{24}} = 0{,}96\ R_0$, es decir, el radio de la Tierra ha de reducirse un 4%.

14. ¿Cómo explicas que un corcho que flota en el agua y que está saliendo por un desagüe, de una bañera por ejemplo, gira cada vez más deprisa a medida que se va aproximando al agujero del desagüe?

El corcho está sometido a una fuerza que, en todo momento, está dirigida hacia el desagüe. Se trata, pues, de una fuerza central. Por tanto, el momento angular del corcho permanence constante: $m\,v\,r$ = cte.

Para que esto ocurra debe aumentar la velocidad a medida que disminuye su distancia al desagüe.

15. Si una partícula tiene movimiento rectilíneo, ¿respecto de qué puntos su momento angular es nulo?

Respecto de los puntos que pertenecen a la trayectoria rectilínea, porque respecto de ellos el ángulo que forma la velocidad con el vector de posición es siempre nulo.

16. Es difícil equilibrarse sobre una bicicleta inmóvil; en cambio, es fácil hacerlo cuando está en movimiento. Es más fácil mantener sobre la punta de un dedo una pelota de baloncesto que gira sobre sí misma que una pelota que no gira. ¿Ambos fenómenos tienen la misma explicación? ¿Cuál es?

Cuando la rueda y la pelota giran, tienden a conservar el momento angular manteniendo fijo el eje de rotación.

17. Calcula el momento angular de Júpiter suponiendo que tiene una masa 315 veces la de la Tierra, que su radio de órbita es 5,2 veces mayor que el radio de la órbita terrestre y el periodo es $3{,}74 \cdot 10^8$ s.

PAU

Datos: $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6\,400$ km.

En el supuesto de que la órbita sea circular, el momento angular es máximo y viene determinado por:

$$L = (315\,M_T)\ r\ \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi\ (315\,M_T)\ r^2}{T} =$$

$$= 2\pi\ (315\,M_T)\ \frac{(5{,}2\ r_T)^2}{T} = 6{,}28 \cdot (315 \cdot 6 \cdot 10^{24}\ \text{kg}) \cdot$$

$$\cdot \frac{27 \cdot 2{,}25 \cdot 10^{22}\ \text{m}^2}{3{,}74 \cdot 10^8\ \text{s}} = 1{,}9 \cdot 10^{43}\ \text{kg}\,\text{m}^2/\text{s}$$

18. Supongamos que por alguna razón la Tierra se contrae de modo que su radio se transforma en la mitad del que ahora tiene. ¿Cambiaría su velocidad de traslación alrededor del Sol?

Suponemos que la masa de la Tierra y el radio de la órbita que describe no han cambiado. Por tanto, su momento angular seguirá siendo el mismo: $L = m\,r\,v$ = cte.

De donde se deduce que la velocidad no debe cambiar.

También se puede llegar al mismo resultado aplicando la Ley de Gravitación. Si la Tierra se mantiene en su órbita, se cumple:

$$m\ \frac{v^2}{r} = G\ \frac{M\,m}{r^2}$$

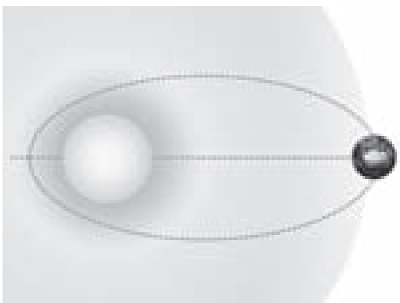
de donde se deduce que la velocidad orbital es $v = \sqrt{\frac{G\,m}{T}}$, que es constante si el radio de la órbita no varía.

19. PAU **La distancia máxima desde la Tierra hasta el Sol es $1{,}521 \cdot 10^{11}$ m y su máxima aproximación es $1{,}471 \cdot 10^{11}$ m. La velocidad orbital de la Tierra en perihelio es $3{,}027 \cdot 10^{4}$ m/s (figura siguiente).**

Calcula:

a) **La velocidad orbital en el afelio.**

b) **La excentricidad de la órbita de la Tierra.**



a) El momento angular de la Tierra permanece constante. Por tanto, se cumple $L_a = L_p$; $m v_a r_a = m v_p r_p$, porque en ambos puntos $\vec{r}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares. Por tanto,

$$v_a = \frac{v_p r_p}{r_a} = \frac{3{,}027 \cdot 10^4 \text{ m/s} \cdot 1{,}471 \cdot 10^{11} \text{ m}}{1{,}521 \cdot 10^{11} \text{ m}} =$$

$$= 2{,}927 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

b) Por definición, la excentricidad de la órbita viene dada por $e = \dfrac{c}{a}$, siendo a el semieje mayor de la elipse.

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} = 1{,}496 \cdot 10^{11} \text{ m},$$

y c es la distancia de uno de los focos al centro de la elipse:

$$c = a - r_p = 1{,}496 \cdot 10^{11} \text{ m} - 1{,}471 \cdot 10^{11} \text{ m} = 0{,}025 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

De acuerdo con estos valores, la excentricidad de la órbita será:

$$e = \frac{a}{c} = \frac{0{,}025 \cdot 10^{11} \text{ m}}{1{,}496 \cdot 10^{11} \text{ m}} = 0{,}017$$

20. ¿Es constante el módulo de la velocidad de traslación de los planetas? ¿Por qué? ¿En qué caso este módulo sería constante?

No es constante, porque el movimiento de los planetas se rige por el Principio de Conservación del Momento Angular:

$$m r v = \text{cte.}$$

Si la órbita es elíptica, r no es constante. Por tanto, para que se cumpla dicho principio la velocidad debe variar. Sería constante en el caso de que la órbita fuera circular.

21. PAU **Un satélite de la Tierra describe una órbita elíptica. Las distancias máxima y mínima a la superficie de la Tierra son 3 200 km y 400 km, respectivamente. Si la velocidad máxima del satélite es 5 250 m/s, halla la velocidad del satélite en los puntos de máximo y mínimo acercamiento.**

Datos: $R_T = 6{,}4 \cdot 10^6$ m.

Durante su recorrido el satélite mantiene constante el momento angular. Es decir, se cumple $r_1 v_1 = r_2 v_2$.

La velocidad máxima $v_1 = 5\,250$ m/s corresponde al punto de máximo acercamiento. La velocidad correspondiente a la posición más alejada será:

$$v_2 = \frac{v_1 r_1}{r_2} = \frac{5\,250 \text{ m/s} \cdot (6{,}4 \cdot 10^6 \text{ m} + 0{,}4 \cdot 10^6 \text{ m})}{6{,}4 \cdot 10^6 \text{ m} + 3{,}2 \cdot 10^6 \text{ m}} = 3\,719 \text{ m/s}$$

22. Dibuja la órbita elíptica de un planeta alrededor del Sol y las fuerzas que intervienen en el movimiento de aquel, así como la velocidad del planeta en diversos puntos de su órbita.

Este ejercicio es de respuesta abierta.

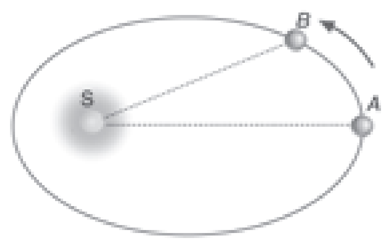
23. PAU **Un planeta describe la órbita de la figura siguiente. Establece una comparación en los puntos *A* y *B* de dicha órbita entre las siguientes magnitudes del planeta:**

a) **Velocidad de traslación.**

b) **Momento angular respecto del Sol.**

c) **Energía potencial.**

d) **Energía mecánica.**



a) La velocidad de traslación en *A* es menor que en *B*, porque la distancia al Sol desde *A* es mayor que desde *B* si se cumple que $v r$ = cte.

b) El momento angular en *A* es el mismo que en *B*, porque la fuerza que actúa sobre el planeta es una fuerza central.

c) La energía potencial asociada al sistema Sol-planeta es $E_P = -\dfrac{G M m}{r}$. Por consiguiente, depende de la distancia relativa. La energía potencial sería menor en valor absoluto en *A* que en *B*.

d) La energía mecánica es constante, porque la única fuerza que actúa sobre el planeta es la fuerza gravitatoria del Sol, que es una fuerza conservativa.

24. PAU **Dos planetas de masas iguales orbitan alrededor de una estrella de masa mucho mayor. El planeta 1 se mueve en una órbita circular de radio $1{,}00 \cdot 10^{11}$ m y periodo 2 años exactos. El planeta 2 se mueve en una órbita elíptica, siendo su distancia en la posición más próxima a la estrella 10^{11} m y en la más alejada $1{,}8 \cdot 10^{11}$ m.**

a) **¿Cuál es la masa de la estrella?**

b) **Calcula el periodo de la órbita del planeta 2.**

c) **Utilizando los Principios de Conservación del Momento Angular y de la Energía Mecánica, halla la velocidad del**

planeta 2 cuando se encuentra en la posición más cercana a la estrella.

a) El planeta 1, al describir una órbita circular, está animado de una aceleración centrípeta constante que viene determinada por:

$$m\,\frac{v^2}{r} = G\,\frac{M m}{r^2}$$

De donde se obtiene el valor de la velocidad $v^2 = \frac{GM}{r}$; además, el periodo del planeta viene dado por $T = \frac{2\pi r}{v}$. De ambas ecuaciones se deduce la masa del planeta:

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2 G} = \frac{4 \cdot 9{,}89 \cdot 10^{33}\ \text{m}^3}{3{,}978 \cdot 10^{15}\ \text{s}^2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2\,\text{kg}^{-2}} =$$

$$= 1{,}49 \cdot 10^{29}\ \text{kg}$$

b) Para obtener el periodo del planeta 2 aplicamos la Segunda Ley de Kepler.

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3}$$

siendo r_2 el semieje mayor de la elipse:

$$r_2 = \frac{1{,}8 \cdot 10^{11}\ \text{m} + 10^{11}\ \text{m}}{2} = 1{,}4 \cdot 10^{11}\ \text{m}$$

El periodo del segundo planeta será:

$$T_2 = \sqrt{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3 T_1^2} = \sqrt{\left(\frac{1{,}4 \cdot 10^{11}}{10^{11}}\right)^3 T_1^2} = 3{,}4\ \text{años}$$

c) La energía mecánica del planeta permanece constante porque se mueve en un campo conservativo.

$$E = \frac{1}{2}\,m v_1^2 + \left(-\frac{GMm}{r_1}\right) = \frac{1}{2}\,m v_2^2 + \left(-\frac{GMm}{r_2}\right)$$

$$v_1^2 - v_2^2 = 2GM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = 2GM\,\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

De acuerdo con la conservación del momento angular se cumple:

$$v_1 r_1 = v_2 r_2; \qquad v_1 = \frac{r_2}{r_1} v_2 = \frac{1{,}8 \cdot 10^{11}\ \text{m}}{10^{11}\ \text{m}} \cdot v_2$$

$$v_1 = 1{,}8\,v_2; \qquad v_1^2 - \frac{v_1^2}{1{,}8^2} = 2GM\,\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

$$v_1^2\left(1 - \frac{1}{1{,}8^2}\right) = 2GM\,\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

$$v_1^2 \cdot \frac{2{,}24}{3{,}24}\ 2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2\,\text{kg}^{-2} \cdot 1{,}49 \cdot$$

$$\cdot\ 10^{29}\ \text{kg} \cdot \frac{0{,}8 \cdot 10^{11}\ \text{m}}{1{,}8 \cdot 10^{22}\ \text{m}^2}$$

$$v_1^2 = 1{,}27 \cdot 10^8\ \text{m}^2/\text{s}^2; \qquad v_1 = 1{,}16 \cdot 10^4\ \text{m/s}$$

25. PAU **Se ha lanzado un satélite en una dirección paralela a la superficie de la Tierra con una velocidad de 36 900 km/h desde una altitud de 500 km para situarlo en un apogeo de 66 700 km (medido desde el centro de la Tierra). ¿Qué velocidad tiene el satélite en esa posición?**

Datos: R_T = 6,4 · 10^6 m.

Una vez situado en la órbita, mantendrá constante su momento angular. Por tanto, se cumple:

$$v_a r_a = v_p r_p$$

$$v_a = \frac{v_p r_p}{r_a} = \frac{36\,900\ \text{km/h} \cdot (R_T + 500\ \text{km})}{66\,700\ \text{km}} =$$

$$= \frac{36\,900\ \text{km/h} \cdot 6\,900\ \text{km}}{66\,700\ \text{km}} = 3\,817\ \text{km/h}$$

26. Demuestra que el radio de la órbita de la Luna puede determinarse a partir del radio de la Tierra, la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre y el tiempo que tarda la Luna en dar una vuelta completa a la Tierra.

La Luna, en su movimiento circular alrededor de la Tierra, tiene una aceleración centrípeta que viene determinada por:

$$m\,\frac{v^2}{r} = G\,\frac{Mm}{r^2}$$

De donde $v^2 = \frac{GM}{r}$, siendo r el radio de la órbita de la Luna.

También sabemos que la velocidad orbital en función del periodo es $v = \frac{2\pi r}{T}$.

Relacionando ambas expresiones de la velocidad, se tiene:

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{GM}{R^2} \cdot \frac{R^2}{r} = g\,\frac{R^2}{r}$$

de donde: $$r = \sqrt[3]{\frac{g R^2 T^2}{4\pi^2}}$$

27. ¿Qué puntos de la superficie terrestre tienen momento angular cero respecto del centro de la Tierra en el movimiento de rotación de esta?

El momento angular de la Tierra, tomada como un sólido rígido, referido a su movimiento de rotación, viene dado por $L = I\omega = \frac{2}{5} M R^2 \omega$; siendo $I = \frac{2}{5} M R^2$ el momento de inercia de la Tierra respecto del eje de rotación. De la expresión anterior se deduce que el momento angular de la Tierra depende de su velocidad angular. Todos aquellos puntos que tengan velocidad angular cero tendrán momento angular nulo. Estos puntos son los del eje de rotación. De todos ellos, los polos N y S geográficos se encuentran sobre la superficie de la Tierra.

28. PAU **Suponiendo que la órbita de la Luna en torno a la Tierra tiene un radio de 3,84 · 10^5 km con un periodo de 27,3 días y que su masa es 0,012 veces la de la Tierra, calcula el momento angular de la Luna respecto del centro de la Tierra. Datos: M_T = 6,0 · 10^{24} kg.**

Momento angular de la Luna:

$$L = m r v = m r\,\frac{2\pi r}{T} = 2\pi\,\frac{m r^2}{T} =$$

$$= \frac{6{,}28 \cdot (0{,}012\,M_T) \cdot 3{,}84^2 \cdot 10^{16}\ \text{m}^2}{27{,}3\ \text{días} \cdot 86\,400\ \text{s/día}} = 2{,}8 \cdot 10^{34}\ \text{kg m}^2/\text{s}$$

29. Durante el vuelo Apolo XI, el astronauta M. Collins giró en torno a la Luna, en un módulo de mando, sobre una órbita aproximadamente circular. Suponiendo que el periodo de este movimiento fuera de 90 minutos exactos y que su órbita estuviera a 100 km por encima de la superficie lunar, calcula:

PAU

a) **La velocidad con que recorría la órbita.**

b) **Su momento angular respecto del centro del satélite, suponiendo que la masa del astronauta fuera de 80,0 kg.**

Datos: $R_L = 1{,}738 \cdot 10^6$ m.

a) La velocidad sobre la órbita es:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{6{,}28 \cdot (1{,}738 \cdot 10^6 + 0{,}1 \cdot 10^6 \text{ m})}{5\,400 \text{ s}} =$$

$$= 2{,}139 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

b) Momento angular del astronauta:

$$L = m v r = 80{,}0 \text{ kg} \cdot 2{,}137 \cdot 10^3 \text{ m/s} \cdot 1{,}838 \cdot 10^6 \text{ m} =$$

$$= 3{,}13 \cdot 10^{11} \text{ kg m}^2\text{/s}$$

30. Un satélite artificial dista del centro de la Tierra $6{,}8 \cdot 10^6$ m en el perigeo y $7{,}2 \cdot 10^6$ m en el apogeo. Si la velocidad máxima del satélite es $3{,}5 \cdot 10^3$ m/s, calcula:

PAU

a) **La velocidad mínima del satélite.**

b) **El semieje mayor de la órbita elíptica que describe.**

c) **La excentricidad de la elipse.**

d) **La energía mecánica del satélite.**

e) **A qué altura sobre la superficie terrestre se encuentra el satélite en su máxima aproximación.**

Datos: $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6{,}4 \cdot 10^6$ m; masa del satélite = = 2 500 kg.

La velocidad mínima tiene lugar en el apogeo y se obtiene aplicando el Principio de Conservación del Momento Angular:

$$r_a v_a = r_p v_p$$

a) $$v_a = \frac{v_p r_p}{r_a} = \frac{3{,}5 \cdot 10^3 \text{ m/s} \cdot 6{,}8 \cdot 10^6 \text{ m}}{7{,}2 \cdot 10^6 \text{ m}} = 3{,}3 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

b) El semieje mayor de la elipse viene dado por la media de las distancias máxima y mínima:

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} = \frac{7{,}2 \cdot 10^6 \text{ m} + 6{,}8 \cdot 10^6 \text{ m}}{2} = 7{,}0 \cdot 10^6 \text{ m}$$

c) Para hallar la excentricidad, calculamos primero la distancia entre el centro de la elipse y uno de sus focos:

$$c = a - r_p = 7{,}0 \cdot 10^6 \text{ m} - 6{,}8 \cdot 10^6 \text{ m} = 0{,}2 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Por tanto, la excentricidad será:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{0{,}2 \cdot 10^6 \text{ m}}{7{,}0 \cdot 10^6 \text{ m}} = 0{,}029$$

d) Energía mecánica del satélite. La calculamos en el perigeo, por ejemplo, ya que permanece constante en cualquier punto de la órbita:

$$E = \frac{1}{2} m v_p^2 + \left(-\frac{GMm}{r_p}\right) = 0{,}5 \cdot 2\,500 \text{ kg} \cdot (3{,}5 \cdot 10^3 \text{ m/s})^2 -$$

$$- \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{kg}^{-2} \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 2{,}5 \cdot 10^3 \text{ kg}}{6{,}8 \cdot 10^6 \text{ m}} =$$

$$= -1{,}31 \cdot 10^{11} \text{ J}$$

e) La máxima aproximación tiene lugar en el perigeo, es decir, cuando el satélite se encuentra a $6{,}8 \cdot 10^6$ m del centro de la Tierra. Por consiguiente, se cumple que:

$$h = r_p - R_T = 6{,}8 \cdot 10^6 \text{ m} - 6{,}4 \cdot 10^6 \text{ m} =$$

$$= 0{,}4 \cdot 10^6 \text{ m} = 4{,}0 \cdot 10^5 \text{ m}$$

31. Un satélite artificial gira en torno a la Tierra describiendo una órbita elíptica cuya excentricidad es 0,2. Si en el perigeo dista del centro de la Tierra $7{,}2 \cdot 10^6$ m, ¿a qué distancia estará en el apogeo?

De acuerdo con la expresión de la excentricidad, tenemos:

$$e = \frac{c}{a} = 0{,}2$$

Además, se cumple que: $a = c + r_p = c + 7{,}2 \cdot 10^6$ m

Del sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} c &= 0{,}2\,a \\ a &= c + 7{,}2 \cdot 10^6 \text{ m} \end{aligned}\right\} \text{ se deduce que } a = 9{,}0 \cdot 10^6 \text{ m}$$

La distancia en el apogeo se obtiene de:

$$a = \frac{r_p + r_a}{2}$$

$$r_a = 2a - r_p = 18 \cdot 10^6 \text{ m} - 7{,}2 \cdot 10^6 \text{ m} = 1{,}08 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Actividades

1. ¿Por qué introduce la Física el concepto de campo? ¿Qué otros campos de fuerzas utiliza la Física además del campo gravitatorio?

La Física introduce el concepto de campo de fuerzas para explicar las interacciones a distancia entre dos cuerpos. Además del campo gravitatorio, se utilizan el campo electrostático y el campo electromagnético, que son objeto de estudio en las Unidades 6 y 7, respectivamente.

2. ¿De qué factores depende la intensidad de un campo gravitatorio?

El campo gravitatorio depende de dos factores: la masa que genera el campo y la distancia, como se deduce de $g = G\,\dfrac{M}{r^2}$.

3. ¿Qué dimensiones tiene la intensidad del campo gravitatorio?

Si la intensidad del campo gravitatorio se define como la fuerza que ejerce el campo sobre una unidad de masa colocada en un punto, las dimensiones serán las de una aceleración.

$$g = \frac{F}{m} = \frac{m\,a}{m} = a$$

4. Durante los vuelos espaciales, los astronautas se refieren a las fuerzas en términos de la gravedad. ¿Qué significado tiene para un astronauta una fuerza de 5*g*? ¿Es correcta la expresión «una fuerza de 5*g*»?

Significa que la fuerza que tratan de expresar es cinco veces mayor que el peso del cuerpo, o mejor, que el campo es cinco veces más intenso que el campo gravitatorio terrestre. No es correcto, porque la expresión $5g$ no es una fuerza, sino una aceleración.

5. De acuerdo con la variación de la gravedad en el interior de la Tierra, si esta estuviera atravesada por un túnel hasta las antípodas, ¿qué movimiento tendría un cuerpo que se dejase caer por dicho túnel? ¿Cuánto tiempo emplearía en ir de uno al otro extremo?

Se trata de un movimiento armónico simple. Recuerda que todo m.a.s. viene definido por una fuerza recuperadora que es proporcional al desplazamiento: $F = k\,x$.

Si llamamos x a la distancia que hay desde el centro de la Tierra hasta la posición del cuerpo en cualquier instante, este estará sometido a una fuerza gravitatoria:

$$f = m\,g_x = m\,\frac{g_0}{R_T}\,x = k\,x$$

Esta fuerza, además de armónica, es conservativa. Cuando el cuerpo llega al centro de la Tierra, $x = 0$, la fuerza recuperadora será cero; pero por inercia y debido a la energía cinética, el cuerpo rebasa esa posición. Por el Principio de Conservación de la Energía Mecánica, el cuerpo llegará justamente hasta la otra boca del túnel e iniciará de nuevo el movimiento hacia el centro de la Tierra, repitiéndose indefinidamente. El tiempo que empleará en ir de un extremo a otro será medio periodo.

Para hallar el periodo de este movimiento, comparamos su constante recuperadora con la constante recuperadora de cualquier m.a.s. en general:

$$\left.\begin{aligned} k &= \frac{m\,g_0}{R_T} \\ k &= m\,\omega^2 = m\,\frac{4\,\pi^2}{T^2} \end{aligned}\right\}\quad \frac{g_0}{R_T} = \frac{4\,\pi^2}{T^2}$$

De donde se deduce que:

$$T = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{R_T}{g_0}} = 6{,}28 \cdot \sqrt{\frac{6{,}4 \cdot 10^6\ \text{m}}{9{,}8\ \text{m/s}^2}} = 5{,}0 \cdot 10^3\ \text{s}$$

El tiempo empleado en ir de un extremo al otro es medio periodo; es decir, $t = 2{,}5 \cdot 10^3$ s.

El concepto de gravedad según Einstein

Cuestiones

1. La presencia de un cuerpo altera de alguna forma el espacio que lo rodea, originándose un campo gravitatorio. Según Einstein, ¿en qué consiste esta alteración del espacio que da lugar a la formación del campo gravitatorio?

***a)* En una curvatura del espacio-tiempo.**

b) En un agujero negro.

c) En una perturbación geométrica.

2. Un agujero negro, por su naturaleza, no se puede observar. ¿En qué se basan los astrónomos para certificar su existencia?

a) En los efectos de la Teoría de la Gravitación Universal.

b) En la distorsión del espacio-tiempo.

***c)* En la curvatura de la luz de algunas galaxias.**

Cuestiones y problemas

1. ¿A qué altura el valor de la gravedad se reduce a la mitad del valor que tiene en la superficie terrestre?

La gravedad en función de la altura viene dada por: $g_h = g_0\,\dfrac{R^2}{(R+h)^2}$

Si se cumple que $g_h = \dfrac{1}{2}\,g_0$, se deduce:

$$\frac{g_0}{2} = \frac{g_0\,R^2}{(R+h)^2}; \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{R}{R+h}$$

de donde $h = R\,(\sqrt{2} - 1) = 0{,}41\,R$. R es el radio de la Tierra.

2. Si la densidad de la Tierra fuese tres veces mayor, ¿cuál debería ser el radio terrestre para que el valor de la gravedad no variara? PAU

Si la gravedad no varía, se debe cumplir:

$$g = \frac{G\,M}{R^2} = \frac{G\,\frac{4}{3}\,\pi\,R^2\,\rho}{R^2} = \frac{4}{3}\,\pi\,G\,R\,\rho;\ g' = \frac{4}{3}\,\pi\,G\,R'\,(3\,\rho)$$

Haciendo $g = g'$, se deduce que $R' = \dfrac{1}{3}\,R_T$.

3. Si se redujese el volumen de la Tierra a la mitad y perdiera la mitad de su masa, ¿cómo variaría la aceleración de la gravedad?

PAU

La nueva gravedad sería:

$$g' = \frac{G\,\dfrac{M}{2}}{R'^2} = \frac{G\,M}{2\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2 R^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\,g_0$$

Siendo $M' = \dfrac{M}{2}$; $\quad V' = \dfrac{V}{2} = \dfrac{2}{3}\,\pi\,R^3 = \dfrac{4}{3}\,\pi\,R'^3$

$$R'^3 = \frac{1}{2}\,R^3; \qquad R' = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\,R = \frac{R}{\sqrt[3]{2}}$$

4. La intensidad del campo gravitatorio de la Luna es 1,60 m/s². ¿Cuánto pesa en la Luna un individuo que en la Tierra pesa 689 N? Datos: g_0 = 9,80 m/s².

La masa gravitatoria del individuo es la misma, tanto en la Tierra como en la Luna:

$$m = \frac{P_T}{g_T} = \frac{P_L}{g_L}$$

de donde se deduce el peso en la Luna:

$$P_L = \frac{P_T}{g_T}\,g_L = \frac{689\ \text{N}}{9{,}8\ \text{m/s}^2} \cdot 1{,}60\ \text{m/s}^2 = 112\ \text{N}$$

5. La intensidad del campo gravitatorio de Marte es 3,7 m/s² y su radio es 3,4 · 10⁶ m. ¿Cuánto vale la masa de Marte?

La gravedad de Marte viene dada por: $g_M = \dfrac{G\,M_M}{R_M^2}$, de donde se deduce la masa del planeta:

$$M_M = \frac{g_M\,R_M^2}{G} = \frac{3{,}7\ \text{m/s}^2 \cdot (3{,}4 \cdot 10^6\ \text{m})^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N}\,\text{m}^2/\text{kg}^2} = 6{,}4 \cdot 10^{23}\ \text{kg}$$

6. Calcula la aceleración con que cae un cuerpo en las proximidades de la superficie de la Luna. Datos: masa de la Luna, M = 7,34 · 10²² kg; radio de la Luna, R = 1,74 · 10⁶ m.

La aceleración con que cae un cuerpo en las proximidades de la Luna coincide con la intensidad del campo gravitatorio lunar:

$$g_L = \frac{G\,M_L}{R_L^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N}\,\text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot 7{,}34 \cdot 10^{22}\ \text{kg}}{(1{,}74 \cdot 10^6\ \text{m})^2} = 1{,}62\ \text{m/s}^2$$

7. Un cuerpo tiene una masa de 10 kg. ¿Cuál será el peso en un planeta cuya masa es 10 veces inferior a la masa de la Tierra, pero con igual tamaño que esta?

Relacionamos los valores de la gravedad en la Tierra y en el planeta que se indica en el problema:

$$g_T = G\,\frac{M_T}{R_T^2}; \qquad \frac{g_P}{g_T} = \frac{M_P\,R_T^2}{M_T\,R_P^2} = \frac{M_P}{10\,M_P} = \frac{1}{10}$$

$$g_P = G\,\frac{M_P}{R_P^2} \quad \text{por tanto se cumple que} \quad g_P = \frac{g_T}{10}$$

En este planeta el peso del cuerpo será:

$$P = m\,g_P = 10\ \text{kg} \cdot \frac{9{,}8\ \text{m/s}^2}{10} = 9{,}8\ \text{N}$$

8. Calcula el potencial gravitatorio creado por una esfera de 1000 kg de masa en un punto situado a 10,0 m de su centro.

Por definición, el potencial gravitatorio representa la energía potencial correspondiente a la unidad de masa:

$$V_P = \frac{E_P}{m} = \frac{\dfrac{G\,M\,m}{r}}{m} = -\frac{G\,M}{r} =$$

$$= \frac{-6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N}\,\text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot 10^3\ \text{kg}}{10{,}0\ \text{m}} = -6{,}67 \cdot 10^{-9}\ \text{J/kg}$$

9. La masa de 1 kg colocada en la superficie terrestre es atraída hacia el centro de la Tierra con una fuerza de 9,81 N. Si la distancia de la Luna a la Tierra es de 60 radios terrestres, ¿con qué fuerza sería atraída por la Tierra una masa de 1 kg colocada en la superficie lunar?

La fuerza de atracción de la Tierra sobre un objeto en su superficie viene dado por la Ley de Gravitación Universal:

$$\vec{F}_S = -G\,\frac{M_T\,m}{R_T^2}\,\vec{u}_r = \vec{g}_0\,m,$$

donde g_0 es la intensidad de campo gravitatorio en la superficie terrestre (es decir, a una distancia de un radio terrestre del centro de la Tierra) y m la masa del objeto atraído. El vector $\vec{g}_0$ se dirige hacia el centro terrestre.

Si en lugar de encontrarse en la superficie terrestre el objeto dista del centro de la Tierra una distancia $60\,R_T$, resulta que la fuerza de atracción es:

$$\vec{F} = -G\,\frac{M_T\,m}{(60\,R_T)^2}\,\vec{u}_r = -G\,\frac{M_T\,m}{3\,600\,(R_T)^2}\,\vec{u}_r = \frac{\vec{g}_0\,m}{3\,600}$$

En valor absoluto:

$$\frac{g_0\,m}{3\,600} = \frac{F_S}{3\,600} = \frac{9{,}81\ \text{N}}{3\,600} = 2{,}7 \cdot 10^{-3}\ \text{N}$$

10. Dos planetas A y B de masas M_A y M_B tienen la misma intensidad de la gravedad en su superficie. Determina la relación de sus radios y la relación de sus densidades sabiendo que $M_A = 25\,M_B$.

Si partimos de la definición de intensidad de campo gravitatorio en la superficie de un planeta, tenemos, para los planetas A y B, las siguientes relaciones:

$$g_A = G\,\frac{M_A}{R_A^2}; \qquad g_B = G\,\frac{M_B}{R_B^2}$$

Como $M_A = 25\,M_B$, y se cumple la condición $g_A = g_B$, resulta que:

$$g_A = g_B = G\,\frac{25\,M_B}{R_A^2} = G\,\frac{M_B}{R_B^2}$$

de donde, $\dfrac{25\,M_B}{R_A^2} = \dfrac{M_B}{R_B^2} \Rightarrow R_A^2 = 25\,R_B^2 \Rightarrow R_A = 5\,R_B$

Para hallar la relación de densidades, basta con considerar la relación entre las masas y los radios de los planetas, así:

$$d_A = \frac{M_A}{V_A} = \frac{M_A}{\frac{4}{3}\pi R_A^3}; \qquad d_B = \frac{M_B}{V_B} = \frac{M_B}{\frac{4}{3}\pi R_B^3}$$

$$d_A = \frac{25\,M_B}{\frac{4}{3}\pi\,(5\,R_B)^3} = \frac{25}{125}\cdot\frac{M_B}{\frac{4}{3}\pi R_B^3} = \frac{1}{5}\,d_B$$

$$d_B = 5\,d_A$$

11. Calcula el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de Mercurio, si el radio de la Tierra es tres veces mayor que el de Mercurio, y la densidad de Mercurio es $\frac{3}{5}$ de la densidad media de la Tierra. Datos: g_0 = 9,8 m/s².

PAU

Valor de la gravedad en Mercurio en función de la densidad y del radio del planeta:

$$g_M = \frac{G\,M_M}{R_M^2} = \frac{\frac{4}{3}\pi G R_M^3 \rho_M}{R_M^2} = \frac{4}{3}\pi G R_M \rho_M$$

Y para la Tierra sería $g_T = \frac{4}{3}\pi G R_T \rho_T$

Relacionando los dos valores, tenemos:

$$\frac{g_M}{g_T} = \frac{\frac{4}{3}\pi G R_M \rho_M}{\frac{4}{3}\pi G R_T \rho_T} = \frac{R_M\,\frac{3}{5}\,\rho_T}{3\,R_M \rho_T} = \frac{1}{5}$$

Por tanto, se cumple que:

$$g_M = \frac{g_T}{5} = \frac{9{,}8\ \text{m/s}^2}{5} = 1{,}96\ \text{m/s}^2$$

12. Halla la aceleración de un cuerpo que cae libremente en la superficie de la Luna, sabiendo que el diámetro de la Luna es 1/4 del diámetro terrestre y la masa de la Luna es 1/81 la masa de la Tierra.

PAU

El valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Luna es $g_L = G\,\frac{M_L}{R_L^2}$, y en la de la Tierra $g_T = G\,\frac{M_T}{R_T^2} = g_0$.

Como se conoce el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra, relacionamos los valores dato con este valor conocido.

$$M_L = \frac{1}{81}\,M_T; \qquad R_L = \frac{1}{4}\,R_T$$

Así:

$$g_L = G\,\frac{\frac{1}{81}\,M_T}{\left(\frac{1}{4}\,R_T\right)^2} = \frac{1}{81}\cdot 16\cdot G\,\frac{M_T}{R_T^2} = 0{,}19\ g_0 =$$

$$= 0{,}19\cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 1{,}9\ \text{m/s}^2$$

13. Si la densidad de la Tierra es 5,5 · 10³ kg/m³, calcula:

PAU

***a)* El valor de su radio sabiendo que *g* = 9,8 m/s².**

***b)* El valor de *g* a una altura igual a dicho radio.**

Dato: constante de gravitación $G = 6{,}7\cdot 10^{-11}$ N m² kg⁻².

a) La densidad media de la Tierra se obtiene mediante la expresión $d = \frac{M_T}{V_T}$.

Por otra parte, el valor de la intensidad del campo gravitatorio en la superficie terrestre es:

$$g_T = G\,\frac{M_T}{R_T^2} = g_0 = 9{,}8\ \text{m/s}^2$$

Así, planteamos un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} g_0 = G\,\dfrac{M_T}{R_T^2} = 9{,}8\ \text{m/s}^2 \\[2ex] d = \dfrac{M_T}{V_T} = \dfrac{M_T}{\frac{4}{3}\pi\,(R_T)^3} = 5{,}5\cdot 10^3\ \text{kg/m}^3 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, llegamos al valor:

$$R_T = \frac{3\ \cdot\ 9{,}8\ \text{m/s}^2}{4\pi\cdot 6{,}7\cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2\cdot 5\,500\ \text{kg/m}^3} = 6\ 352\cdot 10^3\ \text{m}$$

b) Para calcular *g* a una altura *h* de 6 350 km, acudimos a la expresión de la intensidad de campo gravitatorio $g_T = G\,\frac{MT}{(R+h)^2}$

Según el apartado *a*), la masa de la Tierra es de:

$$MT = \frac{R_T^2 g_0}{G} = \frac{(6\,350\cdot 10^3\ \text{m})^2\cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2}{6{,}7\cdot 10^{11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2} = 5{,}9\cdot 10^{24}\ \text{kg}$$

Así que la gravedad a 6 350 km de la superficie terrestre es:

$$g_T = G\,\frac{M_T}{(R+h)^2} =$$

$$= 6{,}7\cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}\cdot\frac{5{,}9\cdot 10^{24}\ \text{kg}}{(6\,350\cdot 10^3\ \text{m} + 6\,350\cdot 10^3\ \text{m})^2} = 2{,}5\ \text{m/s}^2$$

14. Un astronauta, cuyo peso en la Tierra es de 700 N, aterriza en el planeta Venus, mide de nuevo su peso y observa que después de efectuadas las correcciones correspondientes, pesa 600 N. Considerando que el diámetro de Venus es aproximadamente el mismo que el de la Tierra, calcula la masa del planeta Venus. Toma como masa de la Tierra el valor aproximado de 6 · 10²⁴ kg.

Según la Ley de gravitación universal, el peso del astronauta en la Tierra es:

$$P = G\,\frac{M_T m}{R_T^2} = g_0 m = 700\ \text{N}$$

En Venus, el peso es $P_V = G\,\frac{M_V m}{R_V^2}$. Según el enunciado, se cumple que $R_T = R_V$, así que:

$$G\,\frac{M_T m}{R_T^2} = 700\ \text{N}; \qquad G\,\frac{M_V m}{R_T^2} = 600\ \text{N}$$

$$\frac{M_T}{M_V} = \frac{700}{600} \Rightarrow M_V = \frac{6}{7}\,M_T = \frac{6}{7}\cdot 6\cdot 10^{24}\ \text{kg} = 5{,}14\cdot 10^{24}\ \text{kg}$$

15. Si por una causa interna la Tierra redujese su radio a la mitad manteniendo su masa:

***a)* ¿Cuál sería la intensidad de la gravedad en su nueva superficie?**

***b)* ¿Se modificaría sustancialmente su órbita alrededor de su eje?**

***c)* ¿Cuál sería la nueva duración en horas del día?**

a) La intensidad del campo gravitatorio en la superficie de la Tierra es $g_T = G\,\dfrac{M_T}{R_T^2} = g_0 = 9{,}8\ \text{m/s}^2$. Si se reduce el radio a la mitad:

$$g_T = G\,\frac{M_T}{\left(\frac{1}{2}\,R_T\right)^2} = 4\,g_0 = 39{,}2\ \text{m/s}^2$$

b) No.

c) El periodo de rotación en función de la intensidad de campo gravitatorio:

$$T = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{R_T}{g_0}}$$

como el radio terrestre es ahora la mitad, el nuevo periodo de rotación será:

$$T' = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{\frac{R_T}{2}}{4\,g_0}} = T\,\sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{T}{4} = 6\ \text{horas}$$

16. Calcula el punto situado entre la Tierra y la Luna, tal que el campo gravitatorio en él sea nulo.

Datos: distancia Tierra-Luna = $3{,}8 \cdot 10^8$ m. Masa de la Tierra $M_T = 81\ M_L$.

El campo gravitatorio creado por la Tierra a una distancia x del centro terrestre es:

$$g_T = \frac{G\,M_T}{x^2}$$

y el creado por la Luna, en el mismo punto, teniendo en cuenta que la distancia Tierra-Luna es $3{,}8 \cdot 10^8$ m, es:

$$g_L = \frac{G\,M_L}{(3{,}8 \cdot 10^8 - x)^2}$$

Para que el campo gravitatorio en ese punto sea nulo, la intensidad de campo en el sentido de la Tierra ha de igualar a la intensidad de campo gravitatorio en el sentido de la Luna, es decir, las dos intensidades se anulan, al tener sentidos opuestos. Así:

$$\frac{G\,M_T}{x^2} = \frac{G\,M_L}{(3{,}8 \cdot 10^8 - x)^2}$$

$$\frac{81\,M_L}{x^2} = \frac{M_L}{(3{,}8 \cdot 10^8 - x)^2} \;\Rightarrow\; x = 3{,}42 \cdot 10^8\ \text{m}$$

aunque se obtienen dos soluciones, solo una de ellas está dentro de la distancia Tierra-Luna.

17. Calcula la intensidad del campo gravitatorio en los siguientes puntos:

***a)* A una altura de $h = \dfrac{R}{2}$.**

***b)* A una altura $h = R$.**

a) La intensidad del campo gravitatorio en la superficie de la Tierra es:

$$g_T = G\,\frac{M_T}{R_T^2} = g_0 = 9{,}8\ \text{m/s}^2$$

A una altura $\dfrac{R_T}{2}$, la gravedad es:

$$g_T = G\,\frac{M_T}{(R_T + h)^2} = G\,\frac{M_T}{\left(R_T + \frac{R_T}{2}\right)^2} =$$

$$= G\,\frac{M_T}{\left(\frac{3\,R_T}{2}\right)^2} = \frac{4}{9}\,G\,\frac{M_T}{R_T^2} = \frac{4}{9}\,g_0$$

b) Lo mismo para una altura de $h = R$:

$$g_T = G\,\frac{M_T}{(R_T + h)^2} = G\,\frac{M_T}{(R_T + R_T)^2} = G\,\frac{M_T}{(2\,R_T)^2} = \frac{1}{4}\,G\,\frac{M_T}{R_T^2} = \frac{1}{4}\,g_0$$

18. ¿A qué distancia del centro de la Tierra la intensidad del campo gravitatorio terrestre es igual a su valor en un punto del interior de la Tierra equidistante del centro y de la superficie?

La intensidad del campo gravitatorio a una distancia d del centro de la Tierra es $g_d = G\,\dfrac{M_T}{d^2}$.

Para calcular la intensidad del campo gravitatorio en el interior de la Tierra una distancia igual del centro que de la superficie tenemos que considerar dos condiciones:

- El punto equidistante entre el centro y la superficie de la Tierra está a $\dfrac{R_T}{2\ \text{m}}$ del centro terrestre.
- La masa que crea el campo en esa porción de Tierra es la correspondiente a un volumen con medio radio terrestre. La densidad de la Tierra se mantiene, pero cambian su masa y su volumen:

$$d_T = \frac{M_T}{V_T} = \frac{M'_T}{V'_T}$$

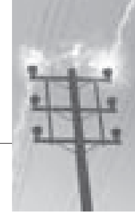
Así, se cumple que:

$$\frac{M_T}{\frac{4}{3}\,\pi\,R_T^3} = \frac{M'_T}{\frac{4}{3}\,\pi\left(\frac{R_T}{2}\right)^3} \;\Rightarrow\; M'_T = \frac{1}{8}\,M_T$$

La intensidad de campo gravitatorio en ese punto entre la superficie y el centro es:

$$g_{\frac{1}{2}R} = G\,\frac{M'_T}{\left(\frac{1}{2}\,R_T\right)^2} = G\,\frac{4\,M_T}{8\,R_T^2} = G\,\frac{M_T}{2\,R_T^2}$$

Igualamos las dos intensidades de campo gravitatorio, $G\dfrac{M_T}{d^2} = G\dfrac{M_T}{2\,R_T^2}$, de donde $d = \sqrt{2}\ R_T = 9\ 050$ km.



Actividades

1. Una bola ha estado en contacto con una barra de vidrio electrizada. Si le aproximas una barra de ámbar también electrizada, sucede que:

a) **La bola no se mueve.**

b) **La bola es atraída por el ámbar.**

c) **La bola tiene el mismo tipo de electricidad que el vidrio.**

d) **La bola es repelida por el ámbar.**

¿Qué afirmaciones son correctas?

La bola se ha cargado, por contacto, con carga positiva. Si le aproximamos una barra de ámbar (–), la bola será atraída. Por tanto, son correctas las afirmaciones *b)* y *c)*.

2. Un cuerpo es eléctricamente neutro cuando:

a) No tiene electricidad.

b) No tiene electrones.

c) No ha perdido ni ha ganado electrones.

d) **Tiene el mismo número de electrones que de protones.**

3. De acuerdo con la Ley de Coulomb, ¿cuánto se debe modificar la distancia entre dos cargas para que la fuerza de interacción entre ellas:

a) **aumente en nueve veces?**

b) **se reduzca a la mitad?**

c) **se haga cuatro veces mayor?**

La ley de Coulomb es $F = K\,\dfrac{q_1 q_2}{r^2}$, de donde se puede despejar la relación de la distancia entre cargas con el resto de parámetros, $r = \sqrt{\dfrac{q_1 q_2}{F}}$.

a) Si la fuerza de interacción eléctrica entre las dos cargas aumenta nueve veces:

$$r' = \sqrt{K\,\frac{q_1 q_2}{F'}}\quad \sqrt{K\,\frac{q_1 q_2}{9F}} = \frac{1}{3}\,r$$

b) En este caso $\quad r' = \sqrt{K\,\dfrac{q_1 q_2}{F'}}\quad \sqrt{K\,\dfrac{q_1 q_2}{F/2}} = \sqrt{2}\,r$

c) En este caso $\quad r' = \sqrt{K\,\dfrac{q_1 q_2}{F'}}\quad \sqrt{K\,\dfrac{q_1 q_2}{4F}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,r$

4. Dos esferas cargadas, cada una de radio *a*, están separadas una distancia *r* > 2*a*. ¿Se puede aplicar la Ley de Coulomb para hallar la interacción entre estas esferas? ¿Por qué?

La Ley de Coulomb solamente es válida para cargas puntuales o también para conductores cargados que tengan forma esférica, si el radio de las esferas es pequeño comparado con la distancia entre sus centros.

En nuestro caso se puede aplicar la Ley de Coulomb, porque si $r > 2a$, podemos admitir que se cumple la condición exigida.

5. Tenemos dos cargas puntuales q_1 y q_2 separadas una distancia *r*. ¿Cómo varía la fuerza de interacción entre ellas en los siguientes casos?

a) **q_1 se reduce a la mitad y q_2 se hace tres veces mayor.**

b) **Cada una de las cargas se duplica y la distancia se reduce a la mitad.**

La fuerza de interacción entre dos cargas viene determinada por la Ley de Coulomb: $F = K\,\dfrac{q_1 q_2}{r^2}$,

a) Si $q' = \dfrac{1}{2}\,q_1$ y $q'' = 3\,q_2$, la fuerza de interacción será:

$$F' = K\,\frac{q'q''}{r^2} = \frac{3}{2}\,K\,\frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{3}{2}\,F$$

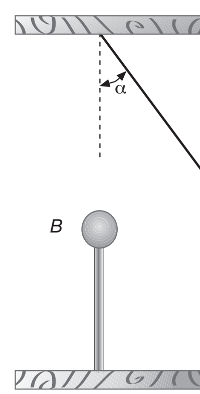
b) Si las cargas se duplican y la distancia se reduce a la mitad, se cumple que $q' = 2\,q_1$; $q'' = 2\,q_2$; $r' = \dfrac{1}{2}\,r$, y la fuerza de interacción será:

$$F' = K\,\frac{q'q''}{r^2} = K\,\frac{2\,q_1 \cdot 2\,q_2}{\left(\dfrac{r}{2}\right)^2} = 16\,K\,\frac{q_1 q_2}{r^2} = 16\,F$$

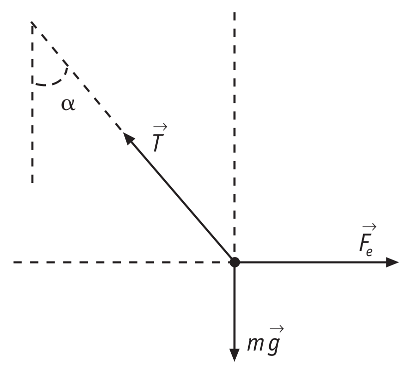
6. Se tiene una esfera cargada *A*, de masa *m*, en equilibrio, como se indica en la figura siguiente, debido a la presencia de otra esfera cargada *B* que está fija.

a) **Dibuja un diagrama de las fuerzas que actúan sobre la esfera *A*.**

b) **Expresa una relación entre la fuerza electrostática y el peso de *A*.**



a) Sobre la esfera actúan tres fuerzas: el peso, la interacción electrostática y la tensión del hilo, cuyo diagrama se indica en la figura siguiente:



b) Para que la esfera esté en equilibrio, se debe cumplir:

$$T_x = F_e \Rightarrow T \operatorname{sen} \alpha = F_e$$
$$T_y = mg \Rightarrow T \cos \alpha = mg$$

de donde se obtiene la siguiente relación:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_e}{mg} \Rightarrow = mg \operatorname{tg} \alpha$$

7. ¿A qué distancia, una de otra, debes colocar dos cargas iguales de un microculombio cada una para que se repelan con la fuerza de 1 N?

La distancia se obtiene despejando r de la Ley de Coulomb:

$$r = \sqrt{\frac{Kq_1q_2}{F}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2\text{C}^{-2} \cdot (10^{-6}\text{ C})^2}{1 \text{ N}}} = 9{,}4 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

8. Una pequeña esfera cargada está colgada de un hilo. ¿Cómo puedes saber si su carga es positiva o negativa?

Aproximando una barra de vidrio previamente frotada (carga +) y observando si la esfera es atraída o repelida por la barra.

9. ¿De qué depende la intensidad del campo eléctrico?

La intensidad del campo eléctrico depende del valor de la carga que crea el campo, de su signo y de la distancia entre ellas.

10. ¿Qué dimensiones tiene la intensidad del campo eléctrico?

La intensidad de campo eléctrico se mide en N/C.

11. ¿Cómo distinguirías experimentalmente un campo eléctrico de uno gravitatorio? Diseña un experimento.

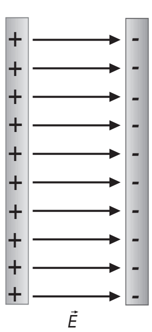
Cada campo tiene una característica que lo distingue de los demás campos. La característica del campo gravitatorio es la masa y se detecta este campo con otra masa. La característica del campo eléctrico es la carga; por tanto, su elemento detector es otra carga, es decir, un cuerpo electrizado, por ejemplo, un péndulo eléctrico. De un hilo de seda colgamos una bolita de corcho forrada con papel de aluminio y después la electrizamos tocándola varias veces con un bolígrafo frotado. Hemos fabricado un detector del campo eléctrico. Si al desplazarnos por una región del espacio con este péndulo observamos una desviación de su posición vertical, diremos que en esa región existe un campo eléctrico.

12. Una carga de 2 microculombios colocada en un campo eléctrico experimenta una fuerza de $8 \cdot 10^{-4}$ N. ¿Cuál es la intensidad del campo eléctrico?

La intensidad de un campo eléctrico viene dada por:

$$|\vec{E}| = \frac{|\vec{F}|}{q}; \qquad E = \frac{8 \cdot 10^{-4} \text{ N}}{2 \cdot 10^{-6} \text{ C}} = 400 \text{ N/C}$$

13. En el campo de la figura siguiente se coloca un protón y un electrón. ¿Están sometidos a la misma fuerza? ¿Por qué? ¿En qué sentido se moverá cada partícula?



$\vec{E}$

La fuerza que ejerce el campo sobre cada partícula es:

$$\vec{F} = \vec{E}\,q$$

El electrón y el protón poseen cargas opuestas; por tanto, experimentarán fuerzas opuestas. El electrón se moverá en sentido contrario al campo, mientras que el protón se desplazará en el mismo sentido que el campo.

14. La intensidad de un campo eléctrico depende de la carga Q que lo crea y de la distancia.

***a)* Si la carga se duplica el campo se...**

***b)* Si la distancia se duplica el campo se...**

***c)* Si la carga y la distancia se duplican el campo se...**

La intensidad de campo eléctrico se define como:

$$E = K\frac{Q}{r^2}$$

a) Si $Q' = 2Q$, $E' = K\dfrac{2Q}{r^2} = 2E$, es decir, el valor del campo se duplica.

b) Si $r' = 2r$, $E' = K\dfrac{Q}{(2r)^2} = \dfrac{E}{4}$, es decir, el valor del campo es la cuarta parte.

c) Si $Q' = 2Q$ y $r' = 2r$, $E' = K\dfrac{2Q}{(2r)^2} = \dfrac{E}{2}$, es decir, el valor del campo se divide por dos.

15. Una carga negativa se mueve en el mismo sentido de un campo eléctrico uniforme. ¿Aumenta o disminuye su energía potencial? ¿Aumenta o disminuye el potencial eléctrico?

Cuando una carga negativa se mueve en el mismo sentido del campo, desde A hasta B, gana energía potencial porque $V_A > V_B$ por lo que $(V_B - V_A) < 0$.

En consecuencia, se cumple que:

$$\Delta U = (-q)\,(V_B - V_A) = qEd$$

Disminuye el potencial eléctrico, ya que $V_A > V_B$.

16. Un campo eléctrico uniforme es paralelo al eje *Ox*. ¿En qué dirección puede ser desplazada una carga en este campo sin que se realice trabajo sobre ella?

En este caso las superficies equipotenciales son perpendiculares al eje Ox. Por tanto, si una carga se desplaza a lo largo de una superficie equipotencial, es decir, perpendicularmente al campo, no se realiza trabajo sobre ella.

17. Si se libera un protón desde el reposo en un campo eléctrico uniforme, ¿aumenta o disminuye su potencial eléctrico? ¿Qué puedes decir acerca de su energía potencial?

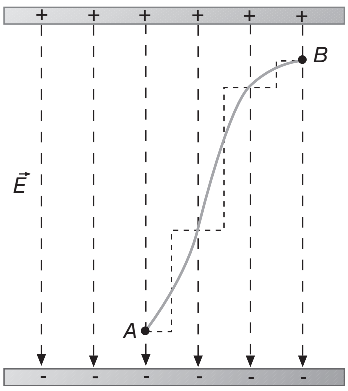
PAU

Si un protón se abandona en un campo uniforme, estará sometido a una fuerza con la misma dirección y sentido que el campo. Por tanto, su potencial disminuye. Lo mismo ocurre con su energía potencial.

18. ¿Cómo son las superficies equipotenciales de un campo eléctrico uniforme?

Superficies planas perpendiculares a la dirección del campo.

19. ¿Qué trabajo efectúa una fuerza externa para llevar un protón desde el punto *A* hasta el punto *B* de la figura siguiente? ¿Y para un electrón?



El desplazamiento se realiza en sentido contrario al campo; por tanto, el potencial aumenta, $V_B > V_A$, y el trabajo realizado será positivo:

$$W = (V_B - V_A)\, q > 0$$

En el caso de un electrón, el trabajo es negativo:

$$W = (V_B - V_A)\,(-q) < 0$$

20. ¿Qué energía en electrón-voltios adquiere una carga $2 \cdot 10^{-7}$ C cuando se mueve entre dos puntos cuya diferencia de potencial es 5 000 V?

La energía será:

$$W = (V_B - V_A)\, q = 5\,000 \text{ V} \cdot 2 \cdot 10^{-7} \text{ C} = 10^{-3} \text{ J}$$

Si tenemos en cuenta que 1 eV = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J, la energía en electrón-voltios será $W = 6{,}25 \cdot 10^{15}$ eV.

21. Para pasar del punto *A* al punto *B* de la figura anterior se puede hacer por tramos horizontales y verticales. ¿Por qué en los tramos horizontales no se produce trabajo? Razona tu respuesta.

Todos los puntos situados en la misma horizontal sufren la misma intensidad de campo eléctrico. La variación de potencial se produce si se realiza un trabajo para trasladar esa carga desde un punto a otro. En este caso, ese trabajo es nulo, pues no se vence ninguna fuerza eléctrica, puesto que los dos puntos de la horizontal están sometidos a la misma fuerza eléctrica.

Visto desde las líneas de campo, la horizontal es una superficie equipotencial, y como tal, no hay variación de potencial de un punto a otro de esa horizontal, y por tanto, no se realiza trabajo en ese desplazamiento.

22. ¿Existe alguna distinción entre diferencia de potencial y diferencia de energía potencial?

La energía potencial eléctrica que poseen dos cargas en el espacio viene dada por la expresión $E_p = K\dfrac{Qq}{r}$, mientras que el potencial eléctrico equivale a la energía potencial eléctrica que ha ganado una carga de +1 C, al traerla del infinito a un punto, es decir, es la energía potencial eléctrica por unidad de carga,

$$V = \frac{E_p}{q} = K\frac{Q}{r}$$

23. Demuestra que el campo eléctrico en el centro de un triángulo equilátero es nulo si las cargas situadas en los vértices del triángulo son iguales.

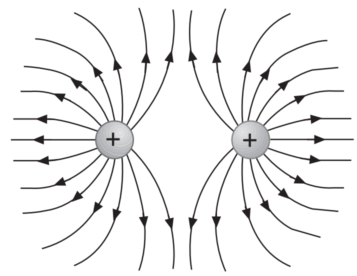
Los tres campos tienen el mismo módulo: $|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = |\vec{E}_3|$

$$\Sigma E_x = E_1 \cos 30° - E_3 \cos 30° = 0$$

$$\Sigma E_y = E_1 \cos 30° + E_3 \cos 30° - E_2 = 0$$

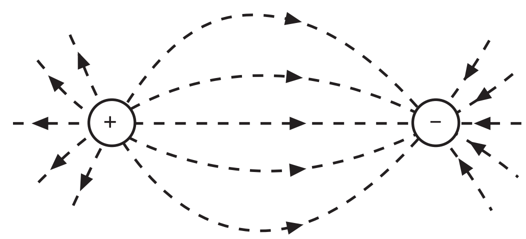
luego el campo resultante es nulo: $E_T = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 0$

24. Para dos cargas iguales descritas en la Figura siguiente, ¿en qué punto (que no sea el infinito) una tercera carga no experimentaría ninguna fuerza resultante?



En el punto medio del segmento que une las cargas. En ese punto el campo eléctrico es nulo. Por tanto, la fuerza también lo es: $F = Eq = 0$.

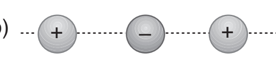
25. Dibuja las líneas del campo formado por un dipolo: dos cargas puntuales iguales, de signo contrario y situadas entre sí a una pequeña distancia.

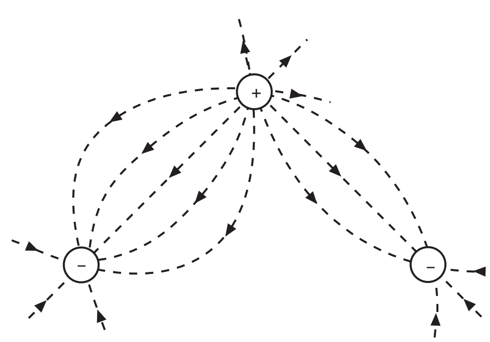


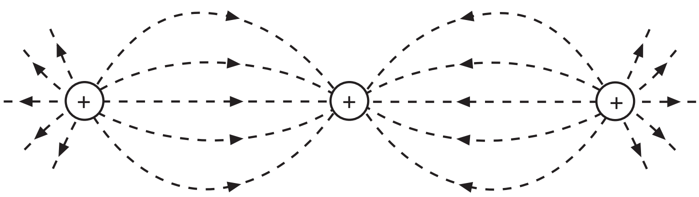
26. Dibuja las líneas de campo de las figuras siguientes.

(a)

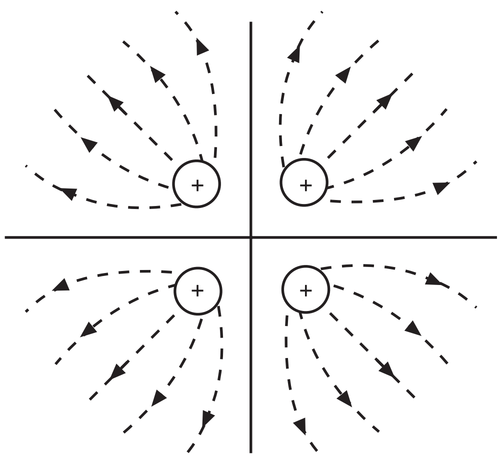
(b)







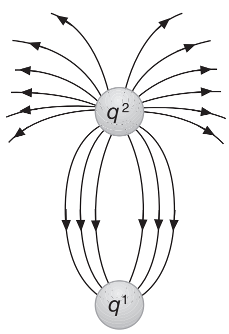
27. Cuatro cargas positivas e iguales están en los vértices de un cuadrado. Dibuja el esquema de las líneas del campo eléctrico en el plano del cuadrado.



28. En la figura siguiente se muestran las líneas del campo eléctrico de dos cargas puntuales.

a) **Determina la razón q_1/q_2.**

b) **¿Cuáles son los signos de q_1 y q_2?**



a) De la carga q_2 salen 18 líneas de campo, mientras que en q_1 entran 6 líneas. De donde se deduce que:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

b) La carga q_2 es positiva, porque de ella salen las líneas de fuerza; la carga q_1 es negativa, porque a ella llegan las líneas de fuerza.

29. En el seno de un campo $E = -5x \cdot \vec{u}_x + 3z \cdot \vec{u}_z$ N/C hay un cubo de lado 0,3 m, colocado con un vértice en el origen de coordenadas. Halla el flujo eléctrico a través de las seis caras del cubo y determina la carga total en su interior.

El campo eléctrico es paralelo al plano *zx*. Por tanto, el flujo a través de las caras *OABE* y *GDCF* es nulo. El flujo neto a través de las otras caras también es cero, puesto que las líneas de campo que entran por una de las caras salen por la cara opuesta correspondiente.

También se puede resolver analíticamente.

– Flujo a través de la cara *ABCD:*

$\phi_1 = \vec{E} \cdot \vec{S}_1 = (-5x\ \vec{u}_x + 3z\ \vec{u}_z) \cdot 0{,}09\ \vec{u}_z = 0{,}27z$ Wb

– Flujo a través de la cara *OEFG:*

$\phi_2 = \vec{E} \cdot \vec{S}_2 = (-5x\ \vec{u}_x + 3z\ \vec{u}_z) \cdot (-0{,}09\ \vec{u}_z) = -0{,}27z$ Wb

– Flujo a través de la cara *OADG:*

$\phi_3 = \vec{E} \cdot \vec{S}_3 = (-5x\ \vec{u}_x + 3z\ \vec{u}_z) \cdot (0{,}09\ \vec{u}_x) = -0{,}45x$ Wb

– Flujo a través de la cara *EBCF:*

$\phi_4 = \vec{E} \cdot \vec{S}_4 = (-5x\ \vec{u}_x + 3z\ \vec{u}_z) \cdot (-0{,}09\ \vec{u}_x) = 0{,}45x$ Wb

– Flujo a través de la cara *OABE:*

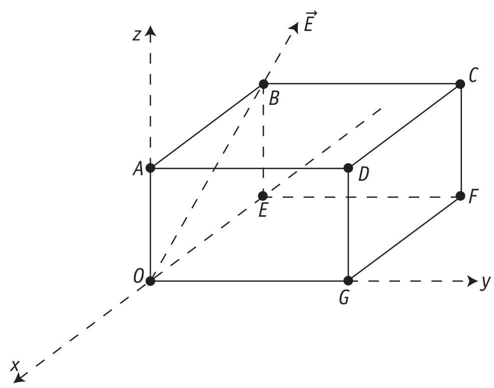
$\phi_5 = \vec{E} \cdot \vec{S}_5 = (-5x\ \vec{u}_x + 3z\ \vec{u}_z) \cdot (-0{,}09\ \vec{u}_y) = 0$ Wb

– Flujo a través de la cara *GDFC:*

$\phi_6 = \vec{E} \cdot \vec{S}_6 = (-5x\ \vec{u}_x + 3z\ \vec{u}_z) \cdot 0{,}09\ \vec{u}_y = 0$ Wb

– Flujo total: $\phi_T = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \phi_5 + \phi_0 = 0$.

– Carga total: $Q = \varepsilon_0\, \phi_T = 0$ *C*.



La carga del electrón

Cuestiones

1. Una barra de vidrio se ha electrizado por frotamiento con una carga de $8 \cdot 10^{-3}$ μC.

a) **Ha ganado en el proceso $5 \cdot 10^{10}$ electrones.**

b) Ha perdido $5 \cdot 10^{10}$ electrones.

c) Ha ganado $8 \cdot 10^{-3}$ electrones.

d) Ha perdido $8 \cdot 10^{-3}$ electrones.

2. Una esfera de 30 cm de radio se ha cargado a 3 000 V. La carga de la esfera es:

a) 1 C; ***b)*** **10^{-7} C;** *c)* 1 μC; *d)* 0,1 μC

Cuestiones y problemas

1. ***a)*** **Calcula la fuerza con que se atraen dos esferas metálicas del mismo radio, sabiendo que están cargadas con 3,0 microculombios y –9,0 microculombios, respectivamente, y colocadas en el vacío a una distancia de 30 cm.**

PAU

b) **Si las esferas se ponen en contacto, y luego se colocan en las mismas posiciones, calcula la fuerza de interacción.**

a) Para hallar la fuerza de atracción aplicamos la Ley de Coulomb:

$$F = K\,\frac{Q_1 Q_2}{r^2} = 9 \cdot 10^9\ \mathrm{Nm^2C^{-2}} \cdot \frac{3 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C} \cdot 9\ \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C}}{9 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m^2}} = 2{,}7\ \mathrm{N}$$

b) Al ponerse en contacto, pasará una carga q de la esfera A a la esfera B hasta que se igualen sus potenciales:

$$K\,\frac{Q_1 - q}{r} = K\,\frac{Q_2 + q}{r}$$

de donde se deduce el valor de la carga que circula:

$$q = \frac{Q_1 - Q_2}{2} = \frac{3 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C} - (-9 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C})}{2} = 6 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C}$$

Carga de cada esfera después de la unión:

$$Q_A = Q_1 - q = 3 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C} - 6 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C} = -3 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C}$$

$$Q_B = Q_2 - q = -9 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C} + 6 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C} = -3 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C}$$

La fuerza de interacción será:

$$F = 9 \cdot 10^9\ \mathrm{N\,m^2C^{-2}} \cdot \frac{3 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C} \cdot 3 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}}{9 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m^2}} = 0{,}9\ \mathrm{N}$$

de repulsión.

2. Dos partículas alfa están separadas por una distancia de 10^{-13} m. Calcula la fuerza electrostática con que se repelen y la fuerza gravitatoria con que se atraen. Compara ambas fuerzas entre sí.

PAU

Datos: masa de una partícula alfa = $6{,}68 \cdot 10^{-27}$ kg. Carga $3{,}2 \cdot 10^{-19}$ C.

La fuerza electrostática entre ellas es:

$$F_e = K\,\frac{q_\alpha q_\alpha}{r^2} = 9 \cdot 10^9\ \mathrm{N\,m^2\,C^{-2}} \cdot \frac{3{,}2 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \cdot 3{,}2 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}}{(10^{-13}\ \mathrm{m})^2} =$$

$$= 9{,}22 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{N}$$

La fuerza de atracción gravitatoria es:

$$F_g = G\,\frac{m_\alpha m_\alpha}{r^2} =$$

$$= 6{,}7 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2kg^{-2}} \cdot \frac{6{,}68 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} \cdot 6{,}68 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}}{(10^{-13}\ \mathrm{m})^2} =$$

$$= 2{,}98 \cdot 10^{-37}\ \mathrm{N}$$

Comparándolas, resulta que $\dfrac{F_e}{F_g} = \dfrac{9{,}22 \cdot 10^{-2}}{2{,}98 \cdot 10^{-37}} = 3 \cdot 10^{35}$

3. Dos esferas iguales de 0,2 g cada una cuelgan de un mismo punto mediante hilos de 50 cm de longitud. Si a las esferas anteriores se las electriza con igual cantidad de electricidad, los hilos se separan hasta formar un ángulo de 60°. Calcula la carga de cada esfera.

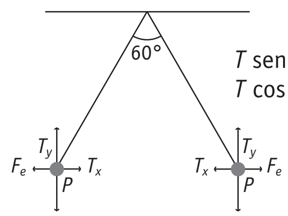
PAU

Las esferas están sometidas a las fuerzas gravitatoria y eléctrica. En el equilibrio la suma de las fuerzas es nula. Las cargas tienen el mismo signo, pues se repelen.

$T_x = F_e$

$T_y = P = \mathrm{mg}$

Según la figura observamos que:



$$\begin{aligned} T \text{ sen } 30° &= qE \\ T \cos 30° &= mg \end{aligned} \quad \text{de donde } q = \frac{mg}{E}\ \mathrm{tg}\ 30°$$

Por otra parte, el campo eléctrico es $E = K\,\dfrac{q}{d^2}$, donde d es la distancia entre cargas en la posición de equilibrio. Para obtener d, basta con conocer el ángulo entre los hilos y la longitud del mismo, $d = 0{,}5$ m.

Con esas dos ecuaciones, obtenemos:

$$q^2 = \frac{\mathrm{mg}}{K}\,d^2\ \mathrm{tg}\ 30° = \frac{0{,}2 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}}{9 \cdot 10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2}} \cdot (0{,}5\ \mathrm{m})^2 \cdot \mathrm{tg}\ 30°$$

$\Rightarrow q = 1{,}77 \cdot 10^{-7}$ C

4. Tres partículas *A*, *B* y *C*, igualmente cargadas, poseen las siguientes coordenadas: *A* (2/3, 0), *B* (0, 0), *C* (0, 1), expresadas en centímetros. *C* ejerce sobre *B* una fuerza de $4{,}0 \cdot 10^{-5}$ N. Calcula:

PAU

a) **La fuerza que *A* ejerce sobre *B*.**

b) **La fuerza neta sobre *B* ejercida por *A* y *C*, así como el ángulo que forma esta fuerza con el eje vertical.**

a) En primer lugar hallamos las cargas:

$$4{,}0 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N} = 9 \cdot 10^9\ \mathrm{N\,m^2\,C^{-2}} \cdot \frac{q^2}{10^{-4}\ \mathrm{m^2}}$$

de donde se deduce que $q = \dfrac{2}{3} \cdot 10^{-9}$ C; por tanto, la fuerza entre las cargas A y B será:

$$F_{A,B} = 9 \cdot 10^9\ \mathrm{N\,m^2\,C^{-2}} \cdot \frac{\frac{4}{9} \cdot 10^{-18}\ \mathrm{C^2}}{\frac{4}{9} \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m^2}} = 9 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N}$$

b) La fuerza resultante será:

$$F = \sqrt{16 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{N^2} + 81 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{N^2}} = 9{,}8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N}$$

$$\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{F_{AB}}{F_{CB}} = \frac{9 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N}}{4 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N}} = 2{,}25; \qquad \alpha = 66°$$

5. Los puntos *A, B* y *C* son los vértices de un triángulo equilátero de 2,0 m de lado. Dos cargas iguales positivas de $2{,}0 \cdot 10^{-6}$ C están en *A* y *B*.

a) **¿Cuál es el campo eléctrico en el punto *C*?**

b) **¿Cuál es el potencial en el punto *C*?**

c) **¿Cuánto trabajo se necesita para llevar una carga positiva de $5{,}0 \cdot 10^{-6}$ C desde el infinito hasta el punto *C* si se mantienen fijas las otras cargas?**

d) **Responde al apartado *c*) si la carga situada en *B* se sustituye por una carga de $-2{,}0 \cdot 10^{-6}$ C.**

Los módulos de E_1 y E_2 son iguales y valen:

$$|E_1| = |E_2| = K\,\frac{|Q|}{r^2} = 9 \cdot 10^9\ \mathrm{N\,m^2\,C^{-2}} \cdot \frac{2 \cdot 10^6\ \mathrm{C}}{4\ \mathrm{m}^2} = 4{,}5 \cdot 10^3\ \mathrm{N/C}$$

a) El campo resultante será:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2\,E_1 E_2 \cos\alpha} = \sqrt{2\,E_1^2 + 2\,E_1^2 \cos 60°} =$$

$$= \sqrt{3\,E_1^2} = 7{,}79 \cdot 10^3\ \mathrm{N/C}$$

b) El potencial en *C* será:

$$V_c = V_1 + V_2 = 2\,\frac{KQ}{\mathrm{r}} = \frac{2 \cdot 9 \cdot 10^9\ \mathrm{N\,m^2\,C^{-2}} \cdot 2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}}{2\ \mathrm{m}} = 1{,}8 \cdot 10^4\ \mathrm{V}$$

c) El trabajo viene dado por:

$$W = q\,(V_c - V_\infty) = 5{,}0 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C} \cdot (1{,}8 \cdot 10^4\ \mathrm{V} - 0) = 9{,}0 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{J}$$

d) En este caso el potencial sería:

$$V_c = K\,\frac{Q}{r} + K\,\frac{Q}{r} = \frac{K}{r}\,(2 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C} - 2 \cdot 10^{-6}) = 0$$

Por tanto, el trabajo sería cero.

6. ¿Puede ser cero el campo eléctrico total producido por dos cargas puntuales del mismo signo, separadas una distancia *d*, en algún punto? Si es así, indica dónde se encontraría dicho punto.

Es cero en el punto medio de la distancia que las separa. En el caso de que las cargas fueran diferentes, el punto estaría más próximo a la carga menor.

Sea *x* la distancia pedida. Si $Q_1 < Q_2$, se debe cumplir que:

$$K\,\frac{Q_1}{x^2} = K\,\frac{Q_2}{(d-x)^2}$$

Si $Q_1 = Q_2$, la expresión anterior se reduce a $(d - x)^2 = x^2$, de donde $x = \dfrac{d}{2}$.

7. Cuando se conectan los bornes de una batería de 400 V a dos láminas paralelas, separadas una distancia de 2 cm, aparece un campo eléctrico uniforme entre ellas. PAU

a) **¿Cuánto vale la intensidad de este campo?**

b) **¿Qué fuerza ejerce el campo anterior sobre un electrón, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C?**

a) La intensidad del campo se puede obtener a partir del potencial utilizando la relación:

$$E = \frac{V}{d}$$

$$E = \frac{400\ \mathrm{V}}{2{,}0 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}} = 2 \cdot 10^4\ \mathrm{N/C}$$

b) La fuerza ejercida por el campo vale:

$$F = q\,E = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \cdot 2 \cdot 10^4\ \mathrm{N/C} = 3{,}2 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{N}$$

8. ¿Qué velocidad adquirirá el electrón del problema anterior cuando haya recorrido 1 cm, si partió del reposo? ¿Cuánto tiempo necesita para recorrer esa distancia? (Masa del electrón, $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.)

En primer lugar hallamos la aceleración con que se mueve el electrón:

$$a = \frac{F}{M} = \frac{3{,}2 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{N}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}} = 3{,}5 \cdot 10^{15}\ \mathrm{m/s^2}$$

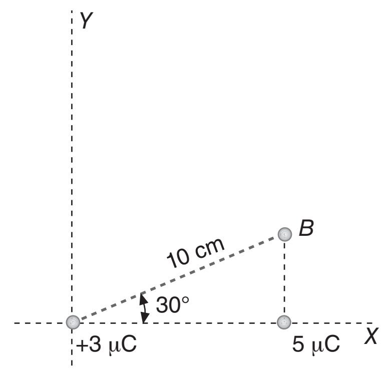
La velocidad adquirida por el electrón después de recorrer una distancia *x* viene dada por:

$$v = \sqrt{2\,a\,x} = \sqrt{2 \cdot 3{,}5 \cdot 10^{15}\ \mathrm{m/s} \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}} = 8{,}4 \cdot 10^6\ \mathrm{m/s}$$

El tiempo empleado será:

$$t = \frac{v}{a} = \frac{8{,}4 \cdot 10^6\ \mathrm{m/s}}{3{,}5 \cdot 10^{15}\ \mathrm{m/s^2}} = 2{,}4 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{s}$$

9. Calcula el campo eléctrico en el punto *B* de la figura:



Hallamos el campo de cada carga:

$$E_1 = 9 \cdot 10^9\ \mathrm{N\,m^2\,C^{-2}} \cdot \frac{3 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C}}{10^{-2}\ \mathrm{m}^2} = 2{,}7 \cdot 10^6\ \mathrm{N/C}$$

$$E_2 = 9 \cdot 10^9\ \mathrm{N\,m^2\,C^{-2}} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C}}{25 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2} = 1{,}8 \cdot 10^7\ \mathrm{N/C}$$

Hallamos las componentes cartesianas de E_1:

$$E_{1x} = 2{,}7 \cdot 10^6\ \mathrm{N/C} \cdot 0{,}86 = 2{,}3 \cdot 10^6\ \mathrm{N/C}$$

$$E_{1y} = 2{,}7 \cdot 10^6\ \mathrm{N/C} \cdot 0{,}5 = 1{,}4 \cdot 10^6\ \mathrm{N/C}$$

$$E_y = 1{,}4 \cdot 10^6\ \mathrm{N/C} - 1{,}8 \cdot 10^7\ \mathrm{N/C} = -1{,}7 \cdot 10^7\ \mathrm{N/C}$$

$$E_T = \sqrt{1{,}7^2 + 0{,}23^2} \cdot 10^7\ \mathrm{N/C} = 1{,}7 \cdot 10^7\ \mathrm{N/C}$$

10. Dos cargas iguales de $1{,}0 \cdot 10^{-12}$ C están situadas en dos puntos, *A* y *B*, separadas entre sí 5,0 cm. PAU

a) **Determina el módulo del campo eléctrico creado en un punto *M*, tal que las distancias *MA* y *MB* son 3,0 cm y 4,0 cm, respectivamente.**

b) **Calcula también el potencial electrostático.**

a) Campo en *M* debido a las cargas *A* y *B*:

$$E_A = 9 \cdot 10^9\ \mathrm{N\,m^2\,C^{-2}} \cdot \frac{10^{-12}\ \mathrm{C}}{9 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2} = 10\ \mathrm{N/C}$$

$$E_B = 9 \cdot 10^9\ \mathrm{N\,m^2\,C^{-2}} \cdot \frac{10^{-12}\ \mathrm{C}}{16 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2} = 5{,}625\ \mathrm{N/C}$$

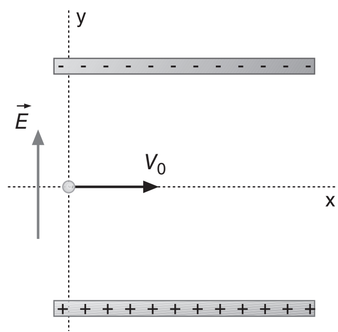
Campo resultante:

$$E = \sqrt{E_A^2 + E_B^2} = \sqrt{100 + 31{,}64} = 11{,}47 \text{ N/C}$$

b) El potencial electrostático creado en el punto *M* es:

$$V_M = V_A + V_B = 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{10^{-12}}{3 \cdot 10^{-2}} + \frac{10^{-12}}{4 \cdot 10^{-2}}\right) = 0{,}525 \text{ V}$$

11. Un electrón se lanza con una velocidad horizontal v_0 dentro de un campo eléctrico uniforme como indica la figura. Halla la ecuación de la trayectoria que describe.



El electrón está sometido a dos movimientos: uno uniforme a lo largo del eje *0x* y otro uniformemente acelerado según el eje *0y*, cuyas ecuaciones son:

$$x = v_0 t; \qquad y = \frac{1}{2} a t^2 = -\frac{1}{2} \frac{Ee}{2m_e} t^2$$

Se desprecian los efectos gravitatorios. La ecuación cartesiana de la trayectoria se obtiene eliminando el tiempo *t* en el sistema anterior, resultando la expresión:

$$y = -\frac{1}{2} \frac{eE}{m_e v_0^2} x^2$$

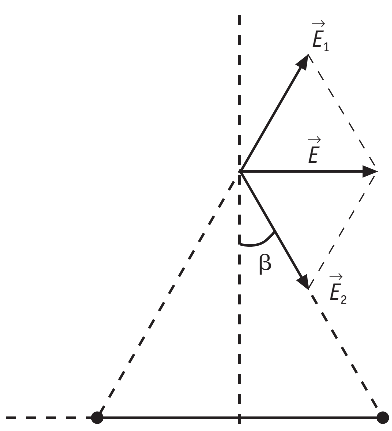
12. Dos cargas de $2{,}00 \cdot 10^{-6}$ C y $-2{,}00 \cdot 10^{-6}$ C distan entre sí 2,0 m.
PAU

Calcula:

a) **El campo resultante y el potencial en un punto de la mediatriz del segmento que las une, distante 5 m de cada carga.**

b) **Las mismas preguntas en el caso de que las dos cargas fueran positivas.**

a) Los campos E_1 y E_2 de la figura tienen el mismo módulo.



$$E_1 = E_2 = K\frac{Q}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2\text{C}^{-2} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{25 \text{ m}^2} = 0{,}72 \cdot 10^3 \text{ N/C}$$

y cuyas direcciones forman un ángulo:

$$E_1 E_2 = 180° - 2\beta = 156{,}93°$$

siendo sen $\beta = \frac{1}{5}$; $\qquad \beta = 11{,}537°$

El campo resultante se obtiene aplicando la expresión siguiente que se obtiene del Teorema del Coseno:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos 156{,}93°} = 288 \text{ N/C}$$

El potencial resultante es nulo: $\quad V = K\left(\frac{Q}{r} - \frac{Q}{r}\right) = 0$

b) Si las cargas son positivas, los campos E_1 y E_2 siguen siendo iguales, pero ahora las direcciones que tienen son las que se indican en la figura, formando un ángulo $2\beta = 23{,}07°$, y el campo resultante será:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos 23{,}07°} = 1{,}41 \cdot 10^3 \text{ N/C}$$

Valor del potencial:

$$V = 2K\frac{Q}{r} = 2 \cdot 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2\text{C}^{-2} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{5 \text{ m}} = 7{,}2 \cdot 10^3 \text{ V}$$

13. Tres cargas positivas e iguales de valor $q = 2{,}0$ microculombios cada una se encuentran situadas en tres de los vértices de un cuadrado de lado 10 cm. Determina:
PAU

a) **El campo eléctrico en el centro del cuadrado.**

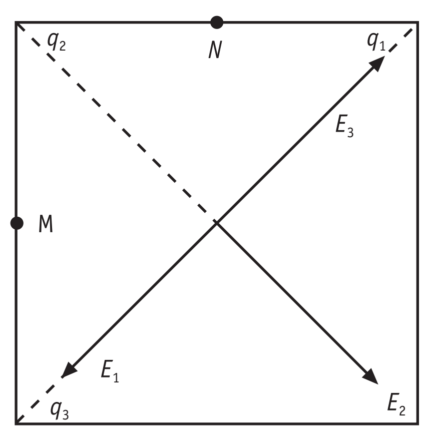
b) **Los potenciales en los puntos medios de los lados del cuadrado que unen las cargas y el trabajo realizado al desplazarse la unidad de carga entre dichos puntos.**

a) De acuerdo con la figura que se muestra a continuación, los campos E_1, E_2 y E_3 tienen el mismo módulo. Por tanto, el campo resultante en el centro del cuadrado es igual a E_2, ya que E_1 y E_3 se anulan mutuamente. Se cumple, pues, que:

$$E_T = E_2 = K\frac{q_2}{r^2}$$

siendo: $\qquad r^2 = \frac{l^2}{2} = 0{,}5 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$

$$E_T = 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2\text{C}^{-2} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{0{,}5 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2} = 3{,}6 \cdot 10^6 \text{ N/C}$$



b) El potencial resultante es $V = V_1 + V_2 + V_3$ en cada uno de los puntos M y N.

$$V_M = V_1 + V_2 + V_3 = Kq\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right)$$

siendo $\quad r_1 = \sqrt{l^2 + \frac{l^2}{4}} = \sqrt{5}\,\frac{l}{2} = 1{,}118 \cdot 10^{-1}$ m

$$r_2 = r_3 = \frac{l}{2} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Por tanto, el potencial será:

$$V_M = 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2\text{C}^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-6}\text{ C} \cdot \left(\frac{1}{5 \cdot 10^{-2}\text{ m}} + \frac{1}{5 \cdot 10^{-2}\text{ m}} + \frac{1}{11{,}18 \cdot 10^{-2}\text{ m}}\right) = 8{,}8 \cdot 10^5 \text{ V}$$

En el punto N se cumple:

$$r_1 = r_2 = \frac{l}{2}; \qquad r_3 = \sqrt{\frac{5}{4}}\, l$$

por tanto, $V_M = V_N$. El trabajo realizado será cero:

$$W = q\,(V_M - V_N) = 0$$

14. Se tienen dos cargas puntuales sobre el eje *Ox*, q_1 = = –0,20 · 10⁻⁶ C está situada a la derecha del origen y dista de él 1 m; q_2 = +0,40 · 10⁻⁶ C está a la izquierda del origen y dista de él 2 m.

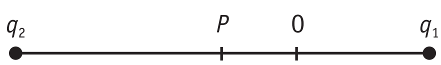
PAU

***a)* ¿En qué puntos del eje *Ox* el potencial creado por las cargas es nulo?**

***b)* Si se coloca en el origen una carga $q = +0{,}40 \cdot 10^{-6}$ C, determina la fuerza ejercida sobre ella por las cargas q_1 y q_2.**

Sea P el punto que se pide, situado sobre el eje Ox y a la derecha de q_2. El potencial creado por las cargas en ese punto viene dado por la expresión:

$$V = K\frac{q_1}{r_1} + K\frac{q_2}{r_2} = 0; \qquad \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} = 0$$



Si $|q_2| = 2\,|q_1|$, se debe cumplir que $|r_2| = 2\,|r_1|$.

a) Si el punto está entre q_2 y q_1, se debe cumplir también $|r_1| + |r_2| = 3$ m; del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} r_2 = 2\,r_1 \\ r_1 + r_2 = 3 \text{ m} \end{array}\right\} \Rightarrow r_1 = 1 \text{ m}$$

Luego el origen de coordenadas cumple la condición del problema $V = 0$.

b) Si el punto está a la derecha de q_1, se debe cumplir:

$$\left.\begin{array}{l} r_2 = 2\,r_1 \\ r_2 = r_1 + 3 \end{array}\right\} \text{ de donde } \quad r_1 = 3 \text{ m}$$

El punto estará a la derecha del origen y distante 4 m de él.

La fuerza resultante sería:

$$|F| = |F_1| + |F_2| =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2\text{C}^{-2} \cdot \left(\frac{0{,}2 \cdot 10^{-6}\text{ C} \cdot 0{,}4 \cdot 10^{-6}\text{ C}}{1 \text{ m}^2} + \frac{0{,}4 - 10^{-6}\text{ C} \cdot 0{,}4 \cdot 10^{-6}\text{ C}}{2^2 \text{ m}^2}\right) = 108 \cdot 10^{-5} \text{ N}$$

En forma vectorial, $\vec{F} = 108 \cdot 10^{-5}\,\vec{u}_x$ N.

15. Dos cargas eléctricas puntuales de 2 · 10⁻⁶ C y –2 · 10⁻⁶ C se encuentran situadas en el plano *xy*, en los puntos (0, 3) y (0, –3), respectivamente; las distancias están en metros.

PAU

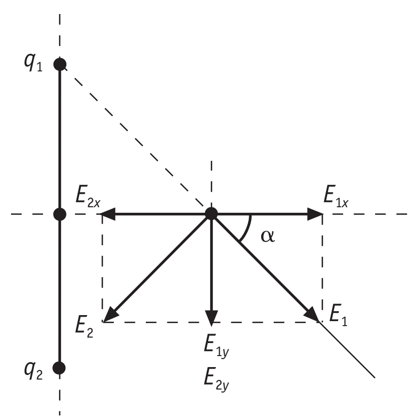
***a)* ¿Cuáles son los valores de la intensidad de campo en el punto (0, 6) y en el punto (4, 0)?**

***b)* ¿Cuál es el trabajo realizado por el campo sobre un protón cuando se desplaza desde el punto (0, 6) hasta el punto (4, 0)? ($q_p = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.)**

a) Campo eléctrico en el punto (0, 6):

$$\vec{E} = K\frac{q_1}{r_1^2}\,\vec{u}_y + K\frac{q_2}{r_2^2}\,\vec{u}_y =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2\text{C}^{-2}\,\frac{10^{-6}\text{ C}}{9 \text{ m}^2} \cdot \left(2 - \frac{2}{9}\right) = 1{,}8 \,.\, 10^3\,\vec{u}_y \text{ N/C}$$



Campo eléctrico en el punto (4, 0).

De la figura se deduce que $|E_2| = |E_1|$; por tanto, el campo resultante no tiene componente E_x y toma el valor:

$$\vec{E} = -|E_{1y}|\,\vec{u}_y - |E_{2y}|\,\vec{u}_y = -432\,\vec{u}_y - 432\,\vec{u}_y = -\,8{,}7 \cdot 10^2\,\vec{u}_y \text{ N/C}$$

ya que se cumple que:

$$E_{1y} = E_{2y} = 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2\text{C}^{-2} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}\text{ C}}{25 \text{ m}^2} \cdot 0{,}6 = 432 \text{ N/C}$$

b) El trabajo es igual a «menos la variación de la energía potencial»: $W = -q\,[V\,(4, 0) - V\,(0, 6)]$, siendo:

$$V\,(0, 6) = K\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}\right) = 4\,000 \text{ V}$$

$$V\,(4, 0) = 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2\text{C}^{-2} \cdot \left(\frac{2 \cdot 10^{-6}\text{ C}}{5 \text{ m}} + \frac{-2 \cdot 10^{-6}\text{ C}}{5 \text{ m}}\right) = 0$$

$$W = -1{,}6 \cdot 10^{-19}\text{ C} \cdot (0 - 4\,000 \text{ V}) = 6{,}4 \cdot 10^{-16} \text{ J}$$

16. Una esfera pequeña de 0,5 g cuelga de un hilo dentro de un campo eléctrico de intensidad $E = 800\ \vec{u}_x$ N/C. Si la esfera es atraída por el campo hasta formar un ángulo de 30° con la posición vertical, calcula el valor de la carga.

En la posición de equilibrio las fuerzas gravitatoria y eléctrica se equilibran.

Si descomponemos la fuerzas en la dirección de las componentes cartesianas, tenemos que:

$T_x = F_e$

$T_y = P = mg$

de donde podemos deducir que:

T sen 30° $= qE$

T cos 30° $= mg$

Despejando las incógnitas resulta:

$$q = \frac{mg}{E}\ \text{tg } 30° = \frac{5 \cdot 10^{-4}\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2}{800\ \text{N/C}} \cdot \text{tg } 30° = 3{,}53 \cdot 10^{-6}\ \text{C}$$

17. Un electrón penetra en un campo eléctrico uniforme normalmente a sus líneas de fuerza con una velocidad $v = 10^4$ m/s. La intensidad del campo es 10^5 V/m.

Calcula:

***a)* La aceleración que experimenta el electrón.**

***b)* La ecuación de la trayectoria que sigue el electrón.**

a) La fuerza sobre el electrón en el interior de un campo eléctrico es $F = qE$.

Por otra parte, se cumple la Segunda Ley de Newton, $F = ma$, así que:

$F = qE = m_e a$

$$a = \frac{qE}{m_e} = \frac{-1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 10^5\ \text{V/M}}{9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}} = 1{,}76 \cdot 10^{16}\ \text{m/s}^2$$

La dirección de la aceleración es la del campo, que suponemos la del eje $0y$.

b) El electrón está sometido a dos movimientos: uno uniforme a lo largo del eje $0x$ y otro uniformemente acelerado según el eje $0y$, cuyas ecuaciones son:

$x = v_0 t = 10^4\ t$

$$y = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}76 \cdot 10^{16}\ t^2$$

Despreciamos los efectos gravitatorios. Eliminando el tiempo de las expresiones anteriores obtenemos la ecuación cartesiana de la trayectoria:

$y = 8{,}8 \cdot 10^7\ x^2$

18. Una partícula cargada se desplaza en la dirección de un campo eléctrico de forma que su energía potencial aumenta. ¿Qué signo tiene la carga? ¿En qué sentido se mueve?

Si la energía potencial aumenta, quiere decir que el desplazamiento se realiza en sentido contrario al campo; para que esto ocurra la carga tiene que ser negativa.

19. *a)* ¿Es correcto hablar de la energía potencial de un electrón?

***b)* ¿Es correcto hablar de energía potencial de un punto del espacio?**

a) No. La energía potencial va asociada siempre a un sistema formado por dos cargas. Solamente tiene sentido físico la variación de la energía potencial entre dos puntos.

b) Es correcto hablar de energía potencial en un punto solamente si se elige arbitrariamente un punto del campo como punto de referencia, al que se le asigna energía potencial cero.

20. Si la diferencia de potencial entre dos puntos es cero, ¿habrá necesariamente un desplazamiento entre ambos puntos donde E sea cero en todo momento?

No. Basta que sea cero el producto escalar $\vec{E} \cdot d\vec{r}$. Esto ocurre cuando el desplazamiento es perpendicular al campo.

21. Un campo uniforme vale 6 000 N/C. Un protón ($q = = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg) se libera en la placa positiva. ¿Con qué velocidad llega a la placa negativa, si la separación entre placas es 0,20 cm?

La fuerza sobre el protón será:

$$F = qE = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 6 \cdot 10^3\ \text{N/C} = 9{,}6 \cdot 10^{-16}\ \text{N}$$

Por tanto, experimentará una aceleración:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{9{,}6 \cdot 10^{-16}\ \text{N}}{1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}} = 5{,}7 \cdot 10^{11}\ \text{m/s}^2$$

Para hallar la velocidad aplicamos la ecuación:

$$v^2 = v_0^2 + 2ax = 2 \cdot 5{,}7 \cdot 10^{11}\ \text{m/s}^2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$$

de donde $v = 4{,}8 \cdot 10^4$ m/s.

22. Una esferita que porta una carga de $+25 \cdot 10^{-9}$ C está sostenida por un hilo entre dos placas paralelas horizontales que se encuentran a 3,0 cm de distancia entre sí.

***a)* Cuando la diferencia de potencial entre las placas es de 6 000 V, la tensión del hilo es cero. ¿Cuál es la masa de la esfera?**

***b)* ¿Cuál es la tensión del hilo cuando se invierte la polaridad de las placas?**

a) Si el hilo no está tenso, se cumple que:

$$Eq = mg; \qquad \text{o} \qquad \frac{V}{d} q = mg$$

de donde:

$$m = \frac{Vq}{dg} = \frac{6\,000\ \text{V} \cdot 25 \cdot 10^{-9}\ \text{C}}{3 \cdot 10^{-2}} = 10^{-2}\ \text{N}$$

b) Cuando existe tensión, se cumple:

$$T = mg + \frac{Vq}{d} =$$

$$= 50 \cdot 10^{-4}\ \text{N} + \frac{6\,000\ \text{V} \cdot 25 \cdot 10^{-9}\ \text{C}}{3 \cdot 10^{-2}\ \text{m}} = 10^{-2}\ \text{kg}$$

23. Una carga positiva de 6,0 microculombios se encuentra en el origen de coordenadas. Calcula:

***a)* Cuál es el potencial a una distancia de 4 m.**

***b)* Qué trabajo tenemos que hacer para traer otra carga positiva de 2,0 microculombios desde el infinito hasta esa distancia.**

***c)* ¿Cuál será la energía potencial de esa carga en dicha posición?**

a) En el punto que se indica, el potencial toma el valor:

$$V = K\frac{q}{r} = 9 \cdot 10^9\ \text{N m}^2\,\text{C}^{-2} \cdot \frac{6 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{4\ \text{m}} = 1{,}35 \cdot 10^4\ \text{V}$$

b) Teniendo en cuenta que el potencial representa el trabajo por unidad de carga, se cumple:

$$W = q\,V = 2 \cdot 10^{-6}\ \text{C} \cdot 1{,}35 \cdot 10^4\ \text{V} = 2{,}7 \cdot 10^{-2}\ \text{J}$$

c) La energía potencial vale:

$$E_p = K\frac{Qq}{r} =$$

$$= 9 \cdot 10^9\ \text{N m}^2\,\text{C}^{-2} \cdot \frac{6 \cdot 10^{-6}\ \text{C} \cdot 2 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{4\ \text{m}} = 2{,}7 \cdot 10^{-2}\ \text{J}$$

24. El potencial eléctrico a una cierta distancia de una carga puntual es 600 V y el campo eléctrico es 200 N/C.

a) ¿Cuál es la distancia a la carga puntual?

b) ¿Cuál es el valor de la carga?

a) De las definiciones de potencial y de intensidad de campo eléctrico se deduce el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} V &= K\frac{Q}{r} \\ E &= K\frac{Q}{r^2} \end{aligned}\right\} \text{ de donde } V = E\,r; \qquad r = \frac{V}{E} = \frac{600\ \text{V}}{200\ \text{N/C}} = 3\ \text{m}$$

b) La carga será:

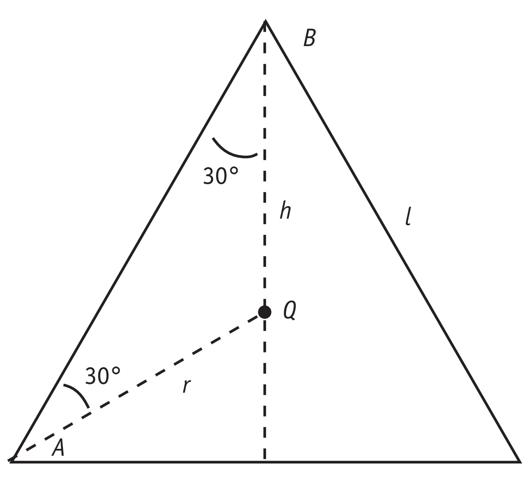
$$Q = \frac{V r}{K} = \frac{600\ \text{V} \cdot 3\ \text{m}}{9 \cdot 10^9\ \text{N m}^2\,\text{C}^{-2}} = 2 \cdot 10^{-7}\ \text{C}$$

25. En el centro de un triángulo equilátero de 4 m de altura se coloca una carga de 10^{-4} C. PAU

Calcula:

a) La diferencia de potencial entre dos de los vértices del triángulo.

b) Si se coloca otra carga igual en uno de los vértices, ¿cuánto vale la energía potencial del sistema?



a) De la figura se deduce que la diferencia de potencial entre *A* y *B* vale:

$$V_A - V_B = KQ\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) = 0$$

ya que $r_A = r_B$. De la figura también se deduce:

$$l = \frac{h}{\cos 30°} = 4{,}62\ \text{m}$$

$$\frac{l}{\text{sen } 120°} = \frac{r}{\text{sen } 30°} \Rightarrow r = \frac{l \text{ sen } 30°}{\text{sen } 120°} = 2{,}68\ \text{m}$$

por tanto, la energía potencial pedida será:

$$E_p = K\frac{Qq}{r} = \frac{9 \cdot 10^9\ \text{N m}^2\,\text{C}^{-2} \cdot 10^{-8}\ \text{C}^2}{2{,}68\ \text{m}} = 34\ \text{J}$$

26. Dos esferas metálicas de 6,0 y 9,0 cm de radio se cargan a $1{,}0 \cdot 10^{-6}$ C cada una, y luego se unen con un hilo conductor de capacidad despreciable. PAU

Calcula:

a) El potencial de cada esfera después de la unión.

b) La carga de cada esfera después de la unión.

a) El potencial de una esfera cargada viene dado por $V = K\frac{Q}{r}$.

Al poner las esferas en contacto, pasará carga de la que tiene mayor potencial (en este caso la esfera más pequeña) a la que tiene menor potencial hasta que se igualen los potenciales de ambas esferas.

Si llamamos *q* a la carga que circula, se cumplirá:

$$K\frac{Q - q}{r_1} = K\frac{Q + q}{r_2}$$

de donde se deduce el valor de *q*:

$$q = \frac{Q\,(r_2 - r_1)}{r_1 + r_2} = \frac{1}{5} \cdot 10^{-6}\ \text{C} = 0{,}2 \cdot 10^{-6}\ \text{C}$$

Por tanto, el potencial común de cada esfera sería:

$$V = 9 \cdot 10^9\ \text{N m}^2\,\text{C}^{-2} \cdot \frac{10^{-6}\ \text{C} - 0{,}2 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{6 \cdot 10^{-2}\ \text{m}} = 1{,}2 \cdot 10^5\ \text{V}$$

b) Carga de las esferas después de la unión:

Primera esfera:

$$Q_1 = Q - q = 10^{-6}\ \text{C} - 0{,}2 \cdot 10^{-6}\ \text{C} = 0{,}8 \cdot 10^{-6}\ \text{C}$$

Segunda esfera:

$$Q_2 = Q + q = 10^{-6}\ \text{C} + 0{,}2 \cdot 10^{-6}\ \text{C} = 1{,}2 \cdot 10^{-6}\ \text{C}$$

Observa cómo la carga neta se conserva.

27. Un electrón es lanzado con una velocidad de $2{,}0 \cdot 10^6$ m/s paralelamente a las líneas de un campo eléctrico uniforme 200 V/m. Determina: PAU

a) La distancia que ha recorrido el electrón cuando su velocidad se ha reducido a $0{,}50 \cdot 10^6$ m/s.

b) La variación de la energía potencial que ha experimentado el electrón en ese recorrido.

a) Cuando el electrón se mueve en sentido contrario al campo es frenado por este con una fuerza $F = Eq$. El trabajo realizado por esta fuerza es igual a la disminución de la energía cinética:

$$E q x = \frac{1}{2}\, m\, (v_0^2 - v_f^2)$$

$$x = \frac{\frac{1}{2} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot (4 - 0{,}25) \cdot 10^{12}\ \text{m}^2/\text{s}^2}{200\ \text{V/m} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}} = 5{,}3 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$$

b) La variación de la energía potencial coincide con la disminución de la energía cinética por ser conservativo el campo eléctrico.

$$\Delta E_p = \frac{1}{2}\, m\, (v_0^2 - v_f^2) = \frac{1}{2} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 3{,}75 \cdot 10^{12}\ \text{m}^2/\text{s}^2 =$$

$$= 17{,}0 \cdot 10^{-19}\ \text{J} = 10{,}6\ \text{eV}$$

28. Si tienes tres cargas de 1 μC, –2 μC y 1 μC situadas respectivamente en los puntos (0, 1), (0, 0) y (1, 0), donde las distancias se miden en metros, calcula:

***a)* El campo eléctrico y el potencial en el punto (1, 1).**

***b)* El trabajo realizado al trasladar una carga de 2 μC desde el centro del cuadrado que forman los puntos hasta el vértice (1, 1).**

a) Calculamos el campo eléctrico creado por cada una de las cargas en el punto (1,1):

$$\vec{E}_1 = K\frac{q_1}{r_1^2}\,\vec{u}_x = 9 \cdot 10^9\ \text{Nm}^2\ \text{C}^{-2} \cdot \frac{1 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{1^2\ \text{m}^2}\,\vec{u}_x = 9 \cdot 10^3\,\vec{u}_x\ \text{N/C}$$

$$\vec{E}_2 = K\frac{q_2}{r_2^2}\,\vec{u}_y = 9 \cdot 10^9\ \text{Nm}^2\text{C}^{-2} \cdot \frac{1 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{1^2\ \text{m}^2}\,\vec{u}_y = 9 \cdot 10^3\,\vec{u}_y\ \text{N/C}$$

$$\vec{E}_3 = K\frac{q_3}{r_3^2}\,(\cos\alpha\,\vec{u}_x + \text{sen}\,\alpha\,\vec{u}_y) =$$

$$= 9 \cdot 10^9\ \text{Nm}^2\ \text{C}^{-2} \cdot \frac{-2 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{(1^2 + 1^2)\ \text{m}^2}\,(\cos 45°\ \vec{u}_x + \text{sen}\ 45°\ \vec{u}_y) =$$

$$= -9 \cdot 10^9\ \text{Nm}^2\ \text{C}^{-2} \cdot \frac{10^{-6}\ \text{C}}{1\ \text{m}^2}\ (\cos 45°\ \vec{u}_x + \text{sen}\ 45°\ \vec{u}_y) =$$

$$= -9 \cdot 10^3 \cdot (\sqrt{2}\ \vec{u}_x + \sqrt{2}\ \vec{u}_y)$$

Según el Principio de Superposición, el campo en el punto (1,1) es la suma de los tres campos creados por las tres cargas, así:

$$\vec{E}_{(1,1)} = 9 \cdot 10^3\ (\vec{u}_x + \vec{u}_y - \sqrt{2}\ \vec{u}_x - \sqrt{2}\ \vec{u}_y) =$$

$$= 9 \cdot 10^3\ (1 - \sqrt{2})\vec{u}_x + 9 \cdot 10^3\ (1 - \sqrt{2})\vec{u}_y\ \text{N/C}$$

El potencial se calcula de manera análoga:

$$V_1 = K\frac{q_1}{r_1} = 9 \cdot 10^9\ \text{Nm}^2\ \text{C}^{-2} \cdot \frac{1 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{1\ \text{m}} = 9 \cdot 10^3\ \text{V}$$

$$V_2 = K\frac{q_2}{r_2} = 9 \cdot 10^9\ \text{Nm}^2\ \text{C}^{-2} \cdot \frac{1 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{1\ \text{m}} = 9 \cdot 10^3\ \text{V}$$

$$V_3 = K\frac{q_3}{r_3} = 9 \cdot 10^9\ \text{Nm}^2\ \text{C}^{-2} \cdot \frac{-2 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{\sqrt{2}\ \text{m}} = -9 \cdot 10^3 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}}\ \text{V}$$

$$V_{(1,1)} = V_1 + V_2 + V_3 = 5{,}3 \cdot 10_3\ \text{V}$$

b) El desplazamiento se realiza en sentido contrario al campo; por tanto, el potencial aumenta, $V_{(1/2,1/2)} > V_{(1,1)}$, y el trabajo realizado será positivo:

$$W = (V_{(1/2,1/2)} - V_{(1,1)})\ q > 0$$

El potencial en el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ es:

$$V_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} = V_1 + V_2 + V_3 = K\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3}\right) =$$

$$= 9 \cdot 10^9\ \text{Nm}^2\ \text{C}^{-2} \cdot \left(\frac{10^{-6}\ \text{C}}{1/2\ \text{m}} + \frac{10^{-6}\ \text{C}}{1/2\ \text{m}} + \frac{2 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{1/\sqrt{2}\ \text{m}}\right) =$$

$$= 10{,}54 \cdot 10^3\ \text{V}$$

Y el trabajo realizado es:

$$W = (10{,}54 \cdot 10^3\ \text{V} - 5{,}3 \cdot 10^3\ \text{V}) \cdot 2 \cdot 10^{-6}\ \text{C} = 10{,}6 \cdot 10^{-3}\ \text{J}$$

29. Una carga positiva de 6,0 μC se encuentra en el origen de coordenadas.

Calcula:

***a)* ¿Cuál es el potencial a una distancia de 4 m?**

***b)* ¿Qué trabajo tenemos que hacer para traer otra carga positiva de 2,0 μC desde el infinito hasta esa distancia?**

***c)* ¿Cuál será la energía potencial de esa carga en dicha posición?**

a) En el punto que se indica, el potencial toma el valor:

$$V = K\,\frac{q}{r} = 9 \cdot 10^9\ \text{N m}^2\text{C}^{-2} \cdot \frac{6\ .\ 10^{-6}\ \text{C}}{4\ \text{m}} = 1{,}35 \cdot 10^4\ \text{V}$$

b) Teniendo en cuenta que el potencial representa el trabajo por unidad de carga, se cumple:

$$W = q\,V = 2 \cdot 10^{-6}\ \text{C} \cdot 1{,}35 \cdot 10^4\ \text{V} = 2{,}7 \cdot 10^{-2}\ \text{J}$$

c) La energía potencial vale:

$$E_p = K\,\frac{Q\,q}{r} = 9 \cdot 10^9\ \text{N m}^2\text{C}^{-2} \cdot \frac{6 \cdot 10^{-6}\ \text{C} \cdot 2 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{4\ \text{m}} =$$

$$= 2{,}7 \cdot 10^{-2}\ \text{J}$$

Actividades

1. Indica si es falso o verdadero:

a) Un electrón en reposo crea un campo magnético.

b) Un electrón nunca crea un campo magnético.

c) Un electrón en movimiento crea dos campos: uno eléctrico y otro magnético.

d) Un electrón no crea ningún tipo de campo.

a) Falso. Porque un electrón en reposo solamente crea un campo eléctrico.

b) Falso. Porque un electrón crea un campo magnético si está en movimiento.

c) Verdadero. Como consecuencia de las afirmaciones anteriores.

d) Falso.

2. Un haz de protones se desvía lateralmente.

a) ¿Podría ser producida esta desviación por un campo eléctrico? ¿Por un campo magnético?

b) Si la respuesta de las dos preguntas anteriores es afirmativa, ¿cómo podrías averiguar cuál de los dos campos es el responsable de la desviación?

a) Esa desviación puede ser producida por un campo eléctrico si la dirección de este campo no coincide con la dirección del movimiento.

También puede ser producida por un campo magnético.

b) La diferencia entre los dos campos reside en la velocidad de la partícula: el campo magnético no actúa sobre cargas en reposo. Por tanto, para averiguar qué campo produce la desviación, basta colocar una carga en reposo (un péndulo eléctrico, por ejemplo). Si esa carga no se desplaza, el causante de la desviación es el campo magnético. Una manera más sencilla de averiguar de qué campo se trata es utilizando una brújula: si en esa región del espacio la brújula no cambia de orientación, diremos que el causante de la desviación es un campo eléctrico.

3. Cuando un imán de barra se rompe en varios pedazos, cada uno de estos se convierte en un imán con su polo Norte y su polo Sur. Explica este hecho utilizando la teoría de los dominios magnéticos.

La barra imantada está formada por dominios magnéticos con la misma orientación. Por tanto, si la barra se rompe, cada pedazo estará formado por dominios magnéticos con la misma orientación que tenía antes.

4. Si golpeas un imán con un martillo, el imán pierde su magnetismo. Lo mismo ocurre si lo calientas. Intenta explicar estos hechos con la teoría de los dominios magnéticos.

Al golpear o al calentar el imán, el movimiento de agitación de las moléculas hace que los dominios magnéticos pierdan la orientación común que poseían. En consecuencia, los dipolos magnéticos quedan desordenados y no originan un campo magnético resultante al exterior.

5. ¿Qué explicación física tiene el hecho de que al someter una barra de acero a un campo magnético esta se convierta en un imán permanente?

Los materiales ferromagnéticos se clasifican en magnéticamente «blandos» y magnéticamente «duros», dependiendo del tiempo que necesitan para que la magnetización desaparezca.

El hierro es magnéticamente blando, pues aunque puede magnetizarse con facilidad, su magnetización desaparece casi inmediatamente después de retirar el campo magnético exterior. En cambio, el acero ofrece más inercia a la orientación de los dominios magnéticos. Por esto, es una sustancia magnéticamente dura, puesto que su magnetización, debida a la citada inercia, permanece prácticamente sin cambios durante años.

6. De los tres vectores de la ecuación $\vec{F} = q\,(\vec{v} \times \vec{B})$:

a) ¿Qué pares son siempre perpendiculares?

b) ¿Cuáles forman ángulos cualesquiera entre sí?

c) ¿En qué caso uno cualquiera de los tres vectores es perpendicular a los otros dos?

a) De la definición de producto vectorial, se deduce que el vector $\vec{F}$ es perpendicular al plano definido por los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$. Por tanto, los pares de vectores $\vec{F}$, $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares entre sí. Es decir:

$$\vec{F} \perp \vec{v}, \qquad \vec{F} \perp \vec{B}$$

b) Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$ pueden formar un ángulo cualquiera.

c) En el caso particular de que $\vec{v} \perp \vec{B}$, entonces cualquiera de los tres vectores es perpendicular a los otros dos.

7. Un electrón se mueve con una velocidad *v* paralela a la dirección de un campo magnético. ¿Qué fuerza experimenta este electrón?

Cuando una carga se mueve en un campo magnético, está sometida a una fuerza definida por la Ley de Lorentz: $\vec{F} = q\,(\vec{v} \times \vec{B})$. Si la velocidad es paralela a la dirección del campo magnético el producto vectorial $\vec{v} \times \vec{B}$ es nulo. Por tanto, el electrón no estaría sometido a ninguna fuerza.

8. En un instante dado, un protón se mueve sobre el eje *Ox* en sentido positivo, en una región en que existe un campo magnético en sentido negativo del eje *Oz*. ¿Cuál es la dirección y sentido de la fuerza magnética?

Según el producto vectorial $\vec{F} = q\,(\vec{v} \times \vec{B})$, la fuerza tiene que ser perpendicular al plano $\vec{v}$, $\vec{B}$. En este caso, el plano definido por $\vec{v}$, $\vec{B}$ es el plano *xz*. Por tanto, la fuerza magnética tiene la dirección del eje *Oy*.

9. Se proyectan dos partículas cargadas hacia una región en la que se tiene un campo magnético perpendicular a sus velocidades. Si las cargas se desvían en sentidos opuestos, ¿qué se puede decir acerca de ellas?

Las dos partículas se proyectan en la misma dirección y sentido, es decir, $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son paralelos y el campo magnético es el mismo para las dos, para que se cumpla que ang. $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 18°$:

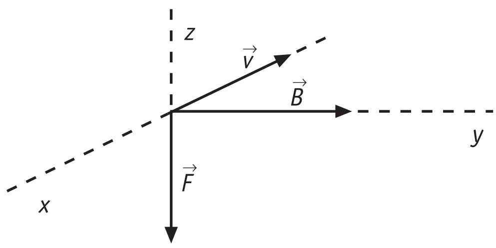
$$-\vec{F}_1 = q\,(\vec{v}_1 \times \vec{B})$$

$$+\vec{F}_2 = q\,(\vec{v}_2 \times \vec{B})$$

Para que se cumpla el sistema anterior, las cargas han de ser de signo opuesto.

10. Un protón se mueve a lo largo del eje *Ox* en sentido negativo, y experimenta una desviación de origen magnético en la dirección del eje *y* en sentido positivo. ¿Cuál es la dirección y sentido del campo magnético en esa región del espacio?

Si aplicamos la regla de la mano derecha, la fuerza definida por $\vec{F} = q\,(\vec{v} \times \vec{B})$ tiene la dirección del eje *0z* y en sentido negativo, como se indica en la figura.



11. Si estás sentado en una habitación mirando de frente hacia una ventana, y un electrón penetra en la habitación por dicha ventana perpendicularmente a ella y es desviado hacia tu izquierda, ¿cuál es la dirección y sentido de la inducción magnética que existe en la habitación?

Para un electrón, los vectores fuerza, campo magnético y velocidad están relacionados por el producto vectorial $\vec{F} = -q\,(\vec{v} \times \vec{B})$, de donde se deduce que el vector campo $\vec{B}$ es perpendicular al suelo con el sentido techo-suelo.

12. Dos cargas eléctricas se mueven en el mismo sentido, de direcciones paralelas. ¿Cómo son las interacciones eléctricas y magnéticas entre ellas?

***a)* Son del mismo signo.**

***b)* Son de distinto signo.**

a) Si las cargas son del mismo signo:

La interacción eléctrica es de repulsión, de acuerdo con la Ley de Coulomb.

La interacción electromagnética sería de atracción. El campo magnético originado por las dos cargas sería perpendicular al plano del papel pero con sentido contrario, y aplicando la regla de la mano derecha, las fuerzas están dirigidas hacia las cargas.

b) Si las cargas son de signo contrario, la interacción sería de atracción, como se deduce de la Ley de Coulomb.

En cambio, la interacción electromagnética sería de repulsión.

13. Un protón y una partícula alfa se mueven en el mismo campo magnético y describen órbitas idénticas. ¿Qué relación existe entre sus velocidades?

PAU

Datos: $m_\alpha = 4\, m_p$; $q_\alpha = 2\, q_p$.

Tanto el protón como la partícula alfa están sometidos a una fuerza magnética que origina el movimiento circular. Por tanto, se cumple para ambas partículas:

$$q\,v\,B = m\,\frac{v^2}{r},$$

de donde:

$$v = \frac{q\,B\,r}{m}$$

Por tanto, la velocidad de cada partícula depende de la masa y de la carga respectivas.

$$v_p = \frac{q_p\,B\,r}{m_p}; \qquad v_\alpha = \frac{q_\alpha\,B\,r}{m_\alpha}$$

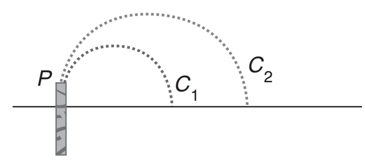
$$\frac{v_p}{v_\alpha} = \frac{m_\alpha\,q_p}{m_p\,q_\alpha} = \frac{4\,m_p\,q_p}{m_p\,2\,q_p} = 2\,; \qquad v_p = 2\,v_\alpha$$

El protón se moverá con doble velocidad que la partícula alfa.

14. Un protón y una partícula alfa se disparan desde el mismo punto *P* de la figura siguiente con la misma velocidad en un campo magnético uniforme de intensidad *B*.

***a)* ¿Qué partícula describe mayor órbita?**

***b)* ¿Qué relación existe entre sus radios?**



Aplicamos la expresión $q\,v\,B = m\,\dfrac{v^2}{r}$ y obtenemos el radio de la órbita que describen las partículas.

$$r = \frac{m\,v}{q\,B}$$

Para el protón: $r_p = \dfrac{m_p\,v}{q_p\,B}$

Para la partícula alfa: $r_\alpha = \dfrac{m_\alpha\,v}{q_\alpha\,B}$

$$\frac{r_p}{r_\alpha} = \frac{m_p\,q_\alpha}{m_\alpha\,q_p} = \frac{m_p\,2\,p_q}{4\,m_p\,q_p} = \frac{1}{2}\,;\; r_\alpha = 2\,r_p$$

Por tanto, la órbita descrita por la partícula alfa tiene doble radio que la órbita descrita por el protón.

Electromagnetismo en la cocina

Cuestiones

1. ¿Cuál es la fuerza que desvía los electrones del ánodo del microondas?:

a) Eléctrica;

b) magnética;

***c)* electromagnética.**

2. ¿Cómo se llama la fuerza que actúa sobre los electrones en movimiento del microondas?:

a) Foucault;

***b)* de Lorentz;**

c) de Ampère.

Cuestiones y problemas

1. Un electrón se mueve a una velocidad de 5 · 10⁵ m/s con un ángulo de 60° respecto de un campo magnético. Si el electrón experimenta una fuerza de 3,2 · 10⁻¹⁸ N, calcula la intensidad del campo.

Datos: q_e = 1,6 · 10^{-19} C.

El módulo de la fuerza de Lorentz es $F = qvB$ sen α, de donde se obtiene el valor de la inducción magnética o intensidad del campo:

$$B = \frac{F}{qv \text{ sen } \alpha} = \frac{3{,}2 \cdot 10^{-18}\text{ N}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\text{ C} \cdot 5 \cdot 10^5\text{ m/s} \cdot 0{,}866} = 4{,}6 \cdot 10^{-5}\text{ T}$$

2. PAU **¿Qué fuerza ejerce un campo magnético uniforme *B* = 0,25 T sobre un electrón que se mueve con una velocidad en sentido paralelo al campo de 2,0 · 10³ m/s? ¿Qué aceleración experimenta el electrón si se mueve perpendicularmente al campo magnético?**

La fuerza que ejerce un campo magnético sobre una carga móvil viene dada por $F = qvB$ sen α, siendo α el ángulo formado por los vectores $\vec{v}$, $\vec{B}$.

Si el electrón se mueve paralelamente al campo, la fuerza magnética será nula. Si el electrón se mueve perpendicularmente al campo magnético, la fuerza que actúa sobre el electrón será máxima y la aceleración originada tomará el valor:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{qvB}{m} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\text{ C} \cdot 2{,}0 \cdot 10^3\text{ m/s} \cdot 0{,}25\text{ T}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\text{ N}} =$$

$$= 8{,}8 \cdot 10^{13}\text{ m/s}^2$$

3. PAU **Sobre un electrón que se mueve con una velocidad de 5 000 km/s actúa en dirección normal a su velocidad un campo magnético en el que *B* = 8,0 · 10⁻³ T. Determina:**

***a)* El valor de la fuerza que actúa sobre el electrón.**

***b)* El radio de la órbita que describe.**

Datos: q_e = 1,6 · 10^{-19} C; m_e = 9,1 · 10^{-31} kg.

a) El electrón describe una circunferencia bajo la fuerza electromagnética, cuyo valor viene dado por la Ley de Lorentz.

$$F = qvB = 1{,}6 \cdot 10^{-19\text{ C}} \cdot 5 \cdot 10^6\text{ m/s} \cdot 8 \cdot 10^{-3}\text{ T} = 6{,}4 \cdot 10^{-15}\text{ N}$$

b) Esta fuerza equivale a la fuerza centrípeta necesaria para que la órbita circular sea estable.

$$F_c = m\frac{v^2}{R}$$

$$R = \frac{mv^2}{F_c} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}\text{ kg} \cdot 25 \cdot 10^{12}\text{ m}^2/\text{s}^2}{6{,}4 \cdot 10^{-15}\text{ N}} = 3{,}6 \cdot 10^{-3}\text{ m}$$

4. PAU **Se acelera un protón a través de una diferencia de potencial de 1,0 · 10⁵ V. Entonces el protón entra perpendicularmente a un campo magnético, recorriendo una trayectoria circular de 30 cm de radio. Calcula el valor del campo.**

Datos: q_p = 1,6 · 10^{-19} C; m_p = 1,67 · 10^{-27} kg.

El trabajo realizado por el campo para acelerar el protón se emplea en aumentar la energía cinética de este.

$$Vq = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2qV}{n}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\text{ C} \cdot 10^5\text{ V}}{1{,}67 \cdot 10^{-27}\text{ kg}}} = 4{,}4 \cdot 10^6\text{ m/s}$$

Al penetrar con esta velocidad en el campo magnético, el protón describe una circunferencia en la que la fuerza centrípeta coincide con la fuerza magnética:

$$m\frac{v^2}{R} = qvB$$

de donde se deduce el valor del campo magnético:

$$B = \frac{mv}{Rq} = \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27}\text{ kg} \cdot 4{,}4 \cdot 10^6\text{ m/s}}{0{,}3\text{ m} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\text{ C}} = 0{,}15\text{ T}$$

5. Calcula el campo magnético en un punto distante 4 cm de un largo conductor por el que circula una corriente de 6 A.

El campo magnético producido por un conductor rectilíneo en un punto distante *d* viene dado por la expresión:

$$B = \frac{2K'I}{d} = \frac{2 \cdot 10^{-7}\text{ T m A}^{-1} \cdot 6\text{ A}}{0{,}04\text{ m}} = 3 \cdot 10^{-5}\text{ T}$$

6. PAU **Un protón tiene una energía cinética de 10⁻¹⁴ J y sigue una trayectoria circular en un campo magnético *B* = 0,5 T. Calcula:**

***a)* El radio de la trayectoria.**

***b)* La frecuencia con que gira.**

En primer lugar hallamos la velocidad del protón a partir de su energía cinética:

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-14}\text{ J}}{1{,}6 \cdot 10^{-27}\text{ kg}}} = 3{,}53 \cdot 10^6\text{ m/s}$$

a) El radio de la trayectoria se obtiene igualando la fuerza centrípeta con la fuerza magnética:

$$m\frac{v^2}{R} = qvB$$

$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-27} \cdot 3{,}53 \cdot 10^6\text{ m/s}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\text{ C} \cdot 0{,}5\text{ T}} = 0{,}07\text{ m}$$

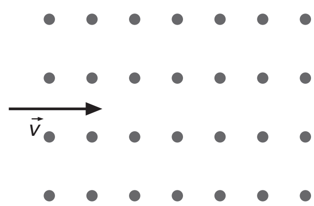
b) La frecuencia viene dada por:

$$f = \frac{v}{2\pi R} = \frac{3{,}53 \cdot 10^6\text{ m/s}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}07\text{ m}} = 7{,}8 \cdot 10^6\text{ Hz}$$

7. Un electrón penetra en un campo magnético uniforme, como indica la figura.

***a)* ¿Hacia dónde se desvía?**

***b)* Calcula el radio de la órbita que describe si B = 0,050 T y v = 5,0 · 10^6 m/s.**



a) Aplicando la regla de la mano derecha, la fuerza magnética que se ejerce sobre el electrón está dirigida hacia arriba.

b) Para hallar el radio de la órbita que describe el electrón, igualamos la fuerza magnética con la fuerza centrípeta necesaria para mantener el movimiento circular:

$$qvB = m\frac{v^2}{R};$$

de donde:

$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 5{,}0 \cdot 10^{6}\ \text{m/s}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 0{,}050\ \text{T}} = 5{,}7 \cdot 10^{-4}\ \text{m}$$

8. Demuestra que si una carga *q* penetra en un campo magnético uniforme *B* con una velocidad perpendicular al campo, el periodo del movimiento circular que toma la carga es independiente de su velocidad.

Para que el movimiento circular tenga lugar, la fuerza necesaria es originada por el campo magnético. Por tanto, se cumple:

$$m\frac{v^2}{r} = qvB; \qquad v = \frac{qBr}{m}$$

El periodo viene dado por:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\frac{qBr}{m}} = \frac{2\pi m}{qB}$$

9. ¿Cuál es el radio de una espira circular por la que pasa una corriente de 5 A si el campo magnético en su centro es 1,0 · 10^{-3} T?

El campo magnético en el centro de una espira viene dado por $B = \frac{\mu_0 I}{2r}$, siendo R el radio de la espira.

$$R = \frac{\mu_0 I}{2B} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{Tm/A} \cdot 5\ \text{A}}{2 \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{T}} = 3{,}1\ \text{mm}$$

10. ¿Qué velocidad ha de tener un electrón para que al penetrar perpendicularmente a un campo magnético de 5,0 · 10^{-4} T describa una circunferencia de radio 2,0 cm?

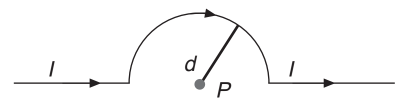
De la igualdad entre la fuerza centrípeta y la fuerza magnética obtenemos la velocidad del electrón.

$$m\frac{v^2}{r} = qvB$$

$$v = \frac{qBr}{m} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 5{,}0 \cdot 10^{-4}\ \text{T} \cdot 2{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{m}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}} = 1{,}8 \cdot 10^{6}\ \text{m/s}$$

11. Demuestra que el campo magnético en el punto *P* de la figura vale:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4d}$$



El campo se obtiene integrando la Ley de Biot para un elemento de corriente:

$$dB = K'\frac{I}{r^2}\,d\ell\ \text{sen}\ \alpha$$

en este caso sen α = 1 y $r = d$

$$B = \frac{K'I}{d^2}\int_0^{\pi d} dl = \frac{\pi K' I}{d}$$

Si tenemos en cuenta que $\mu_0 = 4\pi K'$, el campo magnético viene determinado por $B = \frac{\mu_0 I}{4d}$.

12. Un electrón que se mueve con una velocidad de 1,0 · 10^6 m/s describe una órbita circular en el seno de un campo magnético uniforme de valor 0,10 T cuya dirección es perpendicular a la velocidad. Determina:

PAU

***a)* El valor del radio de la órbita que describe.**

***b)* El número de vueltas que da el electrón en 0,001 s.**

Datos: m_e = 9,1 · 10^{-31} kg; valor absoluto de la carga del electrón *e* = 1,6 · 10^{-19} C

a) Igualando la fuerza magnética a la fuerza centrípeta, se obtiene el radio de la órbita.

$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 10^{6}\ \text{m/s}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 10^{-1}\ \text{T}} = 5{,}7 \cdot 10^{-5}\ \text{m}$$

b) El número de vueltas viene dado por:

$$n = \frac{t}{T} = \frac{tv}{2\pi r} = \frac{10^{-3}\ \text{s} \cdot 10^{6}\ \text{m/s}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 5{,}7 \cdot 10^{-5}\ \text{m}} = 2{,}8 \cdot 10^{6}\ \text{vueltas}$$

13. Una partícula de carga 1,6 · 10^{-19} C se mueve en un campo magnético uniforme de valor 0,20 T, describiendo una circunferencia en un plano perpendicular a la dirección del campo magnético con un periodo de 3,2 · 10^{-7} s, y velocidad de 3,8 · 10^6 m/s. Calcula:

PAU

***a)* El radio de la circunferencia descrita.**

***b)* La masa de la partícula.**

a) En primer lugar calculamos el radio de la órbita que describe la partícula, a partir del periodo y de la velocidad:

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

$$R = \frac{vT}{2\pi} = \frac{3{,}8 \cdot 10^{6}\ \text{m/s} \cdot 3{,}2 \cdot 10^{-7}\ \text{s}}{6{,}28} = 0{,}19\ \text{m}$$

b) La partícula describe esta trayectoria circular porque está sometida a una fuerza centrípeta originada por el campo magnético.

Por tanto, se cumple:

$$m\,\frac{v^2}{R} = q\,v\,B\,,$$

de donde:

$$m = \frac{R\,q\,B}{v} = \frac{0{,}19\ \text{m} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 0{,}2\ \text{T}}{3{,}8 \cdot 10^{6}\ \text{m/s}} = 1{,}6 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}$$

14. Un conductor rectilíneo de 15 cm de longitud se coloca perpendicularmente a un campo magnético de inducción 0,40 T. Calcula:

***a)* El valor de la fuerza a que está sometido, sabiendo que por él circula una corriente de 6,0 A.**

***b)* La fuerza anterior en el caso de que el conductor forme un ángulo de 30° con la dirección del campo.**

La fuerza que ejerce un campo magnético sobre un conductor rectilíneo viene dada por $F = I\,\ell\,B$ sen α.

a) Si $\alpha = 90°$; $F = 6{,}0\ \text{A} \cdot 0{,}15\ \text{m} \cdot 0{,}4\ \text{T} = 0{,}36\ \text{N}$

b) Si $\alpha = 30°$; $F = 6{,}0\ \text{A} \cdot 0{,}15\ \text{m} \cdot 0{,}4\ \text{T} \cdot 0{,}5 = 0{,}18\ \text{N}$

15. Un conductor de 12 cm de longitud transporta una corriente de 4,0 A formando un ángulo de 41° con un campo magnético. ¿Cuál debe ser la inducción del campo para producir una fuerza de 5,0 N sobre el conductor?

Aplicando la misma expresión del problema anterior, tenemos:

$$B = \frac{F}{I\ell \operatorname{sen}\alpha} = \frac{5{,}0\ \text{N}}{4{,}0\ \text{A} \cdot 0{,}12\ \text{m} \cdot 0{,}65} = 16\ \text{T}$$

16. Un alambre recto y largo conduce una corriente de 5 A según el eje *Ox*. Calcula el valor y dirección de *B* en el punto (3, 2, 0) expresado en metros.

En este caso, el vector campo viene dado por:

$$\vec{B} = \frac{2\,K'I}{d}\,(\vec{u}_x \times \vec{u}_y) = \frac{2 \cdot 10^{-7}\ \text{Tm/A} \cdot 5\text{A}}{2\ \text{m}}\,(\vec{u}_x \times \vec{u}_y) = 5 \cdot 10^{-7}\ \vec{u}_z\ \text{T}$$

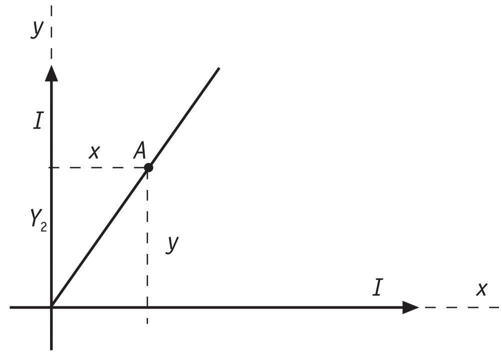
17. Calcula el campo magnético en un punto situado a 1,0 cm de un conductor rectilíneo por el que circula una corriente de 6,0 A.

El campo magnético creado por un conductor rectilíneo en un punto viene dado por:

$$B = \frac{2\,K'I}{d} = \frac{2 \cdot 10^{-7}\ \text{Tm/A} \cdot 6{,}0\ \text{A}}{10^{-2}\ \text{m}} = 1{,}2 \cdot 10^{-4}\ \text{T}$$

18. Un alambre recto y largo conduce una corriente *I* en el sentido +*x*, mientras que un segundo conductor transporta una corriente *I*/2 según el sentido +*y*. ¿En qué puntos el campo magnético resultante es nulo?

En los puntos situados en el primero y tercer cuadrante los campos magnéticos originados por las corrientes tienen sentido contrario. Sea *A* un punto en que, además de la condición anterior, también se cumple que $B_1 = B_2$.



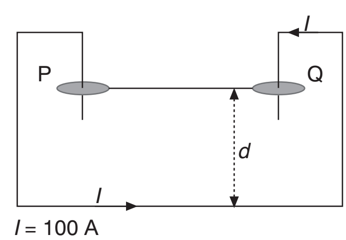
Aplicamos a cada corriente la ecuación del campo magnético originado por un conductor rectilíneo:

$$\frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{I}{y} = \frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{\frac{1}{2}I}{x}; \qquad x\,I = \frac{1}{2}\,y\,I$$

de donde: $y = 2x$.

Los puntos en los que el campo magnético resultante es cero están situados en la recta $y = 2x$.

19. Calcula la distancia *d* para que el conductor *PQ* representado en la figura permanezca en equilibrio si sabes que tiene 20 cm de longitud y 0,08 g de masa.



La fuerza electromagnética tiende a elevar el conductor. Habrá equilibrio cuando esta fuerza sea igual al peso:

$$I\,\ell\,B = m\,g; \qquad I\,\ell\,\frac{2\,K'I}{d} = m\,g$$

de donde se obtiene:

$$d = \frac{2\,K'\ell\,I^2}{m\,g} = \frac{2 \cdot 10^{-7}\ \text{Tm/A} \cdot 0{,}2\ \text{m} \cdot 10\,000\ \text{A}^2}{0{,}08 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2} = 0{,}5\ \text{m}$$

20. En una zona del espacio coexisten un largo hilo conductor, situado sobre el eje *Ox*, que transporta una corriente de 20 A en sentido positivo, +*x*, y un campo magnético, de valor *B* = 10^−5^ T, uniforme y paralelo al eje *y*, y en sentido positivo (+*y*). Calcula el campo resultante en el punto (2, 2) cm.

El campo magnético resultante es:

$$\vec{B}_T = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = 10^{-5}\,\vec{u}_y\ \text{T} + \frac{2 \cdot 10^{-7}\ \text{T m/A} \cdot 20\ \text{A}}{0{,}02\ \text{m}}\,\vec{u}_z =$$

$$= (10^{-5}\,\vec{u}_y + 20 \cdot 10^{-5}\,\vec{u}_z)\ \text{T}$$

21. Por un hilo conductor rectilíneo e infinitamente largo, situado en el eje *Ox*, circula una corriente eléctrica en el sentido positivo de dicho eje. El valor del campo producido por dicha corriente es de $3{,}0 \cdot 10^{-5}$ T en el punto *P* $(0, -d_p, 0)$ y es de $4{,}0 \cdot 10^{-5}$ T en el punto *Q* $(0, +d_Q, 0)$. Sabiendo que $d_P + d_Q = 7$ cm, determina:

PAU

a) La intensidad que circula por el hilo conductor.

b) El valor y dirección del campo magnético producido por dicha corriente en el punto de coordenadas (0, 6 cm, 0).

El campo magnético en *P*, originado por la corriente, viene determinado por:

$$B_P = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{d_P} = 3 \cdot 10^{-5}\ \text{T}$$

El campo en el punto *Q* será:

$$B_Q = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{d_Q} = 4 \cdot 10^{-5}\ \text{T}$$

De donde se obtiene: $\dfrac{B_P}{B_Q} = \dfrac{d_Q}{d_P} = \dfrac{3}{4}$

resolviendo este sistema, se obtiene $d_P = 4$ cm; $d_Q = 3$ cm.

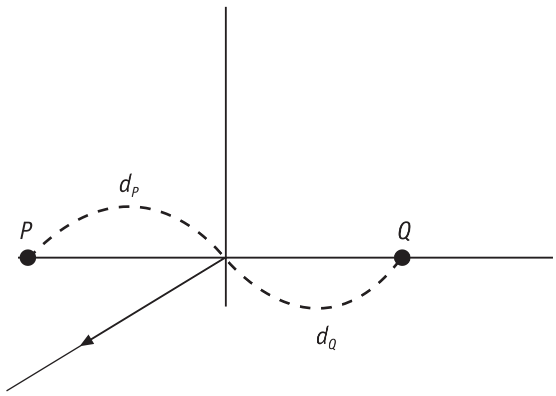
a) Conocida la distancia, podemos calcular la intensidad de la corriente a partir de la intensidad del campo:

$$B_P = \frac{\mu_0 I}{2\pi d_P}$$

$$I = \frac{B_P 2\pi d_p}{\mu_0} = \frac{B_p 2\pi d_p}{4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{Tm/A}} = 6\ \text{A}$$

b) El campo magnético originado por esta corriente en el punto $y = 6$ cm es:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{Tm/A} \cdot 6\ \text{A}}{2\pi \cdot 6 \cdot 10^{-2}\ \text{m}} = 2 \cdot 10^{-5}\ \text{T}$$



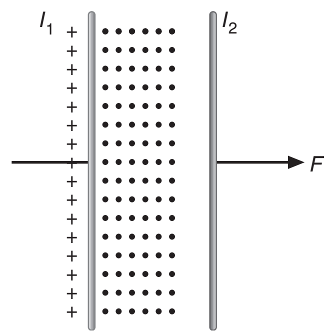
22. Dos largos conductores paralelos están separados 10 cm; por uno, *A*, pasa una corriente de 30 A, y por el otro, *B*, una de 40 A con sentidos opuestos. Calcula el campo magnético resultante en una línea del plano de los dos conductores, paralela a ellos y a igual distancia de ambos.

PAU

El campo magnético resultante es:

$$B = B_1 + B_2 = \frac{2 \cdot 10^{-7}\ \text{Tm A}^{-1}}{0{,}05\ \text{m}} \cdot (30\ \text{A} + 40\ A) = 2{,}8 \cdot 10^{-4}\ \text{T}$$

23. En la figura se muestran dos conductores paralelos por los que circulan corrientes I_1, I_2. Si el campo magnético originado por I_1 es el indicado en la figura, señala el sentido de I_1 e I_2 para que la fuerza entre los conductores sea de repulsión.



De acuerdo con la regla de la mano derecha, la corriente I_1 circula hacia abajo. Por tanto, la corriente I_2 debe circular hacia arriba para que las fuerzas sean de repulsión.

24. ¿A qué distancia entre sí deben estar dos conductores paralelos de 2 m de longitud que transportan una corriente de 10 A cada uno para que se repelan con una fuerza de 10^{-2} N?

PAU

La fuerza de repulsión entre dos conductores paralelos por los que circulan corrientes en sentido contrario viene dada por:

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}\,\ell$$

de donde se deduce:

$$d = \frac{\mu_0 I_1 I_2 \ell}{2\pi F} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{Tm/A} \cdot 10\ \text{A} \cdot 10\ \text{A} \cdot 2\ \text{m}}{2\pi \cdot 10^{-2}\ \text{N}} = 4 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$$

25. Calcula la fuerza por unidad de longitud con que se atraen dos conductores rectilíneos y paralelos distantes entre sí 10 cm y por los que circulan corrientes iguales de 25 A.

PAU

Aplicando la ecuación del ejercicio anterior:

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 \ell}{2\pi d}$$

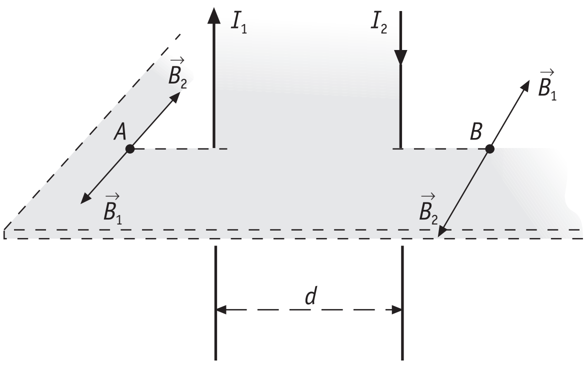
se obtiene la fuerza por unidad de longitud:

$$\frac{F}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{Tm/A} \cdot 25\ \text{A} \cdot 25\ \text{A}}{2\pi \cdot 10^{-1}\ \text{m}} = 1{,}25 \cdot 10^{-3}\ \text{N/m}$$

26. Dos conductores rectilíneos y paralelos separados una distancia de 12 cm llevan corrientes opuestas de I_1 = 0,5 A e I_2 = 2 A, respectivamente. ¿En qué puntos el campo magnético resultante es nulo?

PAU

De acuerdo con la regla de la mano derecha, los campos magnéticos tienen sentido contrario en los puntos situados a la izquierda de la corriente I_1 y en los puntos situados a la derecha de la corriente I_2. Al ser $I_2 > I_1$, solamente en los puntos situados a la izquierda de I_1 es posible la igualdad $B_1 = B_2$.



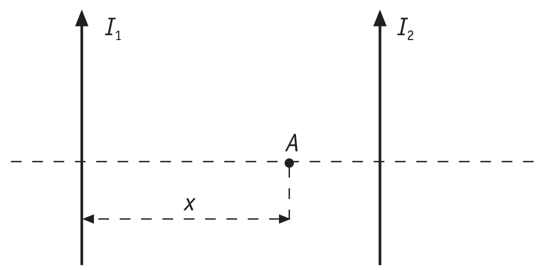
Supongamos que en el punto A los campos magnéticos son opuestos, de forma que $\vec{B}_T = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = 0$, o bien $B_1 = B_2$. El punto A dista x de I_1 y 0,12 m + x de I_2. Si $B_1 = B_2$, se cumple:

$$\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{x} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_2}{0,12 + x}$$

de donde: $0,5x + 0,06 = 2x$; $x = 0,04$ m = 4 cm.

27. Dos conductores rectos e ilimitados están situados paralelamente a una distancia de 15 cm. Por cada uno de ellos circulan intensidades I_1 = 20 A e I_2 = 10 A del mismo sentido. ¿A qué distancia de los conductores se anula el campo magnético?

Al circular la corriente en el mismo sentido, los campos magnéticos tienen sentido contrario solamente en los puntos que están situados entre los conductores, como se deduce de la regla de la mano derecha.



Supongamos que en el punto A se cumple que $B_1 = B_2$; por tanto, se anula el campo magnético resultante.

$$\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{x} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_2}{(15\ \text{cm} - x)}$$

$$15\, I_1 - x I_1 = x I_2; \quad 15\ \text{cm} \cdot 20\ \text{A} = x \cdot 30\ \text{A}; \quad x = 10\ \text{cm}$$

El campo magnético se anula en los puntos que distan 10 cm de la corriente mayor y 5 cm de la corriente inferior.

Actividades

1. ¿Qué ventajas e inconvenientes, ecológicamente hablando, tiene una central hidroeléctrica?

Las centrales hidroeléctricas, frente al medio ambiente, presentan muchas ventajas:

- Usan recursos naturales que son renovables.
- No contaminan el agua que utilizan.
- Regulan el caudal de los ríos, evitando inundaciones y estiajes.

Los inconvenientes que tienen son, entre otros:

- Modifican el paisaje debido al movimiento de grandes masas de tierra en la construcción de presas, canales, tuberías, etc.
- El efecto estético de los grandes muros de contención.

2. ¿Qué principios contaminantes tiene una central térmica? ¿Qué medidas se toman para paliar sus efectos?

Los principales contaminantes de las centrales térmicas se derivan de los combustibles que se utilizan como materia prima: carbón, petróleo, etc.

Entre los contaminantes más importantes podemos citar:

- Óxidos de azufre, nitrógeno y carbono.
- Humos y partículas en suspensión.
- Elevación de la temperatura ambiente.

Actualmente estos elementos contaminantes se eliminan de distintas formas: utilizando chimeneas de gran altura, precipitadores de humos, torres de refrigeración, etc.

3. Establece un paralelismo entre las centrales térmicas y nucleares.

Esta actividad es abierta. El paralelismo que se pide es establecer analogías y diferencias entre las dos centrales.

4. ¿Qué ventajas e inconvenientes presentan los generadores eólicos y fotovoltaicos? ¿Qué tipo de energía transforman?

La generación de energía mediante aerogeneradores o paneles fotovoltaicos presenta las siguientes ventajas: se trata de energías que no alteran durante su vida útil el medio ambiente, al no engendrar emisiones de gases de efecto invernadero ni consumir combustibles; permiten que la energía llegue a zonas poco pobladas o sin posibilidad de conexión a la red eléctrica.

Como inconvenientes se pueden citar los siguientes: el coste económico, pues no resultan rentables sin subvenciones públicas; el coste medioambiental durante la fase de fabricación de los aerogeneradores o paneles (la fabricación precisa el consumo de combustibles fósiles o materias primas escasas); el escaso rendimiento y la inestabilidad en la producción por la dependencia meteorológica.

La energía que transforman es la del viento en el caso de los aerogeneradores y la solar en el caso de los paneles fotovoltaicos (realmente la energía del viento procede también del sol, que calienta las masas de aire de la atmósfera).

5. ¿Qué fases del método científico desarrollaron fundamentalmente Faraday y Maxwell? ¿Qué es más importante para el progreso de la Física, el trabajo experimental o el análisis teórico de los hechos?

Faraday fue un genio en la experimentación; Maxwell lo fue en la elaboración de leyes y teorías científicas. Tanto el trabajo experimental como el análisis teórico de los hechos son imprescindibles para el progreso de la Física.

6. Explica con tus propias palabras qué entiendes por interacción electromagnética. ¿Qué es la síntesis electromagnética? ¿Qué materias unifica mediante una sola teoría?

Solo existen cuatro interacciones fundamentales en la naturaleza: nuclear fuerte, electromagnética, nuclear débil y gravitatoria.

La interacción electromagnética unifica las fuerzas eléctricas y magnéticas. Es la responsable de que las moléculas, los átomos, la materia en general, permanezcan unidos.

Maxwell completó la unificación del electromagnetismo con la óptica, al predecir la existencia de ondas electromagnéticas, en lo que se denomina síntesis electromagnética, que unifica en una sola teoría la electricidad, el magnetismo y la óptica.

7. A partir de los valores de la constante dieléctrica del vacío ε_0 y de la permeabilidad magnética del vacío μ_0, comprueba que la velocidad de las ondas electromagnéticas en el vacío es $3 \cdot 10^8$ ms^{-1}.

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}\ \mathrm{C^2\,N^{-1}\,m^{-2}};$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{N\,A^{-2}}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{C^2}}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9\ \mathrm{m^2\,A^2}}}} = 3 \cdot 10^8\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

8. Describe la naturaleza de las ondas electromagnéticas. ¿Qué relación existe entre el campo eléctrico y el campo magnético en una onda electromagnética?

Las ondas electromagnéticas están formadas por un campo eléctrico y otro magnético, variables, que oscilan en planos perpendiculares entre sí y, a su vez, perpendiculares a la dirección de propagación de la onda. Son ondas transversales.

El módulo del campo magnético es igual al del campo eléctrico, en la misma posición y tiempo, dividido entre la velocidad de la luz.

9. Calcula la frecuencia y el periodo de una onda electromagnética de 2,5 cm de longitud de onda. ¿Qué tipo de onda es?

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8\ \mathrm{m\,s^{-1}}}{2{,}5 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}} = 1{,}2 \cdot 10^{10}\ \mathrm{s^{-1}}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1{,}2 \cdot 10^{10}\ \mathrm{s^{-1}}} = 8{,}3 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{s}$$

Se trata de una onda de radio corta.

10. ¿Por qué los rayos infrarrojos y los ultravioleta reciben este nombre? ¿Cómo son sus longitudes de onda y sus frecuencias comparadas con las de la luz visible?

Los rayos infrarrojos tienen frecuencias inferiores a la luz roja y los ultravioleta tienen frecuencias mayores que la luz violeta.

Con sus longitudes de onda ocurre lo contrario: los rayos infrarrojos tienen longitudes de onda mayores que la luz roja; la luz ultravioleta tiene longitudes de onda menores que la luz violeta.

Telefonía móvil y salud

Cuestiones

1. Ordena los siguientes tipos de ondas electromagnéticas de menor a mayor peligrosidad.

***a)* Ondas de radio.**

***b)* Rayos gamma.**

***c)* Radiación de teléfonos móviles.**

a < c < b.

2. ¿Qué relación existe entre el módulo del campo eléctrico y el del campo magnético, en una onda electromagnética, en la misma posición y tiempo?

a) $\sqrt{\dfrac{B}{E}} = \dfrac{1}{c^2}$; *b)* $BE = \dfrac{1}{c^2}$; ***c)*** $\boldsymbol{Bc = E}$

3. ¿Las ondas utilizadas en telefonía móvil se propagan en el vacío?

a) No, porque son ondas electromagnéticas.

b) Sí, porque los campos eléctrico y magnético son perpendiculares.

***c)* Sí, porque se trata de ondas electromagnéticas.**

4. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones, referidas a los rayos X y a las ondas de telefonía móvil, son ciertas?

a) Los rayos X se propagan en el vacío y las ondas de teléfono no.

***b)* Los rayos X son radiaciones ionizantes y las ondas de teléfono no.**

c) Ambas son muy dañinas para el ser humano.

5. ¿Qué tamaño tendrá aproximadamente un periodo de una onda de telefonía móvil si su gama de frecuencias es la que dice el texto?

***a)* Entre 13 y 38 cm;**

b) Entre 10 y 20 nm;

c) Entre 3 y 7 cm.

a) $\lambda = \dfrac{c}{f} = \dfrac{3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}}{800 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}} = 0{,}375 \text{ m};$

$$\lambda = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}}{2\,200 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}} = 0{,}136 \text{ m}$$

Cuestiones y problemas

1. Un avión tiene una envergadura de 20 m y vuela hacia el S con una velocidad de 720 km/h manteniéndose paralelo a la superficie terrestre. Si el campo magnético de la Tierra en esa región tiene una componente horizontal de $2 \cdot 10^{-5}$ T y un ángulo de inclinación de 60°, halla la diferencia de potencial inducida en los extremos de las alas del avión.

Aplicamos la expresión matemática deducida de la experiencia de Henry.

$$\Delta V = B \ell v \text{ sen } \alpha = 2 \cdot 10^{-5} \text{ T} \cdot 20 \text{ m} \cdot 200 \text{ m/s} \cdot 0{,}866 = 0{,}07 \text{ V}$$

2. ¿De qué factores depende la fem inducida en un alambre que se desplaza en un campo magnético? ¿Cómo debe ser este desplazamiento para que no exista inducción?

La fuerza electromotriz inducida en un alambre que se desplaza en un campo magnético cortando las líneas de fuerza viene definida por la expresión matemática $e = Blv \text{ sen } \alpha$. Por tanto, depende:

- De la longitud del alambre contenida en el campo magnético.
- Del valor del campo.
- De la velocidad con que se desplaza el cable, y del ángulo que forma la dirección del campo.

No hay inducción si el cable se mueve paralelo al campo magnético. En este caso el ángulo anterior sería cero.

3. Una espira se coloca en un campo magnético $\vec{B} = 0{,}1\,\vec{u}_x$ T. Halla el flujo a través de la espira si su vector superficie vale $S = 5\vec{u}_x + 4\vec{u}_y - 20\vec{u}_z$ cm².

El flujo magnético viene definido por el producto escalar de los vectores $\vec{B}$ y $\vec{S}$.

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot (5\vec{u}_x + 4\vec{u}_y - 20\vec{u}_z) \cdot (0{,}1\vec{u}_x) \text{ T} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}$$

4. El plano de una espira coincide con el plano *xy*. Calcula el flujo a través de ella si el campo magnético vale:

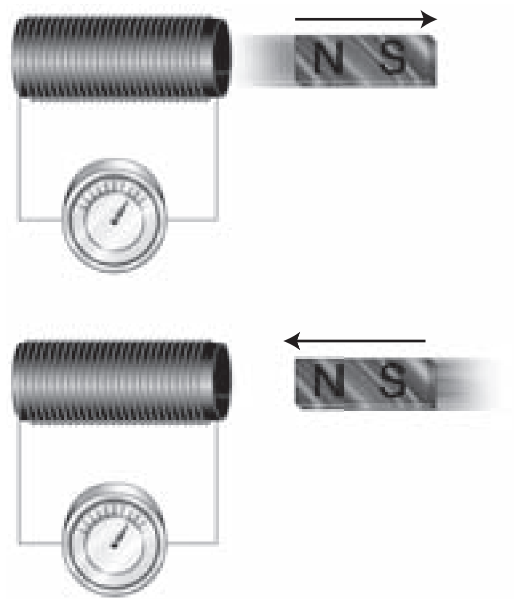
PAU

$$\vec{B} = 0{,}2\vec{u}_x + 0{,}01\vec{u}_y \text{ T}$$

Si el plano de la espira coincide con el plano *xy*, el vector superficie se puede expresar $\vec{S} = S\vec{u}_z$ y el flujo será:

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = (0{,}2\vec{u}_x + 0{,}01\vec{u}_y)\, S\vec{u}_z = 0$$

5. Dibuja el sentido de la corriente inducida en las bobinas de la figura.



En el primer caso, la corriente circula de manera que llega por la derecha al galvanómetro. En el segundo caso, la corriente circula en sentido contrario.

6. Una bobina de 100 espiras de 10 cm² cada una gira a 360 rpm alrededor de un eje situado en su plano perpendicular a un campo magnético uniforme de 0,020 T. Calcula: PAU

***a)* El flujo máximo que atraviesa la bobina.**

***b)* La fem media inducida en la bobina.**

a) El flujo máximo que atraviesa la bobina es:

$$\phi = BS = 0{,}020\ \text{T} \cdot 10 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2 = 2 \cdot 10^{-5}\ \text{Wb}$$

Este flujo pasa de su valor máximo a valor nulo en un cuarto de periodo.

$$t = \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{4\omega} = \frac{1}{24}\ \text{s}$$

siendo: $\omega = \dfrac{360\ \text{rpm} \cdot 2\pi}{60\ \text{s}} = 12\pi\ \text{rad/s}$

b) La fem media inducida será:

$$e = -N\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -\frac{100 \cdot (0 - 2 \cdot 10^{-5}\ \text{W}b)}{\frac{1}{24}\ \text{s}} = 0{,}048\ \text{V}$$

7. Una bobina tiene una superficie de 0,002 m² y está colocada en un campo magnético de 2 T. Si en 0,01 s la inducción se reduce a 0,5 T, ¿cuál es la fem inducida si la bobina tiene 200 espiras?

La fuerza electromotriz inducida se obtiene aplicando la Ley de Faraday:

$$e = -N\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -N\frac{S\,(B_1 - B_0)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{-200 \cdot 2 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^2\ (0{,}5 - 2)\ \text{T}}{0{,}01\ \text{s}} = 60\ \text{V}$$

8. Una bobina de 50 espiras de 8 cm² está colocada en un campo magnético de manera que el flujo sea máximo. Si el campo varía según la función *B* = 0,2 – 0,01 *t* T, halla la fem inducida en la bobina. PAU

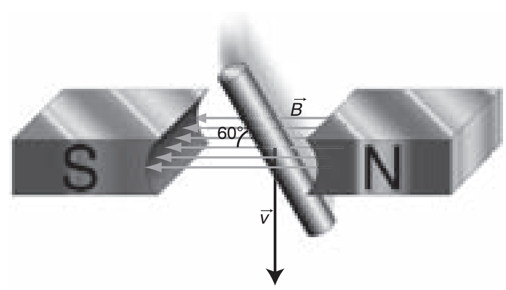
La fem instantánea se obtiene derivando la función del flujo.

$$e = -N\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -NS\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = -50 \cdot 8 \cdot 10^{4}\ \text{m}^2 \cdot (0{,}01\ \text{T}) = 4 \cdot 10^{-4}\ \text{V}$$

La fem máxima es:

$$e_{\text{máx}} = \text{B}5\ \omega = 0{,}5\ \text{T} \cdot 5 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^2 \cdot 100\ \text{rad s}^{-1} = 0{,}25\ \text{V}$$

9. Un alambre de 10 cm de longitud se mueve con una velocidad de 0,5 m/s en una dirección formando un ángulo de 60º con la inducción de un campo magnético de 0,2 T. Calcula la fem inducida en el alambre (ver figura).



En este caso, la fuerza electromotriz se obtiene de la expresión:

$$e = B\,\ell\,v\ \text{sen}\ \alpha = 0{,}2\ \text{T} \cdot 0{,}1\ \text{m} \cdot 0{,}5\ \text{m/s} \cdot 0{,}86 = 8{,}6 \cdot 10^{-3}\ \text{V}$$

10. Calcula la fem inducida en una bobina de 20 espiras si se produce en ella una variación de flujo de 0,25 Wb en 0,020 s. PAU

De la Ley de Faraday se deduce:

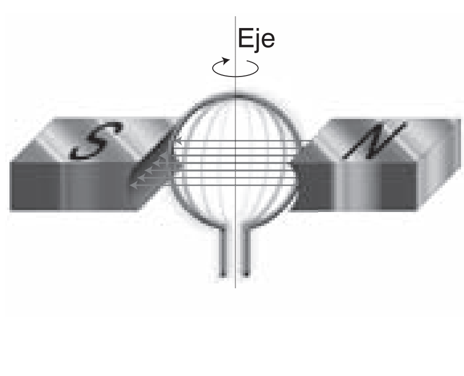
$$e = \left|N\frac{\Delta\phi}{\Delta t}\right| = 20 \cdot \frac{0{,}25\ \text{Wb}}{0{,}020\ \text{s}} = 250\ \text{V}$$

11. Una bobina de 400 espiras y *r* = 10 cm de radio está situada con su plano perpendicular a un campo magnético uniforme *B* = 0,8 T. Calcula la fem media inducida en la bobina si el campo se anula en 0,2 s. PAU

Aplicamos la Ley de Faraday:

$$e = -N\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -NS\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{-400 \cdot \pi \cdot 10^{-2}\ \text{m}^2 \cdot (0 - 0{,}8\ \text{T})}{0{,}2\ \text{s}} = 50{,}2\ \text{V}$$

12. Una espira de 50,0 cm² gira alrededor de un eje de su plano con una velocidad de 100 rad/s dentro de un campo magnético de 0,50 T. Calcula la máxima fem inducida en la espira, si para *t* = 0 el flujo es máximo (ver figura). PAU



De la Ley de Faraday se deduce:

$$e = -\frac{\Delta(BS)}{\Delta t} = -\frac{S\,(B_1 - B_0)}{\frac{T}{4}} = \frac{4SB_0}{T} =$$

$$= \frac{4 \cdot 50 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2 \cdot 0{,}5\ \text{T}}{0{,}02\ \text{s}} = 0{,}159\ \text{V}$$

13. Una bobina de 100 espiras tarda 0,05 s en pasar de un punto en donde el flujo magnético vale 2,0 · 10^{-5} Wb a un punto de flujo nulo. Halla la fem media inducida.

PAU

La fem inducida viene determinada por la Ley de Faraday.

$$e = -N\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -100{,}0 \cdot \frac{(0 - 2{,}0 \cdot 10^{-5})\ \text{Wb}}{0{,}05\ \text{s}} = 0{,}04\ \text{V}$$

14. Un alambre de cobre de 10 cm de longitud se mueve perpendicularmente a un campo magnético de *B* = 0,80 T con una velocidad de 2,0 m/s. Halla la fem inducida en el alambre.

Aplicamos la ecuación deducida de la experiencia de Henry:

$e = B\ell v \text{ sen } \alpha$;

en este caso: $\alpha = 90°$

$e = 0{,}80\ \text{T} \cdot 0{,}1\ \text{m} \cdot 2{,}0\ \text{m/s} = 0{,}16\ \text{V}$

15. El flujo que pasa por una espira de 15 cm^2 varía según la función $\phi = 0{,}0050 \cos(100t)$ Wb. Calcula la inducción del campo suponiendo que es uniforme y perpendicular a la superficie de la espira en el momento de flujo máximo y la fem inducida en la espira.

Para hallar la inducción del campo magnético, tomamos el flujo máximo $\phi_m = BS$, de donde:

$$B = \frac{\phi_m}{S} = \frac{0{,}005\ \text{Wb}}{15 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2} = 3{,}3\ \text{T}$$

La fuerza electromotriz inducida será:

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = 0{,}5 \text{ sen } (100t)\ \text{V}$$

16. Un solenoide de 200 vueltas y de sección circular de diámetro 8,0 cm está situado en un campo magnético uniforme de valor 0,50 T cuya dirección forma un ángulo de 60° con el eje del solenoide. Si en un tiempo de 100 ms disminuye el valor del campo magnético uniformemente a cero, determina:

PAU

***a)* El flujo magnético que atraviesa inicialmente el solenoide.**

***b)* La fuerza electromotriz inducida en dicho solenoide.**

a) El flujo magnético que atraviesa el solenoide viene determinado por:

$\phi = BS\cos\theta = 0{,}5T \cdot \pi\ (4 \cdot 10^{-2})2\ \text{m}^2 \cdot 0{,}5 =$

$= 1{,}3 \cdot 10^{-3}\ \text{Wb}$

b) La fem inducida es:

$$e = -N\frac{d\phi}{dt} = -N\frac{\Delta(BS\cos\theta)}{\Delta t} = -NS\cos\theta\frac{\Delta B}{\Delta t} =$$

$$= -200\ \text{esp.} \cdot \pi\ (4 \cdot 10^{-2})^2\ \text{m}^2/\text{esp} \cdot 0{,}5 \cdot \frac{(0 - 0{,}5\ \text{T})}{0{,}1\ \text{s}} = 2{,}5\ \text{V}$$

17. Una bobina circular de 20 espiras y radio 5,0 cm se coloca en un campo magnético dirigido perpendicularmente al plano de la bobina. El módulo del campo magnético varía con el tiempo de acuerdo con la expresión $B = 0{,}02\,t + 0{,}08\,t^2$ (*t* en segundos y *B* en teslas). Determina:

***a)* El flujo magnético que atraviesa la bobina en función del tiempo.**

***b)* La fem inducida en la bobina para *t* = 5 s.**

Aplicamos la misma expresión del ejercicio anterior:

a) $\phi = BS\cos\theta = \pi\ (5 \cdot 10^{-2})^2\ \text{m}^2 \cdot (0{,}02t + 0{,}08t^2)\ \text{T} =$

$= (1{,}6t + 6{,}3t^2) \cdot 10^{-4}\ \text{Wb}$

b) Para hallar la fem inducida, derivamos la función anterior:

$$e = N\left|\frac{d\phi}{dt}\right| = 2 \cdot 10^{-3} \cdot (1{,}6 + 12{,}6t) = 0{,}13\ \text{V}$$

18. Una espira se coloca perpendicularmente en un campo magnético uniforme $\vec{B}$. ¿En qué caso será mayor la fuerza electromotriz inducida en la espira?

***a)* Si *B* disminuye linealmente de 300 mT a 0 en 1 ms.**

***b)* Si *B* aumenta de 1 T a 1,2 T en 1 ms.**

Hallamos los valores de la fem inducida:

a) $e_1 = \left|\frac{\Delta\phi_1}{\Delta t}\right| = S\left|\frac{\Delta B_2}{\Delta t}\right| = S \cdot \left|\frac{(-0 - 300 \cdot 10^{-3}\ \text{T})}{10^{-3}\ \text{s}}\right| = 300S\ \text{V}$

b) $e_2 = \left|\frac{\Delta\phi_2}{\Delta t}\right| = S\left|\frac{\Delta B_2}{\Delta t}\right| = S \cdot \frac{0{,}2\ \text{T}}{10^{-3}\ \text{s}} = 200S\ \text{V}$

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{300S\ \text{V}}{200S\ \text{V}} = 1{,}5$$

Es vez y media mayor la fem producida en el caso *a)*.

19. Un campo magnético uniforme y constante de 0,01 T está dirigido a lo largo del eje *Oz*. Una espira circular se encuentra situada en el plano *xy*, centrada en el origen, y tiene un radio que varía en el tiempo según la función *r* = 0,1 – 10 *t* (en unidades del SI). Determina:

PAU

***a)* La expresión del flujo magnético a través de la espira.**

***b)* En qué instante de tiempo la fem inducida en la espira es 0,01 V.**

a) El flujo magnético a través de una espira viene dado por $\phi = BS\cos\alpha$. Si la espira se encuentra en el plano *xy* y el campo magnético está dirigido a lo largo del eje *Oz*, quiere decir, que el campo es paralelo a la normal de la espira. Por tanto, $\cos\alpha = 1$, y el flujo será máximo.

$\phi = BS = 0{,}01\ \text{T} \cdot \pi\ (0{,}1 - 10t)^2\ \text{m}^2 =$

$= 3{,}14 \cdot 10^{-4} - 6{,}28 \cdot 10^{-2}t + 3{,}14t^2\ \text{Wb}$

b) La fem inducida en cualquier instante viene dada por la derivada del flujo:

$$e = \frac{d\phi}{dt} = 6{,}28\,t - 6{,}28 \cdot 10^{-2}\ \text{V}$$

Para determinar el instante en que esta fem toma el valor de 0,01 V, resolvemos la ecuación $|6{,}28\,t - 6{,}28 \cdot 10^{-2}| = 0{,}01$

$$t = \frac{0{,}0628 - 0{,}01}{6{,}28} = 0{,}008\ \text{s}$$

20. Un campo magnético de 0,2 T forma un ángulo de 30° con el eje de una bobina circular de 300 espiras y radio 4 cm.

***a)* Halla el flujo magnético a través de la bobina.**

***b)* Si el campo magnético desciende linealmente a cero en un tiempo de 2 s, ¿cuál es la fem inducida en la bobina?**

a) El flujo magnético que atraviesa el solenoide viene determinado por:

$$\phi = BS\cos\theta = 0{,}2\,\text{T} \cdot \pi\,(4 \cdot 10^{-2})^2\ \text{m}^2/\text{esp.} \cdot \cos 30° =$$

$$= 8{,}7 \cdot 10^{-4}\ \text{Wb}$$

b) La fem inducida es:

$$e = -N\frac{d\phi}{dt} = -N\frac{\Delta(BS\cos\theta)}{\Delta t} = -NS\cos\theta\,\frac{\Delta B}{\Delta t} =$$

$$= -300\ \text{esp.} \cdot \pi\,(4 \cdot 10^{-2})^2\ \text{m}^2/\text{esp.} \cdot \cos 30° \cdot \frac{(0 - 0{,}2\ \text{T})}{2\ \text{s}} =$$

$$= 0{,}12\ \text{V}$$

21. Una espira circular de 2 cm de radio se encuentra en un campo magnético uniforme de dirección normal al plano de la espira y de intensidad variable en el tiempo $B = 3\,t^2 + 4$ (SI):

***a)* Deduce la expresión del flujo magnético a través de la espira en función del tiempo.**

***b)* Representa gráficamente la fem inducida en función del tiempo y calcula su valor para $t = 2$ s.**

a) Partimos de la expresión de la variación de flujo para, integrando, hallar el flujo en función del tiempo:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d(BS\cos\theta)}{dt} = S\cos\theta\,\frac{dB}{dt} =$$

$$= (2 \cdot 10^{-2})^2 \cdot \pi \cdot \cos 2\pi \cdot 6\,t = 12\,\pi \cdot 10^{-4}\,t^2 + \text{cte.}$$

Integrando resulta:

$$\phi = 4\,\pi\,(3\,t^2) \cdot 10^{-4} + \text{cte. Wb}$$

Para hallar la constante de integración, suponemos el cálculo en el instante $t = 0$ s. Si se cumple esa condición, $B = 4$ T. Sustituyendo $t = 0$ s en la expresión del flujo,

$$\phi_{t=0\,s} = B_{t=0\,s}S\cos\theta = 4\,\pi\,(2 \cdot 10^{-2})^2 \cdot \cos 2\,\pi = $$
$$= 16\,\pi \cdot 10^{-4}\ \text{Wb}$$

$$\phi_{t=0\,s} = 4\,\pi\,(3 \cdot 0^2) \cdot 10^{-4} + \text{cte. Wb}$$

$$\text{cte.} = 16 \cdot 10^{-4}\ \text{Wb}$$

Así, la expresión final del flujo es:

$$\phi = 4\,\pi\,(3\,t^2 + 4) \cdot 10^{-4}\ \text{Wb}$$

b) Para representar la fem inducida en función del tiempo partimos de la expresión:

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\Delta(BS\cos\theta)}{\Delta t} = -S\cos\theta\,\frac{\Delta B}{\Delta t} =$$

$$= -\pi\,(2 \cdot 10^{-2})^2\ \text{m}^2 \cdot \cos 0° \cdot 6\,t = -24\,\pi \cdot 10^{-4}\,t\ \text{V},$$

que corresponde a una recta.

Para $t = 2$ s, el valor de la fem es:

$$e = -48\,\pi \cdot 10^{-4}\ \text{V} = 1{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{V}$$

22. ¿Por qué es más económico para las compañías eléctricas producir corriente alterna que corriente continua?

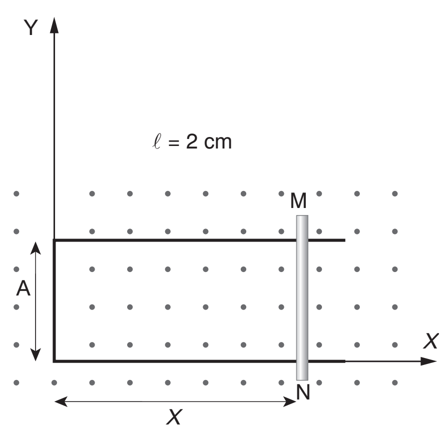
Empleando corriente alterna se pierde poca energía en los cables de conducción. La energía perdida en la resistencia de los cables es proporcional al cuadrado de la intensidad de la corriente. Esta corriente es muy pequeña si la central nos envía la potencia eléctrica a alta tensión.

23. Sobre un hilo conductor de resistencia despreciable, que tiene la forma que se indica en la figura, se puede deslizar una varilla *MN* de resistencia $R = 10\ \Omega$ en presencia de un campo magnético uniforme, $\vec{B}$ de valor 50 mT, perpendicularmente al plano del circuito. La varilla oscila en la dirección del eje *Ox* de acuerdo con la expresión $x = x_0 + A$ sen (ωt), siendo $x_0 = 10$ cm, $A = 5$ cm y el periodo de oscilación 10 s.

PAU

***a)* Calcula en función del tiempo el flujo magnético que atraviesa el circuito.**

***b)* Calcula en función del tiempo la corriente en el circuito.**



a) El flujo magnético que atraviesa el plano de la figura viene dado por:

$$\phi = BS = B\ell x = B\ell\,(x_0 + A\ \text{sen}\ \omega t) = B\ell x_0 + B\ell A\ \text{sen}\ \omega t =$$

$$= 5 \cdot 10^{-4}\ \text{T} \cdot 2 \cdot 10^{-2}\ \text{m} \cdot (10^{-1}\ \text{m} + 5 \cdot 10^{-2}\ \text{sen}\ \omega t) =$$

$$= \left[1 + 0{,}5\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{5}\,t\right)\right] \cdot 10^{-6}\ \text{Wb}$$

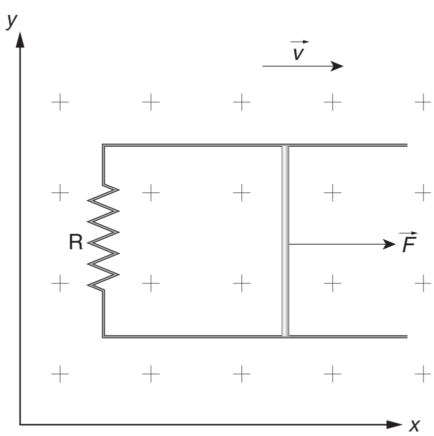
b) La fem que se induce en el circuito viene dada por la derivada de la función anterior:

$$e = \frac{d\phi}{dt} = 10^{-6} \cdot 0{,}5 \cdot \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{\pi}{5}\, t = 3{,}14 \cdot 10^{-7} \cos \frac{\pi}{5}\, t \,\text{V}$$

La intensidad de la corriente viene dada por la Ley de Ohm.

$$I = \frac{e}{R} = \frac{3{,}14 \cdot 10^{-7} \cos \frac{\pi}{5}\, t}{10} = 3{,}14 \cdot 10^{-8} \cos \left(\frac{\pi}{5}\, t\right) \text{A}$$

24. Un circuito situado en el plano *xy* consta de un conductor recto de 0,1 m de longitud que se desliza a lo largo de unos raíles conductores paralelos fijos (ver figura). La parte fija del circuito tiene una resistencia de 5 Ω. El circuito está sometido a la acción de un campo magnético $\vec{B} = -0{,}6\,\vec{u}_x$ T. Desplazamos el conductor hacia la derecha con velocidad $\vec{v} = 20\,\vec{u}_x$ m/s. Halla la fem inducida y la intensidad de la corriente inducida.



Por efecto del movimiento del conductor recto hacia la derecha se origina una fuerza magnética; esta produce una corriente eléctrica inducida. Al modificarse el área del circuito, el flujo magnético varía y se produce una fem inducida.

El flujo en cada instante es $\phi_m = B\,l\,x$.

Obtenemos la fem inducida a partir de la Ley de Faraday:

$$e = -\frac{d\phi_m}{dt} = -B\,l\,\frac{dx}{dt} = -B\,l\,v$$

expresión que, aplicada a nuestro problema toma la forma:

$e = -0{,}6$ T · 0,1 m · 20 m/s = –1,2 V

La intensidad de la corriente viene determinada mediante la Ley de Ohm.

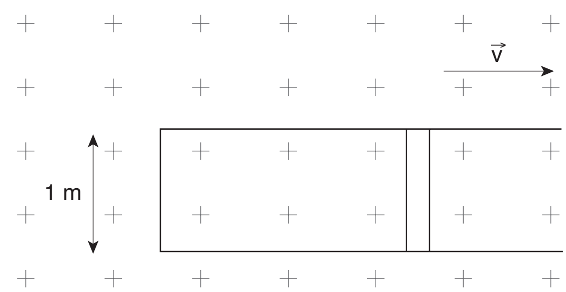
$$I = \frac{|e|}{R} = \frac{1{,}2 \text{ V}}{5\ \Omega} = 0{,}24 \text{ A}$$

25. Una espira rectangular posee un lado móvil que se desplaza en el interior de un campo magnético uniforme de 0,5 T, con una velocidad constante de 2 m/s, como se muestra en la figura. Calcula:

***a)* El valor de la fem inducida en la espira. ¿Permanece constante este valor mientras se desplaza el lado móvil?**

***b)* La intensidad de corriente que circula por la espira suponiendo que tiene una resistencia de 5 Ω.**

***c)* La fuerza que se debe realizar sobre el lado móvil para que se desplace con la velocidad constante indicada.**



a) La fuerza electromotriz inducida viene dada por la expresión de la ley de Faraday-Lenz, fem = $\frac{d\phi}{dt}$.

La superficie de la espira varía con el tiempo, según $S = ab = 1$ m · vt, donde a y b son los lados vertical y horizontal del rectángulo. El lado b es el espacio que recorre el lado móvil en el tiempo t.

El ángulo entre el campo magnético y el vector superficie es 0°. Por lo tanto el flujo magnético a través de la espira es:

$\phi\,(t) = Bvt$, y la fuerza electromotriz fem = $\frac{d\phi}{dt} = Bv$.

Sustituyendo, fem = Bv = 0,5 T · 2 m/s = 1 V.

Si el campo, el lado a del rectángulo y la velocidad de desplazamiento permanecen constantes, la fem también será constante.

b) Según la Ley de Ohm, fem = IR, es decir, sustituyendo, obtenemos:

$$I = \frac{1 \text{ V}}{5\ \Omega} = 0{,}2 \text{ A}$$

c) La fuerza magnética que se realiza sobre el lado de la espira es $F = IaB$ = 0,2 A · 1 m · 0,5 T = 0,1 N.

26. Cita algunos factores negativos para el medio ambiente debidos al transporte de la energía eléctrica.

Entre los factores negativos que presenta el transporte de la energía eléctrica se pueden citar el efecto antiestético de las torres de alta tensión, el peligro que encierra la existencia de torres de conducción y transformadores aéreos en los cascos urbanos, el impacto de las torres de alta tensión sobre ciertas aves y especies arbóreas, etcétera.

27. ¿Qué ventajas y qué inconvenientes ofrece una central nuclear?

Las ventajas de una central nuclear son fundamentalmente dos:

- El rendimiento. Un kilogramo de uranio puede producir tanta energía como varias toneladas de carbón.
- El escaso espacio necesario para almacenar el combustible.

Los inconvenientes más importantes son sus efectos contaminantes.

28. Un generador de corriente alterna suministra 25 A a 8 000 V al primario de un transformador. ¿Cuál es la intensidad en la salida si esta se realiza a 250 000 V? ¿Cuál es la relación de transformación?

PAU

De la ecuación $V_s I_s = V_p I_p$, que rige el funcionamiento de un transformador, despejamos la intensidad de la corriente en el secundario:

$$I_s = \frac{V_p I_p}{V_s} = \frac{8\,000\ \text{V} \cdot 25\ \text{A}}{250\,000\ \text{V}} = 0{,}8\ \text{A}$$

La razón de transformación es:

$$\frac{N_s}{N_p} = \frac{V_s}{V_p} = \frac{250\,000\ \text{V}}{8\,000\ \text{V}} = \frac{125}{4}$$

29. Un transformador tiene 400 vueltas en el primario y 10 vueltas en el secundario. Si se aplica una tensión en el primario de 200 V, ¿cuál es la tensión en la salida?

De la relación de transformación $\frac{N_s}{N_p} = \frac{V_s}{V_p}$ se obtiene la tensión del secundario:

$$V_s = \frac{N_s V_p}{N_p} = \frac{10 \cdot 200\ \text{V}}{400} = 5\ \text{V}$$

30. ¿Qué es un transformador? ¿Por qué son útiles para el transporte de la energía eléctrica? Si el primario de un transformador tiene 1 200 espiras y el secundario 100, ¿qué tensión habrá que aplicar al primario para tener en la salida del secundario 6 V?

Un transformador es un dispositivo utilizado para cambiar la tensión y la intensidad de la corriente, manteniendo constante la potencia. Un transformador es útil porque permite transportar la energía eléctrica a grandes distancias con la mínima pérdida de energía. De la ecuación que rige el funcionamiento de un transformador, se deduce:

$$V_p = \frac{V_s N_p}{N_s} = \frac{6\ \text{V} \cdot 1\,200\ \text{esp.}}{100\ \text{esp.}} = 72\ \text{V}$$

31. Deduce la relación de transformación de un transformador elevador de la central hidroeléctrica (250 V) a la ciudad (500 000 V) y la de un transformador que sirve esa corriente al alumbrado público de 220 V.

Si se trata de un transformador elevador, la tensión en el secundario o salida debe ser mayor que la tensión en la entrada o primario. Se cumple, por tanto, que $V_s = 500\,000$ V; $V_p = 250$ V.

Por tanto, la relación de transformación será:

$$\frac{N_s}{N_p} = \frac{V_s}{V_p} = \frac{500\,000\ \text{V}}{250\ \text{V}} = 2\,000$$

El transformador que sirve el alumbrado es un transformador reductor. Es decir, $V_p = 500\,000$ V; $V_s = 220$ V.

La relación de transformación sería:

$$\frac{N_s}{N_p} = \frac{220\ \text{V}}{500\,000\ \text{V}} = \frac{1}{2\,273}$$

32. Un transformador tiene 20 espiras en el primario, a la tensión de 50 V; el secundario tiene 120 espiras. Calcula:

***a)* La fem en el secundario.**

***b)* Si lo invertimos, es decir, si conectamos las 120 espiras a los 50 V, ¿cuál será la tensión en el secundario?**

De la relación de transformación obtenemos la tensión del secundario:

a) $Vs = \frac{N_s}{N_p} V_p = \frac{120}{20} \cdot 50\ \text{V} = 300\ \text{V}$

b) $Vs = \frac{20}{120} \cdot 50\ \text{V} = 8{,}3\ \text{V}$

33. Las longitudes de onda de emisión de una cierta cadena de emisoras radiofónicas están comprendidas entre 50 y 200 m.

PAU

***a)* ¿Cuál es la banda de frecuencias de emisión de la cadena?**

***b)* ¿Qué emisiones se propagan a mayor velocidad, las de frecuencia más alta o las de más baja?**

a) $f = \frac{c}{\lambda}$; $\quad f_1 = \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m s}^{-1}}{50\ \text{m}} = 6 \cdot 10^6\ \text{s}^{-1}$

$$f_2 = \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m s}^{-1}}{200\ \text{m}} = 1{,}5 \cdot 10^6\ \text{s}^{-1}$$

Por tanto, la banda de frecuencias utilizada va desde $1{,}5 \cdot 10^6$ Hz hasta $6 \cdot 10^6$ Hz.

b) Se propagan a la misma velocidad.

34. Escribe las ecuaciones que representan el campo eléctrico y el campo magnético de una onda electromagnética plana que se propaga en el sentido positivo del eje *Ox*. La amplitud del campo eléctrico es de 8 N/C y la frecuencia de 1 MHz.

$$E_0 = 8\ \text{N/C}; \qquad f = 10^6\ \text{Hz}; \qquad T = 10^{-6}\ \text{s};$$

$$\lambda = cT = 3 \cdot 10^8\ \text{m s}^{-1} \cdot 10^{-6}\ \text{s} = 3 \cdot 10^2\ \text{m}$$

Al introducir estos valores en las ecuaciones de onda del campo eléctrico y del magnético, se obtiene:

$$E = 8\ \text{sen}\ 2\pi \left(\frac{t}{10^{-6}} - \frac{x}{3 \cdot 10^2} \right)\ \text{N/C}$$

$$B = \frac{E}{c} = 2{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot \text{sen}\ 2\pi \left(\frac{t}{10^{-6}} - \frac{x}{3 \cdot 10^2} \right)$$

Actividades

1. Calcula la energía de un fotón de luz amarilla de longitud de onda igual a $5{,}8 \cdot 10^3$ Å.

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 3 \cdot 10^8\ \text{m s}^{-1}}{5{,}8 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} = 3{,}43 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

2. ¿Qué fenómenos ópticos constituyen una prueba a favor de la teoría corpuscular de la luz y cuáles son favorables a la teoría ondulatoria?

La teoría corpuscular de la luz es la única capaz de explicar el efecto fotoeléctrico y el efecto Compton.

Los fenómenos ópticos favorables a la teoría ondulatoria de la luz son los característicos de todas las ondas: reflexión, refracción, difracción, interferencias, etc.

3. ¿Qué fotón es más energético, el de la luz roja o el de la luz azul?

Es más energético el fotón de luz azul, porque las frecuencias de este tipo de luz son mayores que las frecuencias de la luz roja: $E = hf$.

4. Una de las frecuencias utilizadas en telefonía móvil (sistema GSM) es 900 MHz. ¿Cuántos fotones GSM necesitamos para obtener la misma energía que con un solo fotón de luz violeta de frecuencia $7{,}5 \cdot 10^8$ MHz?

PAU

$E_v = hf_v = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 7{,}5 \cdot 10^{14}\ \text{s}^{-1} = 4{,}97 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$

La energía de un fotón GSM es:

$E = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 900 \cdot 10^6\ \text{s}^{-1} = 5{,}97 \cdot 10^{-25}\ \text{J}$

El número de fotones GSM es:

$$n = \frac{E_v}{E} = \frac{4{,}97 \cdot 10^{-19}}{5{,}97 \cdot 10^{-25}} = 8{,}32 \cdot 10^5\ \text{fotones}$$

5. La estrella Alfa (Próxima Centauri) de la constelación Centauro es la estrella más cercana a la Tierra. Se encuentra a 4,3 años luz. ¿A qué distancia se sitúa en kilómetros?

$s = ct = 3 \cdot 10^8\ \text{m s}^{-1} \cdot (4{,}3 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3\,600)\ \text{s} =$

$= 4{,}1 \cdot 10^{16}\ \text{m} = 4{,}1 \cdot 10^{13}\ \text{km}$

6. La distancia aproximada entre el Sol y la Tierra es de 150 millones de kilómetros. ¿Cuánto tiempo tarda la luz del Sol en llegar a la Tierra?

$$t = \frac{s}{c} = \frac{1{,}5 \cdot 10^8\ \text{km}}{3 \cdot 10^5\ \text{km s}^{-1}} = 500\ \text{s}$$

7. Calcula la velocidad de la luz en el etanol si su índice de refracción absoluto es 1,36.

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m s}^{-1}}{1{,}36} = 2{,}2 \cdot 10^8\ \text{m s}^{-1}$$

8. El espectro visible contiene frecuencias entre $4 \cdot 10^{14}$ Hz y $7 \cdot 10^{14}$ Hz. Cuando la luz se propaga por el agua:

PAU

a) **¿Se modifican estos valores de las frecuencias y de las longitudes de onda?**

b) **En caso afirmativo, calcula los valores correspondientes.**

Datos: $n_a = 1{,}3$; $c = 3 \cdot 10^8\ \text{m s}^{-1}$.

a) Cuando la luz se propaga en el agua, varía su velocidad y esto queda reflejado en el valor del índice de refracción en ese medio. Sin embargo, la frecuencia es un valor fijo que nunca cambia, de modo que el cambio de velocidad solo afecta a la longitud de onda.

b) Las longitudes de onda en el vacío y en el aire son:

$$\lambda_{máx} = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m s}^{-1}}{4 \cdot 10^{14}\ \text{s}^{-1}} = 7{,}5 \cdot 10^{-7}\ \text{m};$$

$$\lambda_{mín} = \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m s}^{-1}}{7 \cdot 10^{14}\ \text{s}^{-1}} = 4{,}3 \cdot 10^{-7}\ \text{m}$$

Las longitudes de onda en el agua son:

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m s}^{-1}}{1{,}3} = 2{,}3 \cdot 10^8\ \text{m s}^{-1}$$

$$\lambda_{máx} = \frac{2{,}3 \cdot 10^8\ \text{m s}^{-1}}{7 \cdot 10^{14}\ \text{s}^{-1}} = 5{,}7 \cdot 10^{-7}\ \text{m};$$

$$\lambda_{mín} = \frac{2{,}3 \cdot 10^8\ \text{m s}^{-1}}{7 \cdot 10^{14}\ \text{s}^{-1}} = 3{,}3 \cdot 10^{-7}\ \text{m}$$

9. El índice de refracción absoluto del diamante es 2,38 para una luz cuya longitud de onda es de 6 200 Å en el aire.

Calcula:

a) **La velocidad de esa luz en el diamante.**

b) **Su longitud de onda y su frecuencia en el interior del diamante.**

a) $v = \dfrac{c}{n} = \dfrac{3 \cdot 10^8\ \text{m s}^{-1}}{2{,}38} = 1{,}26 \cdot 10^8\ \text{m s}^{-1}$

b) $\lambda = \dfrac{\lambda_0}{n_0} = \dfrac{6{,}2 \cdot 10^{-7}\ \text{m}}{2{,}38} = 2{,}6 \cdot 10^{-7}\ \text{m} = 260\ \text{nm}$

La frecuencia en el interior del diamante es la misma que en el aire:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m s}^{-1}}{6{,}2 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} = 4{,}8 \cdot 10^{14}\ \text{s}^{-1}$$

10. ¿Por qué los índices de refracción absoluto y relativo no tienen unidades?

El índice de refracción absoluto es el cociente entre dos velocidades. El índice de refracción relativo es el cociente entre dos índices de refracción absolutos.

11. Un haz de luz monocromática incide sobre la superficie de un vidrio ($n = 1{,}54$) con un ángulo de 30°. ¿Cuánto valen los ángulos de reflexión y refracción?

El ángulo de reflexión es igual que el ángulo de incidencia:

$r = i = 30°$

El ángulo de refracción se obtiene a partir de la Ley de Snell de la refracción:

$$\text{sen}\ r = \frac{n_1\,\text{sen}\ i}{n_2} = \frac{1 \cdot \text{sen}\ 30°}{1{,}54} = 0{,}325; \qquad r = 19°$$

12. Cuando un rayo de luz pasa desde el benceno (*n* = 1,50) al agua (*n* = 1,33), ¿a partir de qué ángulo se produce la reflexión total?

La reflexión total se produce para ángulos de incidencia mayores que el ángulo límite:

$$\text{sen } \ell = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1{,}33}{1{,}50} = 0{,}887\,; \qquad \ell = 62{,}5°$$

13. Un haz de luz roja de 695 nm de longitud de onda en el aire penetra en el agua (*n* = 1,33). Si el ángulo de incidencia es de 35°, ¿cuál es el ángulo de refracción? ¿Cuál es la longitud de onda y la frecuencia del haz de luz en el agua?

El ángulo de refracción se obtiene a partir de la invariante de refracción:
n_1 sen $i = n_2$ sen r

$$\text{sen } r = \frac{n_1 \text{ sen } i}{n_2} = \frac{1 \cdot \text{sen } 35°}{1{,}33} = 0{,}431\,; \qquad r = 25{,}5°$$

La frecuencia de la luz en el agua es la misma que en el aire:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}}{6{,}95 \cdot 10^{-7} \text{ m}} = 4{,}3 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$$

La longitud de onda en el agua es:

$$\lambda_a = \frac{\lambda_0}{n_a} = \frac{6{,}95 \cdot 10^{-7} \text{ m}}{1{,}33} = 5{,}2 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

14. Un rayo de luz blanca incide desde el aire sobre una lámina de vidrio con un ángulo de incidencia de 28°.
PAU

***a)* Calcula los ángulos de refracción de los rayos rojo y azul, componentes de la luz blanca.**

***b)* ¿Qué ángulo formarán entre sí en el interior del vidrio los rayos rojo y azul?**

Datos: Los índices de refracción absolutos del vidrio para estos colores son n_r = 1,612 y n_a = 1,671.

a) Los ángulos de refracción para los rayos rojo y azul son:

$$\text{sen } r_R = \frac{n_1 \text{ sen } i}{n_R} = \frac{1 \cdot \text{sen } 28°}{1{,}612} = 0{,}291\,; \qquad r_R = 16{,}9°$$

$$\text{sen } r_A = \frac{n_1 \text{ sen } i}{n_A} = \frac{1 \cdot \text{sen } 28°}{1{,}671} = 0{,}281\,; \qquad r_A = 16{,}3°$$

b) El ángulo formado por los dos rayos refractados es:

$$\alpha = r_R - r_A = 16{,}9° - 16{,}3° = 0{,}6°$$

15. Dibuja la marcha geométrica de un rayo de luz monocromática que atraviesa una lámina transparente de caras planas y paralelas.

¿Por qué el ángulo de emergencia es igual al de incidencia en la lámina?

Véase libro de texto, Apartado 9.6.

16. Sobre una lámina de vidrio de caras planas y paralelas, de espesor 4,1 cm y de índice de refracción *n* = 1,50, situada en el aire, incide un rayo de luz monocromática con un ángulo de 20°. Calcula la distancia recorrida por el rayo en el interior de la lámina y el desplazamiento lateral del rayo emergente.

El ángulo de refracción en la primera cara de la lámina (r_1) es igual al ángulo de incidencia en la segunda cara. Su valor es:

n_1 sen $i = n_2$ sen r_1

$$\text{sen } r_1 = \frac{n_1 \text{ sen } i_1}{n_2} = \frac{1 \cdot \text{sen } 20°}{1{,}50} = 0{,}228\,; \qquad r_1 = 13{,}2°$$

El desplazamiento lateral es:

$$\delta = s\,\frac{\text{sen }(i_1 - r_1)}{\cos r_1} = 4{,}1 \text{ cm} \cdot \frac{\text{sen }(20° - 13{,}2°)}{\cos 13{,}2°} = 0{,}50 \text{ cm}$$

La distancia recorrida por la luz en el interior de la lámina (x) es la siguiente:

$$x = \frac{s}{\cos r_1} = \frac{4{,}1 \text{ cm}}{\cos 13{,}2°} = 4{,}2 \text{ cm}$$

17. Sobre un prisma de vidrio de ángulo 40° e índice de refracción 1,51, situado en el aire, incide un rayo de luz monocromática con un ángulo de 45°. Calcula:

***a)* El ángulo de emergencia del rayo de luz.**

***b)* El ángulo de desviación sufrido por el rayo.**

a) Al aplicar la Ley de Snell de la refracción en la primera cara del prisma se obtiene:

$$\text{sen } r = \frac{\text{sen } i}{n} = \frac{\text{sen } 45°}{1{,}51} = 0{,}468\,; \qquad r = 27{,}9°$$

Como el ángulo del prisma es de 40°, se cumple:

$r' = \varphi - r = 40° - 27{,}9° = 12{,}1°$

La Ley de Snell de la refracción aplicada a la segunda cara del prisma permite obtener el ángulo de emergencia i':

$1 \cdot \text{sen } i' = n \text{ sen } r'$

$\text{sen } i' = 1{,}51 \cdot \text{sen } 12{,}1° = 0{,}317\,; \qquad i' = 18{,}5°$

b) Como $d = i + i' - \varphi$, resulta:

$\delta = 45° + 18{,}5° - 40 = 23{,}5°$

18. *a)* ¿Cuándo es mínima la desviación experimentada por un rayo de luz al atravesar un prisma óptico?

***b)* ¿Cuál es el índice de refracción de un prisma óptico de ángulo 30° si el ángulo de mínima desviación es de 15°?**

a) Cuando los ángulos de incidencia y de emergencia son iguales, es decir, cuando dentro del prisma la trayectoria del rayo luminoso es paralela a la base del prisma.

b) $$n = \frac{\text{sen } \dfrac{\delta_m + \varphi}{2}}{\text{sen } \dfrac{\varphi}{1}} = \frac{\text{sen } \dfrac{15° + 30°}{2}}{\text{sen } \dfrac{30°}{2}} = \frac{\text{sen } 22{,}5°}{\text{sen } 15°} = 1{,}48$$

19. ¿Se propagan todas las luces con la misma velocidad en el vidrio? ¿Depende su velocidad de la longitud de onda? ¿Ocurre lo mismo en cualquier medio material transparente?

En el vidrio, como en cualquier otro medio material transparente, las distintas luces no se propagan con la misma velocidad, solo lo hacen en el vacío.

La velocidad de propagación depende del índice de refracción y, por tanto, de la longitud de onda de la luz.

20. Si el vidrio tiene un índice de refracción menor para la luz roja que para las otras luces visibles y, por tanto, la luz roja se refracta menos, ¿cómo explicas que su ángulo de refracción sea el mayor?

Como la luz roja se refracta menos, el ángulo que forma el rayo refractado con la normal (ángulo de refracción) es mayor.

21. *a)* ¿Cuál es la parte esencial de un espectroscopio?

***b)* Indica las diferencias existentes entre un espectro de emisión y otro de absorción. ¿Por qué son complementarios los pertenecientes a una misma sustancia?**

a) La parte esencial de un espectroscopio es el prisma de vidrio que origina la dispersión de la luz que se va a analizar. También se emplean redes de difracción.

b) En el espectro de emisión se analiza la luz procedente del foco luminoso. Si la luz pasa por una sustancia absorbente antes de llegar al espectroscopio se produce un espectro de absorción.

Los espectros de emisión y de absorción de una misma sustancia son complementarios porque las frecuencias emitidas y absorbidas son las mismas. Las rayas que aparecen en el espectro de emisión desaparecen (aparecen negras) en el espectro de absorción.

22. *a)* ¿Qué diferencias existen entre los espectros continuos y discontinuos? Pon ejemplos de ambos tipos de espectros.

***b)* ¿Por qué se utilizan los espectros en los análisis químicos?**

a) Los espectros continuos contienen todos los colores del rojo al violeta; se obtienen cuando la fuente de luz es un sólido o un líquido incandescente.

Los espectros discontinuos están formados por una serie de rayas o bandas de distintos colores sobre un fondo negro; se obtienen mediante descargas eléctricas en gases.

b) Cada elemento químico da lugar a un espectro de rayas característico, siempre el mismo, lo que permite su identificación.

23. Explica razonadamente por qué es difícil observar los fenómenos de interferencia y difracción en las ondas luminosas.

Porque es difícil conseguir luces coherentes para apreciar las interferencias, y para que los efectos de la difracción sean observables, el tamaño de la abertura debe ser comparable a la longitud de onda y la de la luz es muy pequeña.

24. Comenta la frase «Luz más luz puede producir oscuridad».

Es una frase correcta. En el caso de luces coherentes en oposición de fase se producen interferencias destructivas, y si las amplitudes se anulan, luz más luz produce oscuridad.

25. Un haz de luz monocromática que se propaga por el aire incide sobre una superficie de agua. Determina el ángulo de incidencia (ángulo de Brewster) para el que el rayo reflejado sea perpendicular al refractado.

Datos: índice de refracción del agua = 1,33.

Como el ángulo de reflexión es igual al de incidencia, el ángulo que forma el rayo reflejado con la superficie del agua vale $90° - i$.

El ángulo que forma el rayo refractado con la superficie del agua vale $90° - r$.

De acuerdo con el enunciado, la suma de ambos ángulos es igual a 90°:

$90° - i + 90° - r = 90°$; $180° - i - r = 90°$; $r = 90° - \mathrm{i}$

A partir de la Ley de Snell de la refracción se obtiene el ángulo de incidencia:

$n \text{ sen } i = n_a \text{ sen } r$; $1 \cdot \text{sen } i = 1{,}33 \text{ sen } (90° - i)$;

$\text{sen } i = 1{,}3 \cos i$; $\text{tg } i = 1{,}33$;

$i = 53°$

Fibras ópticas

Cuestiones

1. Una fibra óptica está fabricada con dos materiales de índices de refracción 1,58 y 1,42, respectivamente. ¿Cuál corresponde al material situado en el interior de la fibra?:

***a)* 1,58; *b)* 1,42; *c)* 1,58 + 1,42 = 3**

a) El índice de refracción en el interior de la fibra debe ser el mayor.

2. ¿Cómo debe ser el ángulo de incidencia de la luz en el interior de la fibra óptica?

***a)* Mayor que el ángulo límite.**

***b)* Menor que el ángulo límite.**

***c)* Mayor que el ángulo de reflexión.**

a) Como tiene que producirse la reflexión total, el ángulo de incidencia debe ser mayor que el ángulo límite.

3. ¿Cuál es la relación del ángulo límite con los medios transparentes que intervienen en el fenómeno de reflexión total?

***a)* $\text{sen } \ell = n_{2,1}$; *b)* $\text{sen } \ell = n_{1,2}$; *c)* $\ell = \dfrac{n_2}{n_1}$**

La correcta es la *a)*.

4. El índice de refracción del núcleo central de una fibra óptica vale 1,62, y el de la superficie de la fibra es 1,48. ¿A partir de qué ángulo de incidencia se produce la reflexión interna total?

***a)* 58°; *b)* 66°; *c)* 45°**

b) $\text{sen } \ell = \dfrac{n_2}{n_1} = \dfrac{1{,}48}{1{,}62} = 0{,}913$; $\ell = 66°$

Cuestiones y problemas

1. *a)* ¿Qué aportación científica hace innecesaria la existencia del éter lumínico?

***b)* ¿Existe algún fenómeno óptico en el que la luz se comporte simultáneamente como onda y como partícula?**

a) La teoría electromagnética de Maxwell, al demostrar que la luz es una onda electromagnética y, por tanto, se propaga en el vacío sin necesitar un soporte material.

b) No existe ninguno. La luz se comporta como onda o como partícula, pero en ningún fenómeno manifiesta simultáneamente este carácter dual.

2. ¿Qué fenómenos ópticos pueden explicarse mediante la teoría de Newton sobre la naturaleza de la luz? ¿Cuáles apoyan la Teoría Ondulatoria de Huygens? ¿Qué fenómenos pueden interpretarse mediante ambas teorías?

Newton: efecto fotoeléctrico y efecto Compton.

Huygens: refracción, difracción, interferencias, polarización.

Ambas teorías: propagación rectilínea, reflexión y color de la luz.

3. Una onda luminosa que se propaga en el vacío tiene una longitud de onda de 580 nanómetros.

***a)* ¿Cuáles son su periodo y su frecuencia?**

***b)* ¿De qué color es?**

a) $T = \dfrac{\lambda}{c} = \dfrac{5{,}8 \cdot 10^{-7}\ \text{m}}{3 \cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1}} = 1{,}93 \cdot 10^{-15}\ \text{s}$

$f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{1{,}93 \cdot 10^{-15}\ \text{s}} = 5{,}17 \cdot 10^{14}\ \text{s}^{-1}$

b) Es una luz amarilla.

4. ¿En qué consiste el denominado efecto Doppler en las ondas luminosas?

En el cambio de frecuencia percibido por el observador cuando él o la fuente luminosa se mueven, acercándose o alejándose uno del otro.

5. La distancia entre los astros se expresa en ocasiones en años luz, ¿a qué longitud en kilómetros equivale un año luz (365 días)?

$x = ct = 3 \cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1} \cdot (365 \cdot 24 \cdot 3\,600)\ \text{s} =$

$= 9{,}46 \cdot 10^{15}\ \text{m} = 9{,}46 \cdot 10^{12}\ \text{km}$

6. La estrella Altair de la constelación de Águila está situada aproximadamente a 16 años luz de la Tierra. ¿A qué distancia en kilómetros se encuentra?

$x = ct = 3 \cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1} \cdot (365 \cdot 24 \cdot 3\,600)\ \text{s} =$

$= 1{,}5 \cdot 10^{17}\ \text{m} = 1{,}5 \cdot 10^{14}\ \text{km}$

7. El índice de refracción absoluto del hielo a 0 °C es 1,31 para una luz cuya longitud de onda es 589 nm en el aire.

***a)* ¿Cuál es la velocidad de esta luz en el hielo?**

***b)* ¿Cuál es su longitud de onda cuando atraviesa el hielo?**

a) $v = \dfrac{c}{n} = \dfrac{3 \cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1}}{1{,}31} = 2{,}29 \cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1}$

b) $\lambda_h = \dfrac{\lambda_0}{n} = \dfrac{598\ \text{nm}}{1{,}31} = 450\ \text{nm} = 45 \cdot 10^{-7}\ \text{m}$

8. Un rayo de luz de 625 nm de longitud de onda en el aire penetra en el agua (n = 1,33). PAU

***a)* ¿Cuál es su velocidad en el agua?**

***b)* ¿Cuál es su frecuencia y su longitud de onda en este medio?**

a) $v = \dfrac{c}{n} = \dfrac{3 \cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1}}{1{,}33} = 2{,}26 \cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1}$

b) Su frecuencia es la misma que en el aire:

$f = \dfrac{c}{\lambda_0} = \dfrac{3 \cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1}}{6{,}25 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} = 4{,}8 \cdot 10^{14}\ \text{s}^{-1}$

La longitud de onda cambia:

$\lambda_a = \dfrac{\lambda_0}{n} = \dfrac{625\ \text{nm}}{1{,}33} = 470\ \text{nm} = 4{,}7 \cdot 10^{-7}\ \text{m}$

9. Los índices de refracción absolutos del diamante y del rubí, para una determinada luz monocromática, son 2,41 y 1,76, respectivamente. Calcula el índice de refracción relativo del diamante respecto al rubí y del rubí respecto al diamante.

$n_{d,r} = \dfrac{n_d}{n_r} = \dfrac{2{,}41}{1{,}76} = 1{,}37\,;\qquad n_{r,d} = \dfrac{n_r}{n_d} = \dfrac{1{,}76}{2{,}41} = 0{,}730$

10. Sabiendo que el índice de refracción del diamante es muy elevado, ¿encuentras alguna razón científica que explique por qué también se les llama brillantes?

Como el índice de refracción del diamante es muy elevado, el ángulo límite para los medios diamante-aire es muy pequeño (24,5°), por eso, cuando un haz de luz penetra en el diamante se producen en sus caras reflexiones internas totales, hasta que el rayo incide en alguna cara con un ángulo inferior al límite; entonces se refracta y sale de nuevo al aire. Parece que la luz procede del diamante mismo y brilla intensamente.

11. Un rayo de luz monocromática pasa del agua (n = 1,33) al aire. Si el ángulo de incidencia es de 30,0°, calcula:

***a)* El valor del ángulo de refracción.**

***b)* El ángulo límite. ¿A partir de qué ángulo no se produce refracción?**

a) $\text{sen}\ r = \dfrac{n_1\ \text{sen}\ i}{n_2} = \dfrac{1{,}33\ \text{sen}\ 30°}{1} = 0{,}665\,;\qquad r = 41{,}7°$

b) $\text{sen}\ \ell = \dfrac{n_2}{n_1} = \dfrac{1}{1{,}33} = 0{,}752\,;\qquad \ell = 48{,}8°$

Para ángulos de incidencia mayores que 48,8° no se produce refracción, la reflexión es total.

12. ¿Cuál es el ángulo límite para la luz que pasa del benceno (n = 1,50) al agua (n = 1,33)? ¿Y si la luz pasa del agua al benceno?

$\text{sen}\ \ell = \dfrac{n_2}{n_1} = \dfrac{1{,}33}{1{,}50} = 0{,}887\,;\qquad \ell = 62{,}5°$

Si la luz pasa del agua al benceno ($n_1 < n_2$) no se produce el fenómeno de reflexión total, por lo que no existe un ángulo límite.

13. Una lámina de vidrio de 0,5 cm de espesor tiene un índice de refracción de 1,48 para un determinado rayo de luz. ¿Cuánto tiempo tarda este rayo en atravesarla perpendicularmente?

La velocidad de la luz en este vidrio es:

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}}{1{,}48} = 2{,}03 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

$$t = \frac{s}{v} = \frac{5 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{2{,}03 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}} = 2{,}46 \cdot 10^{-11} \text{ s}$$

14. Un haz de luz monocromática incide sobre la superficie de una lámina de vidrio de índice de refracción $n = 1{,}52$, con un ángulo de 45°. ¿Cuánto valen los ángulos de reflexión y refracción?

Reflexión: $i = r = 45°$.

Según el invariante de refracción:

$$\text{sen } r = \frac{n_1 \text{ sen } i}{n_2} = \frac{1 \cdot \text{sen } 45°}{1{,}52} = 0{,}465; \qquad r = 27{,}7°$$

15. Una superficie plana separa dos medios de índices de refracción distintos n_1 y n_2. Un rayo de luz incide desde el medio de índice n_1. Razona si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes:

PAU

***a)* El ángulo de incidencia es mayor que el ángulo de reflexión.**

***b)* Los ángulos de incidencia y de refracción son siempre iguales.**

***c)* El rayo incidente, el reflejado y el refractado están en el mismo plano.**

***d)* Si n_1 es mayor que n_2 se produce reflexión total para cualquier ángulo de incidencia.**

a) Falsa: el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

b) Falsa: los ángulos de incidencia y refracción son desiguales.

c) Verdadera: es una de las leyes de Snell.

d) Falsa: solo se produce reflexión total para ángulos de incidencia mayores que el ángulo límite.

16. Un rayo de luz incide sobre una lámina de caras planas y paralelas con un ángulo de 35°. ¿Con qué ángulo emerge de la lámina? ¿Experimenta algún cambio en su propagación por el interior de la lámina?

El ángulo de emergencia es igual al de incidencia: 35°.

El rayo de luz se refracta en ambas caras de la lámina y sufre un desplazamiento lateral.

17. Sobre una lámina de vidrio de caras plano-paralelas de 1,5 cm de espesor y de índice de refracción 1,58 situada en el aire, incide un rayo de luz monocromática con un ángulo de 30°.

PAU

***a)* Dibuja la marcha geométrica del rayo.**

***b)* Comprueba que el ángulo de incidencia es igual que el ángulo de emergencia.**

***c)* Determina la distancia recorrida por el rayo dentro de la lámina y el desplazamiento lateral del rayo emergente.**

a) Véase libro de texto, Apartado 9.5B.

b) Véase libro de texto, Apartado 9.5.

c) El ángulo de reflexión (r_1) en la primera cara de la lámina se calcula al aplicar la Ley de Snell de la refracción:

$$\text{sen } r_1 = \frac{n_1 \text{ sen } i_1}{n_2} = \frac{1 \cdot \text{sen } 30°}{1{,}58} = 0{,}316; \qquad r_1 = 18{,}4°$$

El desplazamiento lateral es el siguiente:

$$\delta = s\,\frac{\text{sen } (i_1 - r_1)}{\cos r_1} = 1{,}5 \text{ cm} \cdot \frac{\text{sen } (30° - 18{,}4°)}{\cos 18{,}4°} = 0{,}32 \text{ cm}$$

La distancia recorrida por el rayo dentro de la lámina es:

$$x = \frac{s}{\cos r_1} = \frac{15 \text{ cm}}{\cos 18{,}4°} = 1{,}6 \text{ cm}$$

18. Una lámina de vidrio de caras planas y paralelas, situada en el aire, tiene un espesor de 5,4 cm y un índice de refracción $n = 1{,}64$. Un rayo de luz monocromática incide en la cara superior de la lámina con un ángulo de 45°. Calcula:

***a)* Los valores del ángulo de refracción en el interior de la lámina y del ángulo de emergencia.**

***b)* El desplazamiento lateral experimentado por el citado rayo al atravesar la lámina y la distancia recorrida por el rayo dentro de la misma.**

a) El ángulo de emergencia es igual al de incidencia: 45°.

El ángulo de refracción es:

$$\text{sen } r_1 = \frac{n_1 \text{ sen } i_1}{n_2} = \frac{1 \cdot \text{sen } 45°}{1{,}64} = 0{,}431; \qquad r_1 = 25{,}5°$$

b) Desplazamiento lateral:

$$\delta = s\,\frac{\text{sen } (i_1 - r_1)}{\cos r_1} = 5{,}4 \text{ cm} \cdot \frac{\text{sen } (45° - 25{,}5°)}{\cos 25{,}5°} = 2{,}0 \text{ cm}$$

Distancia recorrida por el rayo en el interior de la lámina:

$$x = \frac{s}{\cos r_1} = \frac{5{,}4 \text{ cm}}{\cos 25{,}5°} = 6{,}0 \text{ cm}$$

19. Un rayo de luz blanca incide desde el aire sobre una lámina de vidrio con un ángulo de incidencia de 30,0°.

***a)* ¿Qué ángulo formarán entre sí en el interior del vidrio los rayos rojo y azul, componentes de la luz blanca, si los valores de los índices de refracción del vidrio para estos colores son, respectivamente, 1,612 y 1,671?**

***b)* ¿Cuáles son los valores de la frecuencia y de la longitud de onda correspondientes a cada una de estas radiaciones en el vidrio, si las longitudes de onda en el vacío son, respectivamente, 656,3 nm y 486,1 nm?**

a) Para la luz roja:

$$1 \cdot \text{sen } i = n_R \text{ sen } r_R$$

$$\text{sen } r_R = \frac{\text{sen } i}{n_R} = \frac{\text{sen } 30°}{1{,}612} = 0{,}3102\,; \qquad r_R = 18{,}07°$$

Para la luz azul:

$$\text{sen } r_A = \frac{\text{sen } 30°}{1{,}671} = 0{,}2992\,; \qquad r_A = 17{,}41°$$

Ángulo que forman los rayos rojo y azul en el interior del vidrio:
$\alpha = r_R - r_A = 18{,}07° - 17{,}41° = 0{,}66°$

b) Las frecuencias son iguales en el aire y en el vidrio:

$$f_R = \frac{c}{\lambda_R} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}}{6{,}563 \cdot 10^{-7} \text{ m}} = 4{,}57 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$$

$$f_A = \frac{c}{\lambda_A} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}}{4{,}861 \cdot 10^{-7} \text{ m}} = 6{,}17 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$$

Las longitudes de onda son las siguientes:

$$f_R = \frac{\lambda_0}{n_R} = \frac{6{,}563 \text{ nm}}{1{,}612} = 407{,}1 \text{ nm}$$

$$f_A = \frac{\lambda_0}{n_A} = \frac{4{,}861 \text{ nm}}{1{,}671} = 290{,}9 \text{ nm}$$

20. ¿Por qué no se observa dispersión cuando la luz blanca atraviesa una lámina de vidrio de caras planas y paralelas? PAU

En una lámina de caras planas y paralelas, el rayo luminoso que emerge de la lámina es paralelo al rayo incidente; en consecuencia, con luces no monocromáticas que provengan de fuentes no puntuales y dado que están formadas por multitud de rayos paralelos entre sí, el rayo emergente no está disperso, porque las diferentes longitudes de onda, que se propagan dentro de la lámina a distinta velocidad, se reúnen de nuevo a la salida; por ello, la luz emergente es idéntica a la incidente.

21. Sobre una lámina de vidrio, de índice de refracción n = 1,58 y un espesor de 8,1 mm, incide perpendicularmente un haz de luz de 585 nm de longitud de onda en el vacío. PAU

***a)* ¿Cuánto tarda la luz en atravesarla?**

***b)* ¿Cuántas longitudes de onda están contenidas en el espesor de la lámina?**

a) $v = \dfrac{c}{n} = \dfrac{3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}}{1{,}58} = 1{,}90 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1};$

$$t = \frac{s}{v} = \frac{8{,}1 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{1{,}9 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}} = 4{,}3 \cdot 10^{-11} \text{ s}$$

b) Longitud de onda en el vidrio:

$$\lambda_v = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{585 \text{ nm}}{1{,}58} = 370 \text{ nm}$$

Número de ondas:

$$k = \frac{s}{\lambda_v} = \frac{8{,}1 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{3{,}7 \cdot 10^{-7} \text{ m}} = 2{,}2 \cdot 10^4 \text{ ondas}$$

22. ¿El índice de refracción de un prisma óptico es igual para todas las luces? ¿Es mayor para la luz roja o para la luz azul?

No. Sólo es igual en el vacío.

El índice de refracción es mayor para la luz azul, por eso se refracta más que la luz roja.

23. Sobre un prisma de vidrio de ángulo 40° e índice de refracción 1,50 incide un rayo de luz monocromática. Si el ángulo de incidencia es de 45°, calcula el ángulo de emergencia y la desviación producida en el rayo. PAU

El ángulo de refracción en la primera cara del prisma se obtiene a partir de la Ley de Snell:

$$\text{sen } r = \frac{\text{sen } i}{n} = \frac{\text{sen } 45°}{1{,}50} = 0{,}471\,; \qquad r = 28{,}1°$$

Como el ángulo del prisma es de 40°, se cumple:

$r' = \varphi - r = 40° - 28{,}1° = 11{,}9°$

Al aplicar la Ley de Snell de la refracción a la segunda cara del prisma se obtiene:

$\text{sen } i' = n \text{ sen } r' = 1{,}50 \cdot \text{sen } 11{,}9° = 0{,}309\,; \qquad i' = 18°$

$\delta = i + i' - \varphi = 45° + 18° - 40° = 23°$

24. Sobre la cara lateral de un prisma de vidrio de índice de refracción 1,46 y ángulo en el vértice de 48°, situado en el aire, incide un rayo de luz monocromática con un ángulo de 22°. Determina:

***a)* El ángulo de desviación sufrido por el rayo.**

***b)* El ángulo de desviación mínima que corresponde a este prisma.**

a) Al aplicar la Ley de Snell de la refracción en la primera cara del prisma se obtiene:

$1 \cdot \text{sen } i = n \text{ sen } r$

$$\text{sen } r = \frac{\text{sen } i}{n} = \frac{\text{sen } 22°}{1{,}46} = 0{,}257\,; \qquad r = 14{,}9°$$

$r' = \varphi - r = 48° - 14{,}9° = 33{,}1°$

En la segunda cara del prisma se cumple:

$\text{sen } i' = n \text{ sen } r' = 1{,}46 \cdot \text{sen } 33{,}1° = 0{,}797\,; \qquad i' = 52{,}8°$

Ángulo de desviación:

$\delta = i + i' - \varphi = 22° + 52{,}8° - 48° = 26{,}8° \cong 27°$

b) El ángulo de desviación mínima δ_m se produce cuando $i = i'$. En estas condiciones, $\pi = 2r$, lo que permite calcular el ángulo de incidencia en la primera cara del prisma:

$$r = \frac{\varphi}{2} = \frac{48°}{2} = 24°\,; \qquad 1 \cdot \text{sen } i = 1{,}46 \text{ sen } r;$$

$\text{sen } i = 1{,}46 \cdot \text{sen } 24° = 0{,}594\,; \qquad i = 36{,}4°$

$\delta_m = 2i - \varphi = 2 \cdot 36{,}4° - 48° = 24{,}8° \cong 25°$

25. Sobre un prisma de vidrio de 30° e índice de refracción 1,52 incide un rayo de luz monocromática perpendicularmente a una de sus caras. PAU

***a)* Dibuja la marcha geométrica del rayo.**

***b)* Calcula el ángulo de desviación.**

Como el rayo de luz incide perpendicularmente en la primera cara del prisma, el ángulo de incidencia es igual a 0° y el rayo no sufre desviación, $r = 0°$.

El ángulo de incidencia i en la segunda cara es:

$n \text{ sen } r' = 1 \cdot \text{sen } i'$; $\text{sen } i' = 1{,}52 \cdot \text{sen } 30° = 0{,}76$

$i' = 49{,}5°$

El ángulo de desviación es:

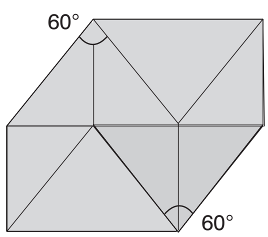
$\delta = i + i' - \varphi = 0° - 49{,}5° - 30° = 19{,}5°$

26. Determina el índice de refracción de un prisma sabiendo que la trayectoria del rayo luminoso es paralela a la base del prisma para un ángulo de incidencia de 23°. El ángulo del prisma es de 30°.

Si el rayo luminoso es paralelo a la base del prisma, los ángulos de incidencia i y de emergencia i' son iguales, y la desviación es mínima:
$\delta_m = 2i - \varphi = 2 \cdot 23° - 30° = 16°$

$$n = \frac{\text{sen } \frac{\delta_m + \varphi}{2}}{\text{sen } \frac{\varphi}{2}} = \frac{\text{sen } \frac{16° + 30°}{2}}{\text{sen } \frac{30°}{2}} = \frac{\text{sen } 23°}{\text{sen } 15°} = 1{,}51$$

27. A un prisma de vidrio de ángulo 60° e índice de refracción $n = \sqrt{2}$ se le acopla otro prisma idéntico como indica la figura. Determina el ángulo de emergencia en el segundo prisma, si el ángulo de incidencia en el primer prisma es de 30°.



El sistema formado por los dos prismas acoplados se comporta como una lámina de caras planas y paralelas. En consecuencia, el rayo emerge paralelo al rayo incidente. El ángulo de emergencia es igual al de incidencia, 30°.

28. Sobre un prisma de vidrio de índice de refracción igual a 1,46, cuyo ángulo es de 60°, incide un rayo de luz monocromática perpendicularmente a la cara del prisma.

***a)* Deduce numéricamente la marcha del rayo luminoso.**

***b)* Dibuja la marcha geométrica del rayo.**

Si el rayo de luz incide perpendicularmente en la primera cara del prisma, el ángulo de incidencia i es igual a cero y el rayo no sufre desviación: $r = 0°$.

El ángulo de incidencia en la segunda cara del prisma r' es:

$r' = \varphi - r = 60° - 0° = 60°$

Al aplicar la segunda Ley de Snell de la refracción en esta cara, resulta:

$n \text{ sen } r' = 1 \cdot \text{sen } i'$; $\text{sen } i' = 1{,}46 \cdot \text{sen } 60° = 1{,}26$

Este es un resultado absurdo, porque el seno de un ángulo nunca puede tener este valor. Lo que ocurre es que el ángulo de incidencia en la segunda cara del prisma (60°) es mayor que el ángulo límite para la refracción vidrio-aire. En efecto:

$\text{sen } \ell = \frac{1}{1{,}46} = 0{,}685$; $\ell = 43{,}2°$

Como el rayo luminoso incide en la segunda cara del prisma con un ángulo mayor que el ángulo límite, se produce la reflexión total en esta cara.

29. ¿Cómo explicas la formación del arco iris? ¿Por qué no aparece siempre que llueve?

El arco iris se forma por dispersión de la luz del Sol en las gotas de lluvia. Para que se forme debe lucir el Sol en el momento de la lluvia, y para verlo, debemos situarnos de modo que al mirar la nube el Sol quede a nuestra espalda.

30. ¿Qué quiere decir que los espectros de emisión y de absorción de un mismo elemento químico son complementarios?

Que las frecuencias emitidas y absorbidas son las mismas. Las mismas rayas que aparecen en el espectro de emisión desaparecen (aparecen rayas negras) en el espectro de absorción.

Actividades

1. Define los siguientes conceptos: dioptrio, eje óptico, radio de curvatura, imagen real y centro óptico.

Dioptrio: conjunto formado por dos medios transparentes, homogéneos e isótropos, con índices de refracción distintos, separados por una superficie.

Eje óptico: eje común de todos los dioptrios de un sistema óptico. También se denomina eje principal.

Radio de curvatura: radio de la superficie esférica a la que pertenece el dioptrio esférico.

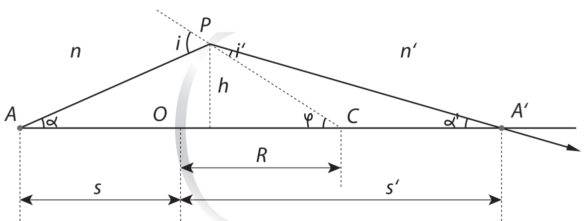
Imagen real: punto en el que se cortan los rayos que atraviesan un sistema óptico. No se ven a simple vista y pueden recogerse sobre una pantalla.

Centro óptico: es el punto de intersección del dioptrio esférico con el eje óptico.

2. Indica las características de las imágenes reales y de las imágenes virtuales.

Las imágenes virtuales no existen realmente, se ven y no pueden recogerse sobre una pantalla. Las imágenes reales no se ven a simple vista, pero pueden recogerse en una pantalla.

3. Averigua los signos de las siguientes magnitudes lineales en la Figura 10.3: *s*, *s′*, *R* y *h*.



Positivos: R, s', h.

Negativos: s

4. En la misma figura averigua los signos de los siguientes ángulos: α, α' y φ.

Positivos: φ, α'

Negativos: α

5. ¿Cuál es el signo del radio de curvatura del dioptrio si su centro de curvatura está situado a la izquierda del vértice del dioptrio?

El radio de curvatura es negativo.

6. En un dioptrio esférico convexo, las distancias focales objeto e imagen miden, respectivamente, –20 y 40 cm. Calcula:

a) **El radio de curvatura del dioptrio.**

b) **La posición de la imagen cuando el objeto se sitúa a 10 cm delante del vértice del dioptrio.**

c) **El índice de refracción del segundo medio si el primero es el aire.**

a) $R = f + f' = -20\text{ cm} + 40\text{ cm} = 20\text{ cm}$

En efecto, como el dioptrio es convexo, el radio es positivo.

b) $\dfrac{f'}{s'} + \dfrac{f}{s} = 1; \qquad \dfrac{40\text{ cm}}{s'} + \dfrac{-20\text{ cm}}{-10\text{ cm}} = 1; \qquad s' = -40\text{ cm}$

La imagen se forma delante del dioptrio.

c) $\dfrac{f}{f'} = -\dfrac{n}{n'}; \qquad \dfrac{-20\text{ cm}}{40\text{ cm}} = -\dfrac{1}{n'}; \qquad n' = 2$

7. En un dioptrio esférico cóncavo de 10 cm de radio se sitúa un objeto de 2 cm de tamaño, 30 cm delante de la superficie de separación de los dos medios. Los índices de refracción son 1,0 y 1,5 para el primero y el segundo medio.

a) **¿Dónde se forma la imagen?**

b) **¿Cuál es el tamaño de la imagen?**

a) La posición de la imagen se obtiene mediante la ecuación:

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n'-n}{R}; \quad \frac{1{,}5}{s'} - \frac{1}{-30\text{ cm}} = \frac{1{,}5-1}{-10\text{ cm}}; \quad s' = -18\text{ cm}$$

Como la distancia imagen es negativa, la imagen se forma delante de la superficie del dioptrio.

b) El tamaño de la imagen se obtiene a partir de la fórmula del aumento lateral:

$$M_L = \frac{y'}{y} = \frac{n\,s'}{n'\,s}; \qquad \frac{y'}{2\text{ cm}} = \frac{1\cdot(-18\text{ cm})}{1{,}5\cdot(-30\text{ cm})}; \qquad y' = 0{,}8\text{ cm}$$

La imagen es derecha y de menor tamaño que el objeto.

8. Una piscina tiene una profundidad de 2,50 m. ¿Cuál será su profundidad aparente? n_a = 1,33.

La profundidad aparente se obtiene a partir de la ecuación del dioptrio plano:

$$\frac{n'}{s'} = \frac{n}{s}; \qquad \frac{1}{s'} = \frac{1{,}33}{-2{,}5\text{ m}}; \qquad s' = -1{,}88\text{ m}$$

9. Un avión pasa a 275 m de altura sobre la superficie de un lago. ¿A qué distancia ve el avión un buceador?

Al aplicar la ecuación $\dfrac{s}{s'} = \dfrac{n'}{n}$ se obtiene:

$$\frac{s'}{275\text{ m}} = \frac{1{,}33}{1}; \qquad s' = 366\text{ m}$$

10. Un niño se coloca delante de un espejo plano a 30 cm de él.

a) **¿A qué distancia se forma la imagen?**

b) **Si el espejo mide 65 cm y el niño, que ve todo su cuerpo, comprueba que sobran 10 cm de espejo por arriba y por debajo de su imagen, ¿cuál es la estatura del niño?**

c) **¿Qué tamaño tiene la imagen? ¿Es real o virtual?**

d) **¿Existe realmente la imagen? ¿Puede recogerse en una pantalla?**

a) La imagen se forma 30 cm detrás del espejo.

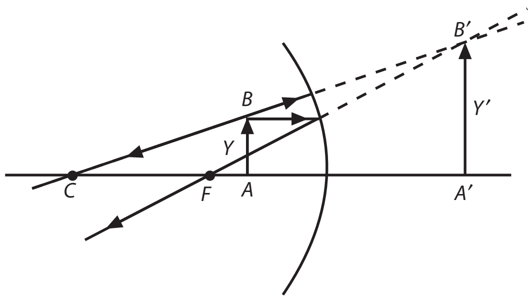
b) (65 cm – 10 cm – 10 cm) · 2 = 90 cm.

c) La imagen mide 90 cm, y es virtual.

d) No, porque las imágenes virtuales se ven pero no existen y, puesto que no existen, no pueden recogerse en pantallas.

11. ¿Cómo debe ser un espejo esférico para formar una imagen virtual mayor que el objeto?

Debe ser un espejo cóncavo, y el objeto debe estar situado entre el foco y el espejo.



12. Un objeto de 1,5 cm de altura se encuentra delante de un espejo esférico de 14 cm de radio, a 20 cm del vértice del espejo. ¿Dónde está situada la imagen y qué características tiene?

a) **El espejo es cóncavo.**

b) **El espejo es convexo.**

a) La posición de la imagen se obtiene a partir de la ecuación fundamental de los espejos esféricos:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{R}; \quad \frac{1}{s'} + \frac{1}{-20\text{ cm}} = \frac{2}{-14\text{ cm}}; \quad s' = -11\text{ cm}$$

El tamaño de la imagen se obtiene a partir de la ecuación del aumento lateral:

$$M_L = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}; \quad \frac{y'}{1{,}5\text{ cm}} = -\frac{-11\text{ cm}}{-20\text{ cm}}; \quad y' = -0{,}8\text{ cm}$$

La imagen es real, invertida y de menor tamaño que el objeto.

b) Si el espejo es convexo, el problema es similar, pero el radio de curvatura es positivo.

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{-20\text{ cm}} = \frac{2}{14\text{ cm}}; \quad s' = 5{,}2\text{ cm}$$

$$\frac{y'}{1{,}5\text{ cm}} = -\frac{5{,}2\text{ cm}}{-20\text{ cm}}; \quad y' = 0{,}4\text{ cm}$$

La imagen es virtual, derecha y de menor tamaño que el objeto.

13. Deduce la ecuación aplicable a los espejos planos a partir de la Ecuación Fundamental de los Espejos Esféricos.

En un espejo plano el radio de curvatura es infinito.

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{R} = \frac{2}{\infty} = 0; \quad \frac{1}{s'} = -\frac{1}{s}; \quad s' = -s$$

14. Si al resolver un problema de espejos esféricos la distancia imagen es negativa y el aumento lateral negativo, ¿qué características tiene la imagen?

Como la distancia imagen es negativa, la imagen es real.

Por ser el aumento lateral negativo, la imagen es invertida.

15. Un espejo esférico de 50 cm de radio produce una imagen real cuyo tamaño es la mitad que el objeto. ¿De qué tipo es el espejo? ¿Dónde hay que colocar el objeto?

Como la imagen es real, el espejo es cóncavo y por tanto la imagen es invertida.

La posición del objeto se obtiene a partir de la Ecuación Fundamental de los Espejos Esféricos y del aumento lateral:

$$y' = -\frac{y}{2}; \quad M_L = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}; \quad \frac{\frac{-y}{2}}{y} = -\frac{s'}{s}; \quad s' = \frac{s}{2}$$

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{R}; \quad \frac{2}{s} + \frac{1}{s} = \frac{2}{R}; \quad \frac{3}{s} = \frac{2}{-50\text{ cm}};$$

$s = -75$ cm

El objeto está situado a 75 cm del espejo, a una distancia igual a $3f$.

16. ¿Qué tipo de imagen se obtiene con un espejo esférico convexo? Efectúa las construcciones geométricas adecuadas para justificar tu respuesta. ¿El foco del espejo es virtual o real?

Todas las imágenes formadas en espejos convexos son virtuales, derechas y de menor tamaño que el objeto (véase Apartado 10.5 del libro de texto).

El foco del espejo es virtual: un rayo paralelo al eje principal del espejo no pasa por el foco al reflejarse, pasa por el foco la prolongación en sentido contrario del rayo reflejado.

17. Un objeto de 2 cm de altura está situado a 30 cm de una lente convergente de 20 cm de distancia focal.

a) **Calcula la posición y el tamaño de la imagen.**

b) **Construye gráficamente la imagen.**

a) La posición de la imagen se calcula aplicando la ecuación fundamental de las lentes delgadas:

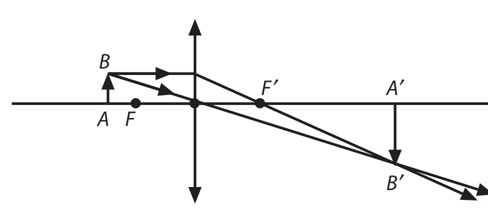
$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}; \quad \frac{1}{s'} - \frac{1}{-30\text{ cm}} = \frac{1}{20\text{ cm}}; \quad s' = 60\text{ cm}$$

El tamaño de la imagen se obtiene a partir de la ecuación del aumento lateral:

$$M_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}; \quad \frac{y'}{2\text{ cm}} = \frac{60\text{ cm}}{-30\text{ cm}}; \quad y' = -4\text{ cm}$$

por tanto, la imagen es invertida y de mayor tamaño que el objeto.

b)



18. Responde:

a) **¿Cuál es la potencia de un sistema óptico formado por una lente convergente de 2,5 dioptrías en contacto con otra divergente de 4,3 dioptrías?**

***b)* ¿Cuál es la distancia focal del sistema?**

a) En una lente convergente la potencia es positiva y en una lente divergente es negativa; por tanto:

$$P = P_1 - P_2 = 2{,}5 + (-4{,}3) = -1{,}8 \text{ D}$$

b) $P = \dfrac{1}{f'}$;

$$f' = \frac{1}{P} = \frac{1}{-1{,}8 \text{ m}^{-1}} = -0{,}55 \text{ m}$$

19. Mediante una lente delgada de focal $f' = 10$ cm se quiere obtener una imagen de tamaño doble que el objeto. Calcula la posición donde debe colocarse el objeto si la imagen debe ser real e invertida.

PAU

Como el tamaño de la imagen es el doble que el del objeto y la imagen es real e invertida, se cumple:

$$M_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} = -2; \qquad s' = -2s$$

De la ecuación fundamental de las lentes delgadas se obtiene:

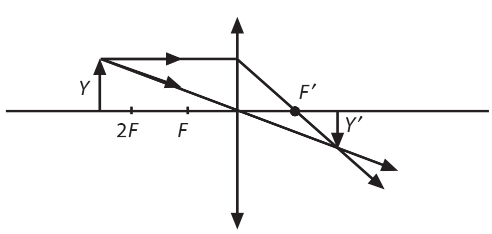
$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}; \qquad \frac{1}{-2s} - \frac{1}{s} = \frac{1}{10 \text{ cm}}; \qquad s = -15 \text{ cm}$$

20. Explica mediante construcciones geométricas qué posiciones debe ocupar un objeto, delante de una lente delgada convergente, para obtener:

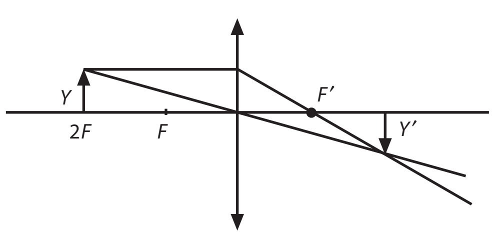
***a)* Una imagen real de tamaño menor, igual o mayor que el objeto.**

***b)* Una imagen virtual.**

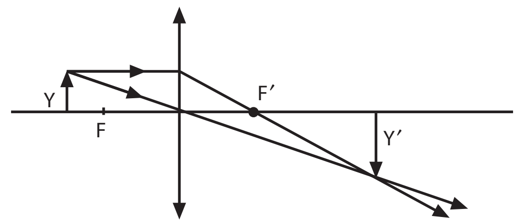
a_1) Si el objeto se sitúa a una distancia de la lente mayor que el doble de la distancia focal, la imagen es real, invertida y de menor tamaño que el objeto:



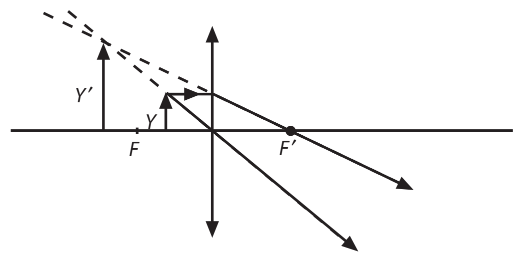
a_2) Si el objeto está situado a una distancia igual al doble de la distancia focal, se forma una imagen real, invertida y de igual tamaño que el objeto:



a_3) Cuando el objeto está situado fuera de la distancia focal pero a una distancia menor que el doble de esta, la imagen es real, invertida y de mayor tamaño que el objeto:



b) Si el objeto está situado dentro de la distancia focal, se forma una imagen virtual, derecha y de mayor tamaño que el objeto:



21. Un sistema óptico está formado por dos lentes convergentes colocadas con una separación de 55 cm. La primera lente tiene una distancia focal de 10 cm y la segunda de 20 cm. Si se coloca un objeto de 2,5 cm de altura a 15 cm de la primera lente, ¿cuáles son la posición, el tamaño y las características de la imagen final?

En la primera lente, la imagen se forma a la distancia s_1':

$$\frac{1}{s_1'} - \frac{1}{s_1} = \frac{1}{f_1'}; \qquad \frac{1}{s_1'} - \frac{1}{-15 \text{ cm}} = \frac{1}{10 \text{ cm}}; \qquad s_1' = 30 \text{ cm}$$

Esta imagen hace de objeto respecto a la segunda lente; por tanto, está situada a 25 cm (55 cm − 30 cm) de la segunda lente ($s_2 = -25$ cm):

$$\frac{1}{s_2'} - \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f_2'}; \qquad \frac{1}{s_2'} - \frac{1}{-25 \text{ cm}} = \frac{1}{20 \text{ cm}}; \qquad s_2' = 100 \text{ cm}$$

El tamaño de la imagen final se puede obtener al considerar que el aumento total es igual al producto de los aumentos:

$$M_L = M_{L1} M_{L2} = \frac{s_1' \, s_2'}{s_1 \, s_2} = \frac{30 \text{ cm}}{-15 \text{ cm}} \cdot \frac{100 \text{ cm}}{-25 \text{ cm}} = 8$$

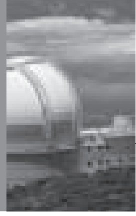
$$M_L = \frac{y'}{y} = 8; \qquad y' = 8y; \qquad y' = 8 \cdot 2{,}5 \text{ cm} = 20 \text{ cm}$$

La imagen es real (s_2' es positiva), derecha (y' es positiva) y de mayor tamaño que el objeto.

22. Una lupa se emplea para poder observar con detalle objetos de pequeño tamaño. ¿Qué tipo de lente es? ¿Dónde debe situarse el objeto a observar?¿Qué características tiene la imagen?

PAU

Es una lente convergente. El objeto debe situarse entre el foco y la lente, y la imagen que se forma es derecha y virtual.



Óptica del ojo humano

Cuestiones

1. Las imágenes que se forman en la retina son:

a) reales y derechas,

b) virtuales e invertidas,

***c)* reales e invertidas.**

2. La hipermetropía se corrige con lentes cuya potencia es:

***a)* siempre positiva,**

***b)* siempre negativa,**

***c)* puede ser positiva o negativa.**

a) La hipermetropía se corrige con lentes convergentes, por tanto, su potencia siempre es positiva.

3. El funcionamiento del ojo humano es semejante al de:

***a)* una cámara fotográfica,**

b) una lupa,

c) un microscopio.

4. La lente utilizada para corregir la miopía de un ojo cuyo punto remoto está situado a 40 cm tiene una potencia de:

***a)* 2,5 D;**

***b)* −2,5 D;**

***c)* −0,4 D.**

b) $\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = P$; $\frac{1}{-0{,}4\text{ m}} - \frac{1}{-\infty} = P$; $P = -2{,}5$ D

Cuestiones y problemas

1. Calcula las distancias focales de un dioptrio esférico convexo de 10 cm de radio en el que los índices de refracción de los dos medios transparentes son 1,0 y 1,6, respectivamente.

Las distancias focales objeto e imagen son las siguientes:

$$f = -R\,\frac{n}{n'-n} = -10\text{ cm}\cdot\frac{1}{1{,}6-1} = -17\text{ cm}$$

$$f' = R\,\frac{n'}{n'-n} = 10\text{ cm}\cdot\frac{1{,}6}{1{,}6-1} = 27\text{ cm}$$

2. Determina en un dioptrio esférico cóncavo de 15 cm de radio la posición de la imagen de un objeto de 1 cm de tamaño, situado 20 cm delante de la superficie de separación de los dos medios. ¿Cuál es el tamaño de la imagen? Los índices de refracción del primer y segundo medio son 1,33 y 1,54, respectivamente.

La posición de la imagen se obtiene a partir de la ecuación fundamental del dioptrio esférico:

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n'-n}{R};\qquad \frac{1{,}54}{s'} - \frac{1{,}33}{-20\text{ cm}} = \frac{1{,}54-1{,}33}{-15\text{ cm}};$$

$s' = -19$ cm

El tamaño de la imagen se obtiene a partir del aumento lateral:

$$M_L = \frac{y'}{y} = \frac{ns'}{n's};\qquad \frac{y'}{1\text{ cm}} = \frac{1{,}33\cdot(-19\text{ cm})}{1{,}54\cdot(-20\text{ cm})};\qquad y' = 0{,}8\text{ cm}$$

3. Una varilla de vidrio, de índice de refracción 1,5, termina en un extremo en una cara esférica cóncava de 10 cm de radio. Delante de ella, a 25 cm del vértice, se coloca un objeto de 4 mm de altura sobre el eje. Calcula:

***a)* La posición y el tamaño de la imagen.**

***b)* Lo mismo, si el extremo de la varilla es convexo.**

a) La posición y el tamaño de la imagen se obtienen a partir de la ecuación fundamental del dioptrio esférico y del aumento lateral:

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n'-n}{R};\qquad \frac{1{,}5}{s'} - \frac{1}{-25\text{ cm}} = \frac{1{,}5-1}{-10\text{ cm}};$$

$s' = -17$ cm

$$\frac{y'}{y} = \frac{ns'}{n's};\qquad \frac{y'}{0{,}4\text{ cm}} = \frac{1\cdot(-17\text{ cm})}{1{,}5\cdot(-25\text{ cm})};\qquad y' = 0{,}18\text{ cm}$$

b) El problema es igual al apartado anterior, pero $R = 10$ cm.

$$\frac{1{,}5}{s'} - \frac{1}{-25\text{ cm}} = \frac{1{,}5-1}{10\text{ cm}};\qquad s' = 150\text{ cm}$$

$$\frac{y'}{0{,}4\text{ cm}} = \frac{1\cdot 150\text{ cm}}{1{,}5\cdot(-25\text{ cm})};\qquad y' = -1{,}6\text{ cm}$$

4. En el fondo de un estanque lleno de agua (n = 1,33), con una profundidad de 1,4 m, se encuentra una pequeña piedra.

***a)* ¿A qué distancia de la superficie del agua se ve la piedra?**

***b)* ¿Cómo es el tamaño de la imagen?**

a) Al aplicar la ecuación del dioptrio plano, resulta:

$$\frac{n'}{s'} = \frac{n}{s};\qquad \frac{1}{s'} = \frac{1{,}33}{-1{,}4\text{ m}};\qquad s' = -1{,}05\text{ m}$$

b) La imagen tiene el mismo tamaño que el objeto.

5. Un pescador se encuentra sobre su barca, a una altura sobre la superficie del lago de 2 m, y un pez nada 30 cm por debajo de la superficie, en la vertical del pescador. ¿A qué distancia ve el pescador al pez? El índice de refracción del agua es 1,33.

La profundidad aparente a la que se encuentra el pez es:

$$\frac{s'}{s} = \frac{n'}{n};\qquad \frac{s'}{-30\text{ cm}} = \frac{1}{1{,}33};\qquad s' = -22{,}6\text{ cm}$$

Para el pescador, el pez se encuentra a una distancia total de 2,2 m.

6. Un objeto de 0,5 m de altura se coloca delante de un espejo plano y a 40 cm de él.

a) ¿A qué distancia del espejo se forma la imagen?

b) ¿Qué tamaño tiene la imagen?

a) $s' = -s = -(-40 \text{ cm}) = 40 \text{ cm}$

b) $y' = y = 0{,}5 \text{ m}$

7. Indica las características de la imagen formada por un espejo esférico si la distancia imagen es negativa y el aumento lateral es positivo. ¿Qué tipo de espejo es?

Se trata de un enunciado teórico, no real. Como la imagen es real, el espejo es cóncavo, pero estos espejos nunca forman imágenes derechas que sean reales; por tanto, ningún espejo esférico puede formar una imagen con esas características.

8. Delante de un espejo cóncavo cuyo radio de curvatura es de 40 cm, se sitúa un objeto de 3 cm de altura, perpendicularmente al eje óptico del espejo, a una distancia de 60 cm. Calcula:

a) La distancia focal del espejo.

b) La posición de la imagen.

c) El tamaño de la imagen.

d) Construye gráficamente la imagen.

a) Como el espejo es cóncavo, su radio de curvatura es negativo.

$$f = \frac{R}{2} = \frac{-40 \text{ cm}}{2} = -20 \text{ cm}$$

b) La posición de la imagen se obtiene a partir de la ecuación fundamental de los espejos esféricos:

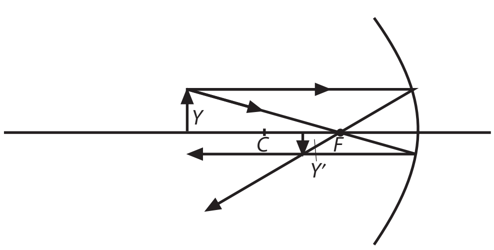
$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f}; \qquad \frac{1}{s'} - \frac{1}{-60 \text{ cm}} = \frac{1}{-20 \text{ cm}}; \qquad s' = -30 \text{ cm}$$

c) El tamaño de la imagen se obtiene a partir de la ecuación del aumento lateral:

$$M_L = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} = \frac{y'}{3 \text{ cm}} = \frac{-30 \text{ cm}}{-60 \text{ cm}}; \qquad s' = -1{,}5 \text{ cm}$$

Como s' e y' son negativos, la imagen es real e invertida y, además, de menor tamaño que el objeto.

d)



9. Un objeto de 12 mm de altura se encuentra delante de un espejo convexo de 20 cm de radio, a 10 cm del vértice del mismo.
PAU

a) ¿Cómo es la imagen formada por el espejo y dónde está situada?

b) Efectúa la construcción geométrica de la imagen.

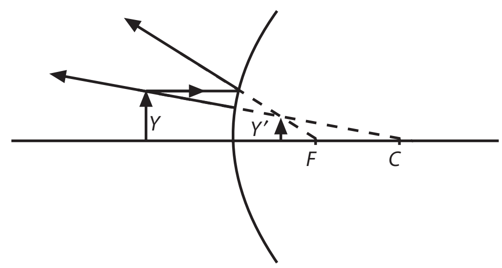
La posición de la imagen se obtiene aplicando la ecuación fundamental de los espejos esféricos y su tamaño a partir del aumento lateral:

a) $\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{R}; \qquad \frac{1}{s'} + \frac{1}{-10 \text{ cm}} = \frac{2}{20 \text{ cm}}; \qquad s' = 5 \text{ cm}$

$$M_L = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}; \qquad \frac{y'}{1{,}2 \text{ cm}} = -\frac{5 \text{ cm}}{-10 \text{ cm}}; \qquad y' = 0{,}6 \text{ cm}$$

La imagen es virtual, derecha y de menor tamaño que el objeto.

b)



10. ¿A qué distancia de un espejo convexo debe colocarse un lápiz para que el tamaño de la imagen sea la mitad del tamaño de este? El radio de curvatura del espejo es de 30 cm.
PAU

De acuerdo con el enunciado, se cumple $y' = \frac{y}{2}$. A partir de la ecuación fundamental de los espejos esféricos y del aumento lateral, se obtiene la distancia objeto s:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}; \qquad \frac{\frac{y}{2}}{y} = -\frac{s'}{s}; \qquad s' = -\frac{s}{2}$$

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{R}; \qquad \frac{1}{-\frac{s}{2}} + \frac{1}{s} = \frac{2}{R}; \qquad s = -\frac{R}{2} = \frac{-30 \text{ cm}}{2} = -15 \text{ cm}$$

11. Cierto espejo colocado a 2 m de un objeto produce una imagen derecha y de tamaño tres veces mayor que el objeto. ¿El espejo es convexo o cóncavo? ¿Cuánto mide el radio de curvatura del espejo?

El espejo es cóncavo. Los espejos convexos forman imágenes virtuales, derechas y de menor tamaño que el objeto.

$$M_L = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}; \qquad 3 = -\frac{s'}{-2 \text{ m}}; \qquad s' = 6 \text{ m}$$

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{R}; \quad \frac{1}{6 \text{ m}} + \frac{1}{-2 \text{ m}} = \frac{2}{R}$$

$R = -6$ m (espejo cóncavo: $R < 0$)

12. Un objeto situado 12 cm por delante de un espejo cóncavo origina una imagen virtual cuatro veces mayor que él. ¿Cuál es el radio de curvatura y la distancia focal del espejo?

Para que la imagen sea virtual, el objeto debe estar situado entre el foco y el espejo; así, la imagen es virtual, derecha y de mayor tamaño que el objeto.

A partir de la ecuación del aumento lateral y de la ecuación fundamental de los espejos esféricos, se obtiene la distancia focal:

$$M_L = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}; \qquad \frac{4y}{y} = -\frac{s'}{s}; \qquad s' = -4s$$

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f}; \qquad \frac{1}{-4s} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

$$f = \frac{4s}{3} = \frac{4 \cdot (-12\text{ cm})}{3} = -16\text{ cm}$$

Como $R = 2f$, se obtiene $R = 2 \cdot (-16\text{ cm}) = -32\text{ cm}$

En efecto, el objeto está situado entre el foco y el espejo.

13. Un espejo esférico convexo, que actúa de retrovisor de un automóvil parado, proporciona una imagen virtual de un vehículo que se aproxima con velocidad constante. El tamaño de la imagen es $\frac{1}{20}$ del tamaño real del vehículo cuando este se encuentra a 10 m del espejo. Calcula:

***a)* El radio de curvatura del espejo.**

***b)* La posición de la imagen formada.**

***c)* Si dos segundos después la imagen observada en el espejo se ha duplicado, ¿a qué distancia del espejo se encuentra ahora el vehículo?**

***d)* ¿Cuál es la velocidad del vehículo?**

a) $\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}; \qquad \frac{1}{20} - \frac{s'}{-10\text{ m}}; \qquad s' = 0{,}5\text{ m}$

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{R}; \qquad \frac{1}{0{,}5\text{ m}} + \frac{1}{-10\text{ m}} = \frac{2}{R}; \qquad R = 1{,}05\text{ m}$$

b) $s' = 0{,}5\text{ m}$

c) Si la imagen se duplica: $M_L = \frac{1}{10}$

$$M_L = -\frac{s'}{s}; \qquad \frac{1}{10} = -\frac{s'}{s}$$

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{R}; \qquad \frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{1{,}05}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se obtiene:

$s = -4{,}7\text{ m}$

d) $v = \frac{e}{t} = \frac{10\text{ m} - 4{,}7\text{ m}}{2s} = 2{,}6\text{ m s}^{-1}$

14. ¿Se puede distinguir al tacto una lente convergente de una divergente?

PAU

Las lentes convergentes son más gruesas en el centro que en los bordes. En las lentes divergentes ocurre lo contrario.

15. ¿Qué distancia focal imagen tiene una lente de –0,5 dioptrías?

$$P = \frac{1}{f'}; \qquad f' = \frac{1}{P} = \frac{1}{-0{,}5\text{ m}^{-1}} = -2\text{ m}; \qquad f = -f' = 2\text{ m}$$

Se trata de una lente divergente, ya que su potencia y su distancia focal imagen son negativas.

16. ¿Qué distancia focal imagen tiene una lente de –5,5 dioptrías? ¿Cuánto vale su distancia focal objeto?

$$P = \frac{1}{f'}; \qquad f' = \frac{1}{P} = \frac{1}{-5{,}5\text{ m}^{-1}} = -0{,}18\text{ m}; \qquad f = -f' = 0{,}18\text{ m}$$

17. Indica las características de la imagen formada por una lente si la distancia imagen es positiva.

Como la distancia imagen es positiva, la imagen es real y, además será invertida.

18. Un objeto de 2,0 cm de altura se sitúa a 25 cm del centro óptico de una lente convergente de 40 cm de distancia focal.

***a)* Calcula la posición y el tamaño de la imagen.**

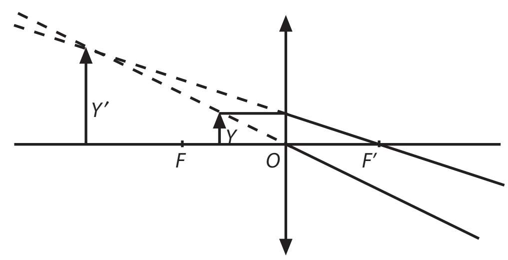
***b)* Construye la imagen gráficamente.**

a) La posición y el tamaño de la imagen se calculan mediante la ecuación fundamental de las lentes delgadas y la del aumento lateral:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}; \qquad \frac{1}{s'} - \frac{1}{-25\text{ cm}} = \frac{1}{40\text{ cm}}; \qquad s' = -67\text{ cm}$$

$$M_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}; \qquad \frac{y'}{2\text{ cm}} = \frac{-67\text{ cm}}{-25\text{ cm}}; \qquad y' = 5{,}3\text{ cm}$$

b) La imagen es virtual, derecha y mayor que el objeto.



19. Un objeto de 10 mm de altura se sitúa a 20 cm del centro óptico de una lente divergente de 30 cm de distancia focal.

***a)* Calcula la posición y el tamaño de la imagen.**

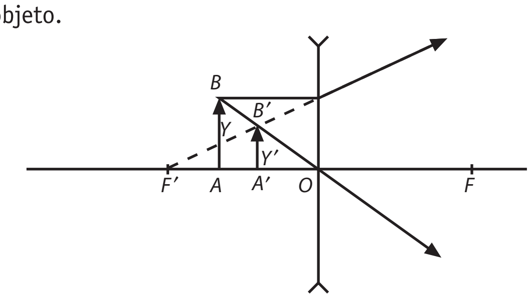
***b)* Construye la imagen gráficamente.**

a) La posición y el tamaño de la imagen son:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}; \qquad \frac{1}{s'} - \frac{1}{-20\text{ cm}} = \frac{1}{-30\text{ cm}}; \qquad s' = -12\text{ cm}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}; \qquad \frac{y'}{1\text{ cm}} = \frac{-12\text{ cm}}{-20\text{ cm}}; \qquad y' = 0{,}6\text{ cm}$$

b) La imagen es virtual, derecha y de menor tamaño que el objeto.

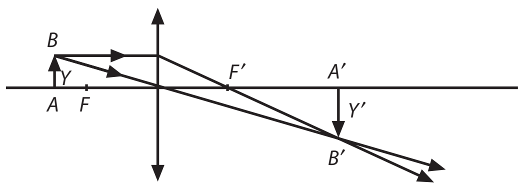


20. Un objeto de 1,2 cm de altura está situado a 20 cm de una lente convergente de 14 cm de distancia focal. Calcula la posición y el tamaño de la imagen. Halla también la imagen gráficamente.

La posición y el tamaño de la imagen se calculan a partir de la ecuación fundamental de las lentes delgadas y la ecuación del aumento lateral:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}; \qquad \frac{1}{s'} - \frac{1}{-20\text{ cm}} = \frac{1}{14\text{ cm}}; \qquad s' = 47\text{ cm}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}; \qquad \frac{y'}{1{,}2\text{ cm}} = \frac{47\text{ cm}}{-20\text{ cm}}; \qquad y' = -2{,}8\text{ cm}$$



La imagen es real, invertida y de menor tamaño que el objeto.

21. Determina la distancia focal de una lente biconvexa delgada de índice de refracción *n* = 1,5 y cuyos radios de curvatura son 5 y 4 cm, respectivamente. Si se sitúa un objeto de 8 mm delante de la lente, a 10 cm de la misma, ¿cuáles son las características de la imagen que se forma?

PAU

La distancia focal imagen es la siguiente:

$$\frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = (1{,}5-1)\cdot\left(\frac{1}{5\text{ cm}} - \frac{1}{-4\text{ cm}}\right);$$

$$f' = 4{,}4\text{ cm}$$

Posición y tamaño de la imagen:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}; \qquad \frac{1}{s'} - \frac{1}{-10\text{ cm}} = \frac{1}{4{,}4\text{ cm}}; \qquad s' = 7{,}9\text{ cm}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}; \qquad \frac{y'}{8\text{ mm}} = \frac{7{,}9\text{ cm}}{-10\text{ cm}}; \qquad y' = -6{,}3\text{ mm}$$

La imagen es real, invertida y de menor tamaño que el objeto.

22. ¿Por qué los rayos que pasan por el centro óptico de una lente no se desvían?

Porque en este caso la lente se comporta, aproximadamente, como si fuera una lámina delgada de caras planas y paralelas.

23. ¿Se podría quemar un papel con un trozo de hielo? Razona la respuesta.

Sí, formando con el hielo una lente convergente y situando el papel en el foco de la lente.

24. ¿Cuál es la potencia de un sistema óptico formado por una lente divergente de 3,5 dioptrías en contacto con otra convergente de 1,3 dioptrías? ¿Cuál es la distancia focal imagen del sistema?

$$P = P_1 + P_2 = -3{,}5 + 1{,}3 = -2{,}2\text{ D}$$

$$P = \frac{1}{f'}; \qquad f' = \frac{1}{P} = \frac{1}{-2{,}2\text{ m}^{-1}} = -0{,}45\text{ m}$$

25. Un proyector de diapositivas produce una imagen nítida sobre una pantalla colocada a 5 m del proyector. Sabiendo que la diapositiva está colocada a 2 cm de la lente del proyector, calcula la potencia de la lente y el aumento lateral conseguido.

PAU

La imagen es real, puesto que se recoge en una pantalla; por tanto, la lente del proyector es convergente y su potencia es positiva.

La ecuación general de las lentes delgadas permite calcular la potencia de la lente:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} = P$$

$$P = \frac{1}{5\text{ m}} - \frac{1}{-0{,}02\text{ m}}; \qquad P = 50\text{ D}$$

El aumento lateral es:

$$M_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} = \frac{5\text{ m}}{0{,}02\text{ m}} = -250$$

La imagen es invertida (signo negativo del aumento lateral) y su tamaño es 250 veces mayor que el objeto.

26. ¿Qué tamaño tiene la imagen de la Luna observada mediante una lente convergente de distancia focal igual a 40 cm? Diámetro de la Luna, 3 640 km. (Distancia de la Luna a la Tierra, 380 000 km.)

La imagen de la Luna se forma en el foco imagen:

$$M_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}; \quad \frac{y}{3\,640\text{ km}} = \frac{4\cdot 10^{-4}\text{ km}}{3{,}8\cdot 10^{5}\text{ km}}$$

$$y' = 3{,}8\cdot 10^{-6}\text{ km} = 3{,}8\text{ mm}$$

27. Un sistema de dos lentes acopladas está formado por una lente biconvexa, de índice de refracción 1,5, y otra planocóncava, de índice de refracción 1,6. Los radios de las superficies curvas son todos de 10 cm. Determina:

***a)* La potencia de cada lente y la del sistema.**

***b)* La posición, el tamaño y las características de la imagen formada por el sistema si el objeto tiene una altura de 1 cm y está situado 12 cm delante del sistema.**

a) $P_1 = \frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) =$

$$= (1{,}5-1)\cdot\left(\frac{1}{0{,}1\text{ m}} - \frac{1}{-0{,}1\text{ m}}\right) = 10\text{ D}$$

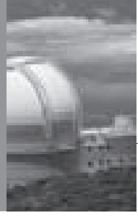
$$P_2 = (1{,}6-1)\cdot\left(\frac{1}{-0{,}1\text{ m}} - \frac{1}{\infty}\right) = -6\text{ D}$$

$$P_{\text{sistema}} = 10 - 6 = 4\text{ D}$$

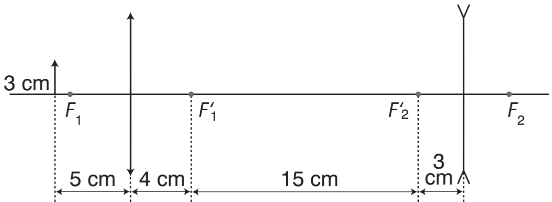
b) $\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} = P; \qquad \frac{1}{s'} - \frac{1}{-0{,}12\text{ m}} = 4; \qquad s' = -0{,}23\text{ m}$

$$M_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}; \qquad \frac{y'}{1\text{ cm}} = \frac{-23\text{ cm}}{-12\text{ cm}}; \qquad y' = 1{,}9\text{ cm}$$

La imagen es virtual, derecha y de mayor tamaño que el objeto.



28. Averigua numérica y gráficamente las características de la imagen que se obtiene en el sistema óptico de la figura.
PAU



La posición de la imagen en la primera lente es:

$$\frac{1}{s'_1} - \frac{1}{s_1} = \frac{1}{f'_1}; \qquad \frac{1}{s'_1} - \frac{1}{-5\ \text{cm}} = \frac{1}{4\ \text{cm}}; \qquad s'_1 = 20\ \text{cm}$$

La imagen formada por la primera lente es real, ya que la distancia imagen es positiva. Su tamaño se obtiene a partir de la ecuación del aumento lateral:

$$M_L = \frac{y'_1}{y_1} = \frac{s'_1}{s_1} = \frac{20\ \text{cm}}{-5\ \text{cm}} = -4$$

$$y'_1 = -4\ y_1; \qquad y'_1 = -4 \cdot 3\ \text{cm} = -12\ \text{cm}$$

Como el aumento lateral es negativo, la imagen es invertida; además, es de mayor tamaño.

Esta imagen actúa como objeto en la segunda lente.

Posición de la imagen en la segunda lente:

$$\frac{1}{s'_2} - \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f'_2}; \qquad \frac{1}{s'_2} - \frac{1}{-2\ \text{cm}} = \frac{1}{-3\ \text{cm}}; \qquad s'_2 = -1{,}2\ \text{cm}$$

Como la distancia imagen es negativa, la imagen es virtual (siempre lo son en las lentes divergentes).

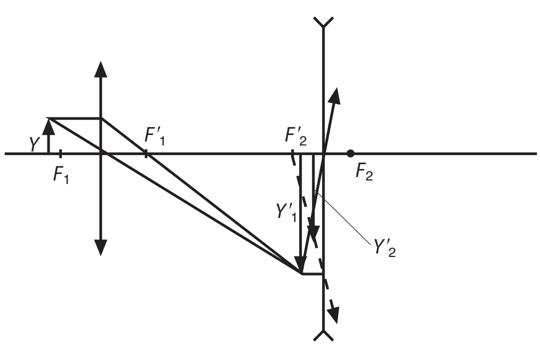
El tamaño final de la imagen se obtiene a partir del aumento lateral:

$$\frac{y'_2}{y_2} = \frac{s'_2}{s_2}; \qquad \frac{y'_2}{-12\ \text{cm}} = \frac{-1{,}2\ \text{cm}}{-2\ \text{cm}}; \qquad y'_2 = -7{,}2\ \text{cm}$$

La imagen es derecha con respecto a su objeto (ambas son negativas), pero invertida con respecto al objeto inicial.

En consecuencia, la imagen final está situada 1,2 cm delante de la lente divergente, es virtual, invertida y de mayor tamaño que el objeto.

La construcción gráfica es la siguiente:



29. Un sistema óptico centrado está formado por dos lentes delgadas convergentes de igual distancia focal (f' = 10 cm) separadas 40 cm. Un objeto de 1 cm de altura se coloca delante de la primera lente a una distancia de 15 cm, perpendicularmente al eje óptico. Determina:
PAU

a) **La posición, el tamaño y la naturaleza de la imagen formada por la primera lente.**

b) **La posición de la imagen final del sistema, efectuando su construcción gráfica.**

a) La posición de la imagen formada por la primera lente se obtiene a partir de la ecuación general de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s'_1} - \frac{1}{s_1} = \frac{1}{f'_1}; \qquad \frac{1}{s'_1} - \frac{1}{-15\ \text{cm}} = \frac{1}{10\ \text{cm}}; \qquad s'_1 = 30\ \text{cm}$$

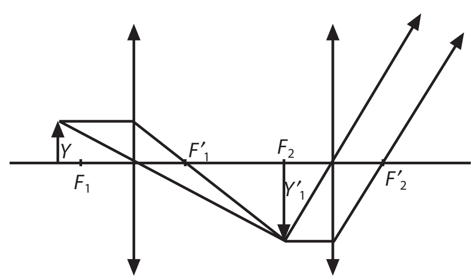
Como esta distancia imagen es positiva, la imagen intermedia es real. El tamaño de esta imagen se obtiene a partir de la ecuación del aumento lateral:

$$M_L = \frac{y'_1}{y_1} = \frac{s'_1}{s_1}; \qquad \frac{y'_1}{1\ \text{cm}} = \frac{30\ \text{cm}}{-15\ \text{cm}}; \qquad y'_1 = -2\text{cm}$$

El signo negativo indica que la imagen es invertida. Su tamaño es mayor que el del objeto.

b) Como la distancia entre ambas lentes es de 40 cm y la imagen intermedia se forma 30 cm a la derecha de la primera lente, la imagen intermedia está situada a 10 cm de la segunda lente, es decir, en el plano focal objeto de esta lente. Por tanto, la imagen final se formará en el infinito.

Construcción gráfica:



30. ¿Qué defectos tienen los ojos de una persona a la que el oftalmólogo graduó así?

	Esférico	**Cilíndrico**
Ojo derecho	**−2,5**	**−0,75**
Ojo izquierdo	**−3,75**	**−0,50**

Miopía, por tener valores de lentes correctoras esféricas con potencia negativa (lentes divergentes) y astigmatismo, por necesitar corrección cilíndrica.

31. ¿Qué lentes correctoras deben utilizarse para corregir la hipermetropía de un ojo cuyo punto próximo está situado a 1,4 m? El punto próximo de una persona con visión normal es 25 cm.

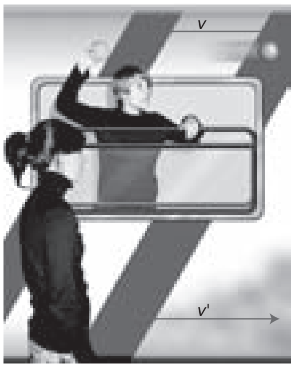
Precisa una lente que, de un objeto situado a 25 cm, forme la imagen a una distancia de 1,4 m.

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} = P$$

$$P = \frac{1}{f'} = \frac{1}{-1{,}4\ \text{m}} - \frac{1}{-0{,}25\ \text{m}}; \qquad P = 3{,}3\ \text{D}$$

Actividades

1. **El pasajero de la figura arroja una pelota con una velocidad v con respecto a sí mismo. Si el vagón se mueve en el mismo sentido con una velocidad v', ¿con qué velocidad se mueve la pelota respecto de un observador que está parado fuera del tren?**



La velocidad de la pelota respecto del observador que está en reposo fuera del tren es $v_0 = v + v'$.

2. **Un observador se encuentra en la terraza de un edificio situado a 20 metros de la calle, donde se encuentra un segundo observador. Si el primero lanza una piedra verticalmente hacia arriba, escribe las ecuaciones de transformación que permitan calcular, en cualquier instante, la posición de la piedra con respecto de los dos observadores.**

Las ecuaciones del movimiento para el observador situado en la terraza y para el observador situado en la calle son, respectivamente:

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y' = 20 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

De donde se deduce la ecuación de transformación $y' = y + 20$.

3. **Escribe las ecuaciones de transformación en el caso de que el segundo observador de la actividad anterior subiera en un ascensor con velocidad constante de 0,5 m/s.**

$$y = (v_0 - 0{,}05)t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y' = 20 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

4. **¿Cambiarían las ecuaciones de transformación anteriores en el caso de que el primer observador dejara caer la piedra en lugar de lanzarla hacia arriba?**

Si se dejara caer la piedra, las ecuaciones del movimiento serían:

$$y = -\frac{1}{2} g t^2; \qquad y' = 20 - \frac{1}{2} g t^2$$

por tanto, la ecuación de transformación no varía:

$$y' = y + 20$$

5. **¿Se pueden aplicar las ecuaciones de transformación en el caso de que el ascensor de la actividad 3 ascendiera con aceleración constante?**

Consultar Epígrafe 11.4.C de la página 257 del libro del alumno.

6. **Un automóvil circula a 120 km/h por una carretera y adelanta a un camión que se mueve a una velocidad de 80 km/h. ¿Con qué velocidad se mueve un vehículo respecto del otro?**

Sin consideramos que el observador inicial O circula a 120 km/h y el observador O' circula a 80 km/h,

$v = u - u' = 120$ km/h $- 80$ km/h $= 40$ km/h

7. **¿Cuál sería la velocidad relativa de cada vehículo si el camión y el coche se cruzaran circulando en sentido contrario?**

En ese caso la velocidad relativa entre los dos vehículos es $v = u - u' = 120$ km/h $+ 80$ km/h $= 200$ km/h

8. **¿Por qué no se puede medir la contracción que experimenta un objeto al moverse?**

Porque el metro utilizado en la medida también sufre la misma contracción relativa, de forma que la razón entre las longitudes del objeto y del metro permanecería constante.

9. **Un observador terrestre mide la longitud de una nave que pasa próxima a la Tierra y que se mueve a una velocidad $v < c$ resultando ser L. Los astronautas que viajan en la nave le comunican por radio que la longitud de su nave es L_0.**

   a) **¿Coinciden ambas longitudes? ¿Cuál es mayor? Razona las respuestas.**

   b) **Si la nave espacial se moviese a la velocidad de la luz, ¿cuál sería la longitud que mediría el observador terrestre?**

Consultar Epígrafe 11.7.B de la página 263 del libro del alumno.

10. **Para velocidades pequeñas comparadas con la velocidad de la luz la mecánica de Newton sigue siendo válida. Explica razonadamente por qué.**

Si la velocidad v es muy pequeña, comparada con la velocidad de la luz, el factor de transformación:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

tiende al valor uno, y entonces, las transformaciones de Lorentz coinciden con las transformaciones de Galileo.

11. **Comprueba que si u y v son muy pequeñas comparadas con la velocidad de la luz, la transformación relativista de la velocidad coincide con la transformación de la velocidad de Galileo.**

Las transformaciones galileana y relativista de la velocidad son, respectivamente:

$$u' = u - v; \qquad u' = \frac{u - v}{1 - \frac{u v}{c^2}}$$

Si u y v son muy pequeñas comparadas con c, se cumple que:

$$\frac{u v}{c^2} \cong 0$$

En este caso las dos transformaciones coinciden.

12. Comprueba si un objeto que se mueve con una velocidad *c* con relación a un observador *S,* también tiene una velocidad *c* respecto de un observador *S′* (independientemente de la velocidad *v* de *S′*).

En este caso $u = c$. Si aplicamos la transformación relativista de la velocidad, tenemos:

$$u' = \frac{c - v}{1 - \frac{cv}{c^2}} = \frac{c - v}{1 - \frac{v}{c}} = \frac{c - v}{\frac{c - v}{c}} = c$$

Segunda revolución de la Ciencia

Cuestiones

1. Si una nave espacial se desplazara a 0,1 c, las transformaciones válidas para pasar de un sistema *S′* a un sistema *S* serían:

a) $x' = \gamma\,(x - vt)$ $\quad y' = y \quad z' = z \quad t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$

b) $x' = x - vt$ $\quad y' = y' \quad z' = z \quad t' = \left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$

c) $x = \gamma\,(x' + vt)$ $\quad y = y' \quad z = z' \quad t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)$

La respuesta correcta es la *b)*: si $v < 0{,}1\,c$ se cumple que $\gamma = 1$.

2. Indica cuál de estas afirmaciones es la correcta:

a) El Principio de causa-efecto es propio de la Física mo-derna.

b) El Principio de Incertidumbre es propio de la Física clásica.

***c)* El Principio de continuidad del Universo queda desterrado de la Física moderna.**

Cuestiones y problemas

1. Cuando una nave espacial está en reposo con respecto a un observador, su longitud es de 50 m. ¿Qué longitud medirá el mismo observador cuando la nave se mueve con una velocidad de 2,4 · 10⁸ m/s?

Aplicamos la expresión que determina la contracción lineal:

$$\ell = \ell'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 50\ \text{m} \cdot \sqrt{1 - \frac{(0{,}8\,c)^2}{c^2}} = 30\ \text{m}$$

siendo $v = 2{,}4 \cdot 10^8$ m/s $= 0{,}8\,c$

2. La masa en reposo de un electrón es $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg. ¿Cuál es su masa relativista si su velocidad es 0,80 *c*?

La masa relativista de un cuerpo en movimiento viene dada por:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}{0{,}6} = 1{,}5 \cdot 10^{-30}\ \text{kg}$$

3. Un electrón se acelera hasta alcanzar una velocidad 0,80 *c*. Compara su energía cinética relativista con el valor dado por la mecánica de Newton.

Datos: masa en reposo del electrón, $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $c = 8 \cdot 10^8$ m/s.

Aplicando el resultado del problema anterior, obtenemos la energía relativista:

$$E_c = (m - m_0)\,c^2 =$$

$$= (1{,}5 \cdot 10^{-30}\ \text{kg} - 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}) \cdot 9 \cdot 10^{16}\ \text{m}^2/\text{s}^2 = 5{,}49 \cdot 10^{-14}\ \text{J}$$

La energía cinética no relativista está determinada por la expresión clásica:

$$E_c = \frac{1}{2}\,m v^2 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot (0{,}8\,c)^2 = 2{,}62 \cdot 10^{-14}\ \text{J}$$

4. ¿Cuál es la masa de un electrón que se mueve con la velocidad de $2{,}0 \cdot 10^8$ m/s? ¿Cuál es su energía total? ¿Cuál es su energía cinética relativista?

La masa del electrón en movimiento vale:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}{\sqrt{1 - \left(\frac{2 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8}\right)^2}} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}{\sqrt{\frac{5}{9}}} =$$

$$= 1{,}22 \cdot 10^{-30}\ \text{kg}$$

$$E = m c^2 = 1{,}22 \cdot 10^{-30}\ \text{kg} \cdot 9 \cdot 10^{16}\ \text{m}^2/\text{s}^2 = 1{,}1 \cdot 10^{-13}\ \text{J}$$

Energía cinética relativista:

$$E_c = (m - m_0)\,c^2 =$$

$$= (12{,}2 \cdot 10^{-30}\ \text{kg} - 9{,}1 \cdot 10^{-31})\ \text{kg} \cdot 9 \cdot 10^{16}\ \text{m}^2/\text{s}^2 = 2{,}8 \cdot 10^{-14}\ \text{J}$$

5. Una nave espacial *A* pasa ante un observador *B* con una velocidad relativa de 0,200 *c*. El observador *B* calcula que una persona de la nave necesita 3,96 s en realizar una tarea determinada. ¿Qué tiempo medirá la persona de la nave para realizar dicha tarea? (Fig. 11.18).

El tiempo medido por el observador de la nave:

$$t' = \frac{t}{\gamma} = t\sqrt{1 - \left(\frac{0{,}2\,c}{c}\right)^2} = 3{,}96\ \text{s} \cdot 0{,}979 = 3{,}88\ \text{s}$$

6. Un astronauta de 30 años se casa con una mujer de 20 años poco antes de emprender un viaje espacial. Cuando retorna a la Tierra ella tiene 35 años y él 32. ¿Cuánto ha durado el viaje según los relojes de la Tierra y cuál fue la velocidad media durante el viaje?

El tiempo transcurrido según los relojes de la Tierra viene dado por la diferencia de edad de la mujer: 15 años. En este caso, pues, $t = 15$ años y $t' = 2$ años. Por tanto, tenemos que:

$$2\ \text{años} = 15\ \text{años} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,; \qquad \frac{4}{225} = 1 - \frac{v^2}{c^2}$$

de donde se deduce que $v = 0{,}99\,c$.

7. ¿Cuál debe ser la velocidad de una varilla para que su longitud se reduzca a la tercera parte de la que tiene en reposo?

PAU

Despejamos la velocidad en la expresión que determina la contracción lineal:

$$\ell = \ell' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}; \qquad \frac{1}{3} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\frac{1}{9} = 1 - \frac{v^2}{c^2};$$

de donde:

$v = 0{,}94\,c$

8. Un observador terrestre aprecia que una nave se mueve a una velocidad de 0,312 *c*. ¿En qué proporción se contrae para él la nave?

La nave se contrae en una proporción definida por:

$$\frac{\ell}{\ell'} = \sqrt{1 - \left(\frac{0{,}31\,c}{c}\right)^2} = \sqrt{1 - 0{,}31^2} = 0{,}95; \qquad \ell = 0{,}95\ \ell'$$

El porcentaje de la contracción viene dado por:

$$\frac{\ell' - \ell}{\ell'} \cdot 100 = \frac{\ell' - 0{,}95\,\ell'}{\ell'} \cdot 100 = 5\ \%$$

9. ¿Con qué velocidad se debe mover un cuerpo para que su masa se haga el doble?

Se ha de cumplir que $m = 2\,m_0$. Despejamos la velocidad de la expresión:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \qquad 2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = 0{,}25; \qquad v = 0{,}87\,c$$

10. Halla la masa y la energía total de un electrón que se mueve con una velocidad de 1,00 · 10^8 m/s.

Masa del electrón en movimiento:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}{\sqrt{1 - \left(\frac{10^8}{3 \cdot 10^8}\right)^2}} = 9{,}65 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}$$

La energía total será:

$$E = m\,c^2 = 9{,}65 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 9 \cdot 10^{16}\ \text{m}^2/\text{s}^2 = 8{,}69 \cdot 10^{-14}\ \text{J}$$

11. En un universo hipotético, la velocidad de la luz es de 20 m/s. ¿En qué porcentaje se reduce la longitud de un objeto que se mueve a 15 m/s respecto de un observador en reposo?

La relación de las longitudes viene dada por:

$$\frac{\ell}{\ell'} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{15}{20}\right)^2} = 0{,}66; \qquad \ell = 0{,}66\,\ell'$$

El porcentaje pedido será:

$$\frac{\ell' - \ell}{\ell'} \cdot 100 = \frac{\ell' - 0{,}66\,\ell'}{\ell'} \cdot 100 = 34\ \%$$

12. ¿A qué velocidad debería viajar un cohete para que su longitud se contrajera en un 50%?

Aplicamos la ecuación que define la contracción:

$$\ell = \ell' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}; \qquad \frac{1}{2} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}; \qquad \frac{1}{4} = 1 - \frac{v^2}{c^2}$$

$$v^2 = 0{,}75\,c^2; \qquad v = 0{,}866 \cdot 3 \cdot 10^8\ \text{m/s} = 2{,}6 \cdot 10^8\ \text{m/s}$$

13. Dos observadores, uno en tierra y otro en una nave espacial, sincronizan sus relojes a las 12 horas, en el instante en que parte la nave con una velocidad media de 10^8 m/s. Si el astronauta pudiera leer el reloj del observador en tierra a través de un telescopio, ¿qué hora leería una vez que ha transcurrido una hora y media para él?

La dilatación del tiempo viene dada por:

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1{,}5\ \text{h}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}} = \frac{1{,}5\ \text{h}}{\sqrt{\frac{8}{9}}} =$$

$$= \frac{4{,}5\ \text{h}}{\sqrt{8}} = 1{,}59\ \text{h} = 1\ \text{h}\ 35\ \text{min}$$

14. ¿A qué velocidad debería moverse un cuerpo para que su masa en movimiento fuera exactamente cinco veces su masa en reposo?

Sustituimos el valor de la masa de la partícula cuando está en movimiento en la ecuación:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

si:

$m = 5\,m_0$

se tiene:

$$5 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1$$

$$25 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1; \qquad 25 \cdot \frac{c^2 - v^2}{c^2} = 1$$

$$25\,c^2 - 25\,v^2 = c^2; \qquad 25\,v^2 = 24\,c^2; \qquad 5\,v = 4{,}899\,c$$

$$v = \frac{4{,}899}{5} \cdot 3 \cdot 10^8\ \text{m/s} = 2{,}94 \cdot 10^8\ \text{m/s}$$

15. Calcula la energía en reposo de un protón sabiendo que su masa en reposo es 1,672 · 10^{-27} kg.

La energía en reposo viene determinada por la ecuación $E = m_0\,c^2$. Para el caso de un protón, esta energía es:

$$E = 1{,}672 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot 9 \cdot 10^{16}\ \text{m}^2/\text{s}^2 = 1{,}50 \cdot 10^{-10}\ \text{J}$$

16. Dos gemelos tienen 25 años de edad; entonces uno de ellos sale en un viaje por el espacio a una velocidad constante. Para el gemelo que viaja en la nave, cuando regresa, han transcurrido 6 años, mientras que su hermano que quedó en Tierra tiene entonces 43 años. ¿Cuál fue la velocidad de la nave?

Aplicamos la expresión que nos permite calcular la variación del tiempo:

$$t' = t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

En este caso, $t = 43 - 25 = 18$ años; $t' = 6$ años.

$$\frac{1}{3} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}; \qquad \frac{1}{9} = 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{c^2 - v^2}{c^2}$$

$$c^2 = 9c^2 - 9v^2; \quad 9v^2 = 8c^2; \quad 3v = 2{,}83c; \quad v = 2{,}8 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

17. Un electrón se acelera desde el reposo a través de una diferencia de potencial de 1,5 MV y, en consecuencia, adquiere una energía de 1,5 MeV. Calcula su velocidad y su masa.

Datos: $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

La energía potencial que origina el campo eléctrico se convierte en energía cinética relativista.

$$Vq = \frac{1}{2}m_0v^2 = (m - m_0)\,c^2$$

siendo m la masa del electrón en movimiento.

Energía recibida por el electrón:

$$Vq = 1{,}5 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ C} = 2{,}4 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

Por tanto, la variación de la masa será:

$$m - m_0 = \frac{E}{c^2} = \frac{2{,}4 \cdot 10^{-13} \text{ J}}{9 \cdot 10^{16} \text{ m}^2/\text{s}^2} = 2{,}67 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$$

La masa del electrón en movimiento toma el valor:

$$m = m_0 + 2{,}67 \cdot 10^{-30} \text{ kg} = 0{,}91 \cdot 10^{-30} \text{ kg} + 2{,}67 \cdot 10^{-30} \text{ kg} =$$

$$= 3{,}6 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$$

De la expresión $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, despejamos la velocidad.

$$v^2 = c^2\left[1 - \left(\frac{m_0}{m}\right)^2\right] = c^2\left[1 - \left(\frac{0{,}91}{3{,}6}\right)^2\right]$$

de donde se deduce que $v = 0{,}97c$.

18. Calcula la energía que se debe suministrar a un electrón para que alcance una velocidad $0{,}9c$ partiendo del reposo.

La energía cinética relativista viene dada por:

$$E_c = (m - m_0)\,c^2 = \left[\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0\right] c^2 =$$

$$= 9{,}1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 9 \cdot 10^{16} \text{ m}^2/\text{s}^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (0{,}9)^2}} - 1\right) =$$

$$= 1{,}06 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 0{,}662 \text{ MeV}$$

19. Un electrón se mueve con una velocidad $0{,}85c$. Calcula su energía total y su energía cinética en eV.

La energía total del electrón es:

$$E = mc^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,c^2 = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 9 \cdot 10^{16} \text{ m}^2/\text{s}^2}{\sqrt{1 - (0{,}85)^2}} =$$

$$= 1{,}55 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 0{,}97 \text{ MeV}$$

La energía cinética se obtiene restando la energía en reposo de la energía total:

$$E_c = E - m_0c^2 = 1{,}55 \cdot 10^{-13} \text{ J} - 0{,}82 \cdot 10^{-13} \text{ J} =$$

$$= 0{,}73 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 0{,}46 \text{ MeV}$$

20. La energía total de un protón es tres veces su energía en reposo.

***a)* ¿Cuál es la energía en reposo del protón?**

***b)* ¿Cuál es la velocidad del protón?**

***c)* ¿Cuál es la energía cinética del protón?**

Datos: $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg.

a) Energía del protón en reposo:

$$E_c = m_0c^2 = 1{,}67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 10^{16} \text{ m}^2/\text{s}^2 =$$

$$= 1{,}5 \cdot 10^{-10} \text{ J} = 938 \text{ MeV}$$

b) Puesto que la energía total es tres veces la energía en reposo, se cumple que:

$$mc^2 = 3m_0c^2$$

o bien:

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 3m_0 \;\Rightarrow\; 1 = 9 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

de donde:

$$9v^2 = 8c^2; \qquad v = 2{,}8 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

c) La energía del protón será:

$$E = (m - m_0)\,c^2 = mc^2 - m_0c^2 = 3m_0c^2 - m_0c^2 = 2m_0c^2$$

Antes hemos visto que $m_0c^2 = 938$ MeV. Por tanto, la energía pedida será:

$$E_c = 1876 \text{ MeV}$$

21. ¿A qué velocidad debería desplazarse un astronauta para que el tiempo transcurrido en la cápsula espacial sea la mitad del tiempo transcurrido en la Tierra?

Aplicamos la expresión de la dilatación del tiempo, que en este caso es $t' = \dfrac{1}{2}t$.

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \qquad 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{4}; \qquad \frac{c^2 - v^2}{c^2} = \frac{1}{4}$$

$$4c^2 - 4v^2 = c^2; \qquad 4v^2 = 3c^2$$

De donde: $v = 2{,}6 \cdot 10^8$ m/s.

22. ¿A qué velocidad debería moverse un objeto para que su masa en movimiento fuera cuatro veces su masa en reposo?

La variación de la masa queda determinada por:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

siendo:

$m = 4\,m_0$

$$16 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1; \qquad 16 \cdot \frac{c^2 - v^2}{c^2} = 1$$

$$16c^2 - 16v^2 = c^2; \qquad 16v^2 = 15c^2; \qquad v = 2{,}9 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

23. Un electrón se acelera partiendo del reposo a través de una diferencia de potencial de 0,30 MV. Calcula m/m_0, la relación entre su masa en movimiento y su masa en reposo.

La energía suministrada al electrón se convierte en energía relativista.

$Vq = mc^2 - m_0c^2$

$$mc^2 = qV + m_0c^2; \qquad m = \frac{qV}{c^2} + m_0$$

$$\frac{m}{m_0} = \frac{qV}{m_0c^2} + 1 = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\text{ C} \cdot 0{,}3 \cdot 10^6\text{ V}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\text{ kg} \cdot 9 \cdot 10^{16}\text{ m}^2/\text{s}^2} + 1 = 1{,}58$$

24. Calcula la velocidad relativa de una regla sabiendo que para un observador ligado a ella mide un metro y para un observador exterior la regla mide 0,98 m.

De la expresión $\ell = \ell'\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}$ se obtiene la velocidad.

En este caso es $\ell = 98$ cm y $\ell' = 100$ cm.

$$100^2 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 98^2$$

de donde:

$$v = \sqrt{100^2 - 98^2} \cdot \frac{c}{100} = 0{,}199\,c = 60\,000 \text{ km/s}$$

25. La masa de un electrón en reposo es $m_0 = 9{,}10 \cdot 10^{-31}$ kg. Si el electrón tiene una velocidad de $2{,}10 \cdot 10^8$ m/s, calcula:

a) **La masa del electrón a esa velocidad.**

b) **Su energía total.**

c) **La energía del electrón en reposo.**

d) **La energía cinética del electrón.**

e) **¿A qué diferencia de potencial ha sido sometido el electrón para alcanzar la velocidad indicada?**

a) La masa del electrón, a la velocidad dada, viene determinada directamente por:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}\text{ kg}}{\sqrt{1 - \dfrac{2{,}1^2 \cdot 10^{16}}{9 \cdot 10^{16}}}} =$$

$$= \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}\text{ kg}}{\sqrt{1 - 0{,}49}} = 1{,}27 \cdot 10^{-30}\text{ kg}$$

b) Energía total:

$$E = mc^2 = 1{,}27 \cdot 10^{-30}\text{ kg} \cdot 9 \cdot 10^{16}\text{ m}^2/\text{s}^2 = 1{,}15 \cdot 10^{-13}\text{ J}$$

c) La energía del electrón en reposo viene dada por:

$$E_0 = m_0c^2 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\text{ kg} \cdot 9 \cdot 10^{16}\text{ m}^2/\text{s}^2 = 8{,}2 \cdot 10^{-14}\text{ J}$$

d) $E - E_0 = 1{,}15 \cdot 10^{-13}\text{ J} - 8{,}2 \cdot 10^{-14}\text{ J} = 3{,}3 \cdot 10^{-14}\text{ J}$

e) $qV = \dfrac{1}{2}\,m_0v^2$,

de donde:

$$V = \frac{m_0v^2}{2q} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}\text{ kg} \cdot 2{,}1^2 \cdot 10^{16}\text{ m}^2/\text{s}^2}{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\text{ C}} = 1{,}25 \cdot 10^5\text{ V}$$

26. Imagina que viajas a través del espacio interestelar rumbo a la estrella Sirius. ¿Notarás que el ritmo de tus pulsaciones durante el viaje parece más lento, más rápido, o igual al que tienes en Tierra? Explica la respuesta.

Parece más lento para un observador externo. Según la Teoría de la Relatividad, la dilatación del tiempo es también aplicable a los procesos biológicos. Un proceso biológico, como las pulsaciones, se retarda cuando está en movimiento. No obstante, para el observador en movimiento el tiempo transcurre sin que sea consciente de la dilatación temporal.

27. Las aeronaves de las líneas aéreas comerciales vuelan a una velocidad media de 250 m/s, con respecto a la Tierra. ¿Deberán reajustar los pasajeros sus relojes después de un vuelo para corregir la dilatación temporal? Razona tu respuesta.

No. Porque la velocidad de 250 m/s es muy pequeña comparada con la velocidad de la luz. Por tanto, la dilatación del tiempo es despreciable.

28. Una nave se mueve en línea recta pasando cerca de la Tierra con una velocidad $2 \cdot 10^8$ m/s. Un observador desde la Tierra ve un haz de rayos láser (luz) según una trayectoria paralela. ¿Cuál es la velocidad del haz láser para el observador de la nave?

PAU

La misma que para el observador de la Tierra, $3 \cdot 10^8$ m/s, porque la velocidad de la luz es absoluta. Es la misma para todos los observadores cualquiera que sea su velocidad relativa.

29. Un astronauta que va a gran velocidad en una nave espacial sostiene un metro en la mano. ¿Qué advierte en cuanto a la longitud del metro al girarlo desde la posición paralela a la línea de movimiento a una posición perpendicular?

No observaría ninguna variación, puesto que aprecia que la longitud propia es constante. En cambio, un observador exterior en reposo observaría cómo el metro se hace más estrecho.

30. ¿Qué diferencias habría en nuestro mundo si la velocidad de la luz fuera solamente de 50 m/s?

La velocidad máxima de todos los cuerpos sería 50 m/s. Todos los movimientos serían más lentos; se envejecería rápidamente. Serían aplicables todas las consecuencias de la Teoría de la Relatividad sustituyendo en las ecuaciones $c = 50$ m/s.

Al ser tan baja la velocidad de la luz casi todos los movimientos serían relativos, es decir, la masa de los objetos variaría en aumento; los tamaños aparentes de los objetos cambiarían ostensiblemente, el tiempo transcurriría más lentamente.

Actividades

1. ¿Qué hechos fundamentales obligaron a revisar las leyes de la Física clásica y propiciaron el nacimiento de la Física Cuántica?

La radiación térmica, el efecto fotoeléctrico y el carácter discontinuo de los espectros atómicos.

2. ¿Cuál es la Hipótesis Cuántica de Planck?

PAU

La energía no es continua, sino discontinua. Está formada por cuantos de energía de frecuencia determinada. La energía de un cuanto es $E = hf$.

3. La estrella Sirio de la constelación Can Mayor tiene un color blanco azulado, mientras que Antares de la constelación de Escorpión presenta un color amarillo rojizo. ¿Cuál de las dos tiene una mayor temperatura superficial?

De acuerdo con la Ley de Wien, tiene mayor temperatura la estrella que emite una radiación de menor longitud de onda. En este caso, la estrella Sirio, ya que la luz azul tiene una frecuencia mayor que la luz roja.

4. ¿Qué fotón es más energético, el de luz verde o el de luz ultravioleta?

PAU

La energía del fotón de luz ultravioleta es mayor que la del fotón de luz verde, ya que la frecuencia de la luz ultravioleta es mayor que la de la luz verde: $E = hf$.

5. ¿Cuál es la temperatura aproximada de la superficie de una estrella que emite luz azul de 4600 Å de longitud de onda en el máximo de intensidad? Enuncia la ley que te permite resolver el problema.

Al aplicar la Ley de Wien, resulta:

$$\lambda_{\text{máx}}\, T = 2{,}9 \cdot 10^{-3}\ \text{m K}$$

$$T = \frac{2{,}9 \cdot 10^{-3}\ \text{m K}}{4{,}6 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} = 6\,300\ \text{K}$$

6. Un foco de luz monocromática emite ondas electromagnéticas de 620 nm de longitud de onda.

***a)* ¿Cuál es la energía de cada fotón?**

***b)* ¿Qué potencia tiene el foco si emite 10^{20} fotones por segundo?**

a) La energía de cada fotón se obtiene a partir de la hipótesis de Planck:

$$E = hf = h\,\frac{c}{\lambda} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1}}{6{,}2 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} = 3{,}2 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

b) La potencia del foco se calcula considerando la energía emitida por el foco en un segundo:

$$P = 10^{20}\ \text{fotones/s} \cdot 3{,}2 \cdot 10^{-19}\ \text{J/fotón} = 32\ \text{J s}^{-1} = 32\ \text{W}$$

7. ¿Qué entiendes por cuerpo negro? ¿Existen en la Naturaleza? Pon algún ejemplo de cuerpo negro.

Un cuerpo negro es aquel que es capaz de absorber todas las radiaciones que llegan a él. No se conoce ningún cuerpo que se comporte rigurosamente como negro, pero se puede considerar como tal cualquier material resistente al calor que contenga una cavidad, con paredes rugosas y muy absorbentes, comunicada con el exterior por un pequeño orificio.

8. Un foco emite luz amarilla de 580 nm de longitud de onda.

***a)* ¿Cuál es la frecuencia de la luz?**

***b)* ¿Cuál es la energía de cada fotón?**

a) $f = \dfrac{c}{\lambda} = \dfrac{3 \cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1}}{580 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} = 5{,}2 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}$

b) $E = hf = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 5{,}2 \cdot 10^{14}\ \text{s}^{-1} = 3{,}4 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$

9. Un haz de luz ultravioleta tiene una frecuencia de $7{,}5 \cdot 10^{15}$ Hz.

***a)* ¿Cuál es su longitud de onda?**

***b)* ¿Qué energía le corresponde a cada fotón, en eV?**

a) $\lambda = \dfrac{c}{f} = \dfrac{3 \cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1}}{7{,}5 \cdot 10^{15}\ \text{s}^{-1}} = 4 \cdot 10^{-8}\ \text{m}$

b) $E = hf = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 7{,}5 \cdot 10^{15}\ \text{s}^{-1} = 5 \cdot 10^{-18}\ \text{J}$

$$E = \frac{5 \cdot 10^{-18}\ \text{J}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J/eV}} = 31\ \text{eV}$$

10. Cuando se ilumina un metal con luz violeta no se produce el efecto fotoeléctrico. ¿Emitirá electrones el metal cuando se ilumine con luz amarilla?

La energía de un fotón de luz violeta es mayor que la de un fotón de luz amarilla porque su frecuencia es mayor. Por tanto, si con luz violeta no se produce el efecto fotoeléctrico, tampoco se producirá con luz amarilla.

11. El trabajo de extracción para el sodio es de 2,5 eV. Calcula la frecuencia mínima que debe tener la radiación que se debe utilizar y su longitud de onda para que se produzca el efecto fotoeléctrico en dicho metal.

La frecuencia umbral es la que corresponde al trabajo de extracción:

$$W_e = hf_0; \qquad f_0 = \frac{W_e}{h} = \frac{2{,}5\ \text{eV} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J/eV}}{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s}} = 6 \cdot 10^{-14}\ \text{s}^{-1}$$

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1}}{6 \cdot 10^{14}\ \text{s}^{-1}} = 5 \cdot 10^{-7}\ \text{m} = 5\,000\ \text{Å}$$

12. Al iluminar un metal con luz de frecuencia $2{,}5 \cdot 10^{15}$ Hz se observa que emite electrones que pueden detenerse al aplicar un potencial de frenado de 7,2 V. Si sobre el mismo metal incide una luz cuya frecuencia es $1{,}7 \cdot 10^{15}$ Hz, el potencial de frenado pasa a ser de 3,8 V. Calcula:

PAU

***a)* El valor de la constante de Planck.**

***b)* La función de trabajo del metal.**

a) El trabajo de extracción se obtiene al aplicar la ecuación del efecto fotoeléctrico en las dos circunstancias, teniendo en cuenta que $E_c = e\,V_0$:

$$hf_1 = W_e + e\,V_{01}; \qquad hf_2 = W_e + e\,V_{02}$$

Al restar ambas ecuaciones se obtiene la constante de Planck:

$$h\,(f_1 - f_2) = e\,(V_{01} - V_{02})\,; \qquad h = \frac{e\,(V_{01} - V_{02})}{f_1 - f_2} =$$

$$= \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot (7{,}2 - 3{,}8)\ \text{V}}{2{,}5 \cdot 10^{15}\ \text{Hz} - 1{,}7 \cdot 10^{15}\ \text{Hz}} = 6{,}7 \cdot 10^{-34}\ \text{J s}$$

b) Al aplicar cualquiera de las dos ecuaciones iniciales se obtiene el trabajo de extracción o función de trabajo del metal:

$$W_e = h f_1 - e V_{01} =$$

$$= 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{15}\ \text{s}^{-1} - 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 7{,}2\ \text{V} =$$

$$= 5{,}3 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

13. ¿Cuáles son los valores de n_1 y n_2 para la tercera raya de la serie de Lyman?

Para la serie de Lyman $n_1 = 1$. Para la tercera raya $n_2 = 4$.

14. Un electrón salta entre dos niveles cuya diferencia de energía es de $1{,}5 \cdot 10^{-15}$ J. ¿Cuál es la frecuencia de la radiación?

Al saltar de un nivel de energía externo a otro de menor energía, emite la diferencia de energía existente entre ambos niveles, con una frecuencia dada por la ecuación:

$$E_2 - E_1 = h f; \qquad f = \frac{E_2 - E_1}{h} = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-15}\ \text{J}}{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s}} = 2{,}26 \cdot 10^{18}\ \text{s}^{-1}$$

15. En relación con las longitudes de onda de De Broglie asociadas a un electrón y a un protón, razona cuál es menor si tienen:

PAU

***a)* El mismo módulo de la velocidad.**

***b)* La misma energía cinética. No se tienen en cuenta los posibles efectos relativistas.**

a) Las longitudes de onda de De Broglie asociadas a un electrón y un protón son:

$$\lambda_e = \frac{h}{m_e V_e}; \qquad \lambda_p = \frac{h}{m_p V_p}$$

Si las velocidades del electrón y del protón son iguales, se obtiene:

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_p} = \frac{m_p}{m_e}$$

y como:

$$m_p > m_e \Rightarrow \lambda_e > \lambda_p$$

b) Las longitudes de onda de De Broglie son:

$$\lambda_e = \frac{h}{\sqrt{2 m_e E_c}}; \qquad \lambda_p = \frac{h}{\sqrt{2 m_p E_c}}$$

Si tienen la misma energía cinética, al dividir ambas ecuaciones se obtiene:

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_p} = \frac{\sqrt{m_p}}{\sqrt{m_e}};$$

y como:

$$\sqrt{m_p} > \sqrt{m_e} \Rightarrow \lambda_e > \lambda_p$$

16. ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie asociada a un haz de neutrones de 0,05 eV de energía?

Datos: masa del neutrón = $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg.

$$E_c = 0{,}05\ \text{eV} = 0{,}05\ \text{eV} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J/eV} = 8 \cdot 10^{-21}\ \text{J}$$

$$\lambda = \frac{h}{m v} = \frac{h}{\sqrt{2 m E_c}} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s}}{\sqrt{2 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot 8 \cdot 10^{-21}\ \text{J}}} =$$

$$= 1{,}3 \cdot 10^{-10}\ \text{m} = 1{,}3\ \text{Å}$$

17. Halla la longitud de onda asociada a las siguientes partículas:

***a)* Un neutrón cuya velocidad es de 10^5 m s^{-1}.**

***b)* Un grano de arena de 2 mg que se mueve con una velocidad de 10 m s^{-1}.**

$$a)\ \lambda = \frac{h}{m_n v_n} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s}}{1{,}675 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot 10^5\ \text{m s}^{-1}} = 3{,}69 \cdot 10^{-12}\ \text{m}$$

$$b)\ \lambda = \frac{h}{m_a v_a} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s}}{2 \cdot 10^{-6}\ \text{kg} \cdot 10\ \text{m s}^{-1}} = 3{,}31 \cdot 10^{-29}\ \text{m}$$

18. Determina la longitud de onda asociada con los electrones que han sido acelerados mediante una diferencia de potencial de 1 000 V.

La longitud de onda de De Broglie es:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2 m V e}} =$$

$$= \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 10^3\ \text{V} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}}} =$$

$$= 3{,}9 \cdot 10^{-11}\ \text{m} = 0{,}39\ \text{Å}$$

19. Conocemos la posición de un neutrón y una piedra de 0,1 kg con una aproximación de 1 Å.

***a)* ¿Cuál es para cada uno la imprecisión en la medida de su momento lineal?**

***b)* ¿Cuál es la imprecisión en el conocimiento de su velocidad? ¿Qué conclusión puedes deducir de los resultados obtenidos?**

Como la incertidumbre en el conocimiento de la posición es la misma para el neutrón que para la piedra, la imprecisión en la medida de su momento lineal también será la misma:

$$\Delta p \geq \frac{h}{2\pi \cdot \Delta x} \geq \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-10}\ \text{m}} \geq 1{,}05 \cdot 10^{-24}\ \text{kg m s}^{-1}$$

Al ser la masa muy diferente, la indeterminación en la velocidad será muy distinta.

Para el neutrón:

$$\Delta v = \frac{\Delta p}{m} \geq \frac{1{,}05 \cdot 10^{-24}\ \text{kg m s}^{-1}}{1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}} \geq 628\ \text{m s}^{-1}$$

Para la piedra:

$$\Delta v = \frac{\Delta p}{m} \geq \frac{1{,}05 \cdot 10^{-24}\ \text{kg m s}^{-1}}{0{,}1\ \text{kg}} \geq 1{,}05 \cdot 10^{-23}\ \text{m s}^{-1}$$

El Principio de Indeterminación de Heisenberg solo es significativo para dimensiones tan pequeñas como las que presentan las partículas elementales. En Mecánica clásica carece de interés, pues las magnitudes involucradas son muy grandes comparadas con el valor de la constante *h*.

20. ***a)*** **¿Por qué se abandona el concepto de órbita electrónica en la Física Cuántica?**

b) **¿Por qué el Principio de Heisenberg no es aplicable en la Física clásica?**

c) **¿Crees que son las limitaciones técnicas de los instrumentos de medida las responsables del Principio de Incertidumbre de Heisenberg?**

d) **¿Por qué no podemos observar un electrón sin alterarlo?**

a) Por la imposibilidad de determinar la posición y la velocidad del electrón, con precisión, en un instante dado.

b) Porque las magnitudes involucradas son muy grandes comparadas con el valor de la constante de Planck.

c) No, se debe al comportamiento de la materia.

d) Porque todos los objetos están regidos por el Principio de Incertidumbre.

21. ¿Qué diferencias fundamentales encuentras entre el concepto de órbita y el de orbital?

El concepto de órbita pertenece a la Física clásica, según la cual todas las magnitudes relativas a un sistema pueden, en principio, determinarse simultáneamente con cualquier grado de precisión.

Esto no ocurre en la Física Cuántica. Si no es posible determinar la posición y la velocidad de un electrón en un instante dado, no es posible definir el concepto de trayectoria y no tiene sentido hablar de órbitas electrónicas en los átomos.

22. ¿En qué principios se fundamentan la Física clásica y la Física Cuántica?

La Física clásica se fundamenta en el determinismo y la causalidad. La Física Cuántica sustituye el determinismo por un tratamiento estadístico de los hechos, y el Principio de Causalidad por el azar.

23. ¿En qué consiste la inversión de población necesaria para el funcionamiento de un láser? ¿Cómo se consigue?

En condiciones normales, la mayoría de los átomos se encuentran en su estado fundamental, es decir, de menor energía, con algunos de ellos en niveles superiores de energía (estado excitado).

Comunicando energía al sistema se puede conseguir que haya más átomos en el nivel superior que en el inferior, entonces se habrá conseguido una inversión de población. En estas condiciones se produce la emisión estimulada de radiación.

24. Haz una relación de las aplicaciones más importantes del láser.

Véase libro de texto, Apartado 12.8A.

25. ¿Cómo se obtienen los semiconductores tipo *P* y tipo *N*?

En los semiconductores tipo *N*, el elemento semiconductor (generalmente silicio) se dopa con elementos que tengan cinco electrones en su última capa: arsénico, fósforo o antimonio. Los semiconductores tipo *P* están dopados con aluminio, galio o indio, con sólo tres electrones en su última capa.

26. ¿Qué ventajas presentan los circuitos integrados respecto a los circuitos convencionales?

Son de bajo coste, pequeño tamaño, alta fiabilidad y mayor rendimiento.

27. Explica la relación que existe entre un microprocesador y una computadora.

En la computadora, un microprocesador se conecta a un dispositivo de memoria y se provee de dispositivos de entrada y salida.

28. ¿Qué entiendes por nanotecnologías? ¿Qué avances pueden producirse en nanomedicina?

Se denominan nanotecnologías a las ciencias y técnicas dedicadas al control y manipulación de la materia a una escala muy pequeña, a nivel de átomos y moléculas.

Se esperan avances médicos en el diagnóstico y tratamiento de enfermedades infecciosas y metabólicas, en el tratamiento de distintos tipos de cáncer, en la corrección de patologías del sistema cardiovascular y neurológico, en microbiología, ingeniería genética, inmunología, etc.

Microscopio electrónico

Cuestiones

1. Sobre la longitud de onda de los electrones se puede afirmar que:

a) **No depende de su velocidad.**

b) **Depende del tamaño del objeto observado.**

c) **Es inversamente proporcional a su masa y a su velocidad.**

La respuesta correcta es la *c)*. De acuerdo con la Hipótesis de De Broglie, la longitud de onda de los electrones es inversamente proporcional a su masa y su velocidad.

2. ¿Cómo varía la frecuencia de la onda que acompaña a los electrones si aumenta su velocidad?

a) **Disminuye.** ***b)*** **Aumenta.** ***c)*** **No varía.**

La respuesta correcta es la *b)*. Si aumenta la velocidad de los electrones, disminuye su longitud de onda, de acuerdo con la ecuación de De Broglie, y, por tanto, aumenta la frecuencia.

3. ¿Qué tipo de «lentes» se utilizan en el microscopio electrónico?

a) **Ópticas.** ***b)*** **Magnéticas.** ***c)*** **Ópticas y magnéticas.**

La respuesta correcta es la *b)*. En los microscopios electrónicos se utilizan lentes magnéticas.

4. **El poder separador de un microscopio electrónico comparado con el de un microscopio óptico es:**

   ***a)* Menor.** ***b)* Mucho mayor.** ***c)* Igual.**

   b) El poder separador es inversamente proporcional a la longitud de onda; por tanto, es mucho mayor en un microscopio electrónico que en un microscopio óptico. La longitud de onda de los electrones puede ser hasta cien mil veces menor que la longitud de onda media de la luz visible.

Cuestiones y problemas

1. **La temperatura aproximada de la superficie de una estrella es de 4 500 K, ¿qué color predominará cuando veamos la luz que emite?**

Aplicando la Ley de Wien se obtiene:

$\lambda_{máx}\, T = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ m K

$$\lambda_{máx} = \frac{2{,}9 \cdot 10^{-3}\ \text{mK}}{4\,500\ \text{K}} = 6{,}4 \cdot 10^{-7}\ \text{m} = 640\ \text{nm}$$

Esta longitud de onda corresponde a una luz roja; en consecuencia, cuando veamos la luz que emite la estrella predominará el color rojo.

2. **En un cierto material no tiene lugar el efecto fotoeléctrico con luz azul. ¿Tendrá lugar con luz verde?**

La frecuencia de la luz azul es inferior a la umbral; como la luz verde es de frecuencia aún menor, el efecto fotoeléctrico tampoco se producirá con luz verde.

3. **¿Qué cuantos de radiación son más energéticos, los infrarrojos o los visibles?**

Los visibles, por tener una frecuencia mayor:

$E = hf$.

4. **Una radiación monocromática de λ = 500 nm incide sobre una fotocélula de cesio, cuyo trabajo de extracción es de 2,0 eV.**

PAU

Calcula:

***a)* La frecuencia umbral y la longitud de onda umbral de la fotocélula.**

***b)* La energía cinética de los electrones emitidos.**

a) La frecuencia umbral es la que corresponde al trabajo de extracción o función trabajo:

$W_e = hf_0$

$$f_0 = \frac{W_e}{h} = \frac{2\ \text{eV} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J/eV}}{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s}} = 4{,}8 \cdot 10^{14}\ \text{s}^{-1}$$

$$\lambda_0 = \frac{c}{f_0} = \frac{3 \cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1}}{4{,}8 \cdot 10^{14}\ \text{s}^{-1}} = 6{,}2 \cdot 10^{-7}\ \text{m}$$

b) De acuerdo con la ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico, se cumple:

$$E_c = hf - W_e = \frac{hc}{\lambda} - W_e =$$

$$= \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1}}{5 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} - 2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J} =$$

$$= 7{,}8 \cdot 10^{-20}\ \text{J} = 0{,}49\ \text{eV}$$

5. **El trabajo de extracción o función de trabajo del sodio es de 2,5 eV. Si la longitud de onda de la luz incidente es de $3{,}0 \cdot 10^{-7}$ m, ¿se producirá extracción de electrones del sodio?**

Datos: $h = 6{,}625 \cdot 10^{-34}$ J s; 1 eV = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J.

Energía de la luz incidente:

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,\ 625 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1}}{3 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} =$$

$$= 6{,}625 \cdot 10^{-19}\ \text{J} = 4{,}14\ \text{eV}$$

Como esta energía es mayor que el trabajo de extracción, sí se produce la extracción de electrones.

6. **Un haz de luz monocromática de $6{,}5 \cdot 10^{14}$ Hz ilumina una superficie metálica que emite electrones con una energía cinética de $1{,}3 \cdot 10^{-19}$ J. ¿Cuál es el trabajo de extracción del metal? ¿Cuál es su frecuencia umbral?**

La energía del fotón incidente es:

$E = hf = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 6{,}5 \cdot 10^{14}\ \text{s}^{-1} = 4{,}3 \cdot 10^{-19}$ J

Por tanto, el trabajo de extracción del metal es:

$W_e = E - E_c = 4{,}3 \cdot 10^{-19}\ \text{J} - 1{,}3 \cdot 10^{-19}\ \text{J} = 3 \cdot 10^{-19}$ J

La frecuencia umbral es:

$$f_0 = \frac{W_e}{h} = \frac{3 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s}} = 4{,}5 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}$$

7. **Los fotoelectrones emitidos por una superficie metálica tienen una energía cinética máxima de 2,03 eV para una radiación incidente de 300 nm de longitud de onda. Halla la función de trabajo de la superficie y la longitud de onda umbral.**

PAU

La función trabajo o trabajo de extracción se obtiene mediante la ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico:

$hf = E_c + W_e$

$E_c = 2{,}03\ \text{eV} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J/eV} = 3{,}25 \cdot 10^{-19}$ J

$$W_e = \frac{hc}{\lambda} - E_c =$$

$$= 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot \frac{3.\ 10^{8}\ \text{m s}^{-1}}{3 \cdot 10^{7}\ \text{m}} - 3{,}25 \cdot 10^{-19}\ \text{J} = 3{,}38 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

La frecuencia umbral es la que corresponde al trabajo de extracción:

$$W_e = hf_0 = \frac{hc}{\lambda_0}; \qquad \lambda_0 = \frac{hc}{W_e} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1}}{3{,}38 \cdot 10^{-19}\ \text{J}} =$$

$$= 5{,}88 \cdot 10^{-7}\ \text{m} = 588\ \text{nm}$$

8. **¿Por qué la existencia de una frecuencia umbral para el efecto fotoeléctrico es un hecho que va en contra de la teoría ondulatoria de la luz?**

De acuerdo con la teoría ondulatoria de la luz, la emisión de electrones debería producirse a cualquier frecuencia. A inten-

sidades luminosas bajas habría un retraso en la producción de fotoelectrones; con intensidades luminosas altas el fenómeno se produciría rápidamente.

9. Supongamos que se ilumina el mismo metal con dos focos de la misma luz monocromática de 100 y 400 W, respectivamente. ¿Cuál de los dos producirá mayor número de fotoelectrones? ¿Qué fotoelectrones abandonarán el metal con más energía? PAU

El foco de mayor potencia produce más fotoelectrones.

La energía con que los fotoelectrones abandonan el metal es la misma en ambos casos: se ilumina el mismo metal (igual trabajo de extracción) con la misma luz monocromática (igual frecuencia).

10. Una fuente de luz monocromática emite una radiación electromagnética con una longitud de onda de $4{,}8 \cdot 10^{-7}$ m y una potencia de 20 W. ¿Cuál es la energía de cada fotón? ¿Cuántos fotones por segundo emite esta fuente?

De acuerdo con la Hipótesis de Planck, la energía de un fotón es:

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1}}{4{,}8 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} = 4{,}1 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

Como la fuente emite luz monocromática con una potencia de 20 J/s, el número de fotones emitidos por segundo es:

$$\frac{20\ \text{J s}^{-1}}{4{,}1 \cdot 10^{-19}\ \text{J/fotón}} = 4{,}8 \cdot 10^{19}\ \text{fotones}$$

11. Si se duplica la frecuencia de la radiación que incide sobre la superficie de un metal, ¿se duplica la energía cinética máxima de los electrones extraídos? PAU

La energía del fotón incidente es igual al trabajo de extracción más la energía cinética del electrón; por consiguiente, si se duplica la frecuencia no se duplica la energía cinética de los electrones extraídos, ya que el trabajo de extracción no varía:

$$E = W_e + E_c; \qquad hf = hf_0 + E_c$$

La energía cinética será, en cualquier caso, más del doble de la inicial.

12. Si el trabajo de extracción de la superficie de un determinado material es de 2,07 eV: PAU

a) **¿En qué rango de longitudes de onda del espectro visible puede utilizarse este material en células fotoeléctricas? Las longitudes de onda de la luz visible están comprendidas entre 380 nm y 775 nm.**

b) **Calcula la velocidad de extracción de los electrones emitidos para una longitud de onda de 400 nm.**

a) A partir de la frecuencia umbral (frecuencia mínima necesaria para que se produzca el efecto fotoeléctrico), se obtiene la longitud de onda máxima que produce este efecto:

$$W_e = hf_0 = \frac{hc}{f\,\lambda_{\text{máx}}}$$

$$2{,}07\ \text{eV} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J eV}^{-1} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1}}{\lambda_{\text{máx}}}$$

$$\lambda_{\text{máx}} = 6 \cdot 10^{-7}\ \text{m} = 600\ \text{nm}$$

Como las longitudes de onda de la luz visible están comprendidas entre 380 y 775 nm, el efecto fotoeléctrico se producirá con luces visibles cuya longitud de onda esté comprendida entre 380 y 600 nm.

b) A partir de la ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico, se obtiene:

$$E = W_e + E_c; \qquad \frac{hc}{\lambda} = W_e + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1}}{400 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} =$$

$$= 2{,}07 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J} + \frac{1}{2} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot v^2$$

$$v = 6{,}04 \cdot 10^{5}\ \text{m s}^{-1}$$

13. La longitud de onda umbral de un cierto metal es de 275 nm. Calcula: PAU

a) **La función de trabajo o energía de extracción de los electrones, en eV, de ese metal.**

b) **La velocidad máxima de los fotoelectrones producidos si se emplea una radiación de 220 nm de longitud de onda.**

a) La energía de extracción de los electrones es la energía del fotón de longitud de onda umbral:

$$W_e = hf_0 = \frac{hc}{\lambda_0} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1}}{2{,}75 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} =$$

$$= 7{,}23 \cdot 10^{-19}\ \text{J} = \frac{7{,}23 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J/eV}} = 4{,}52\ \text{eV}$$

b) La energía cinética de los electrones se calcula mediante la ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico:

$$E_c = \frac{hc}{\lambda} - W_e =$$

$$= \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1}}{2{,}20 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} - 7{,}23 \cdot 10^{-19}\ \text{J} =$$

$$= 1{,}81 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

La velocidad máxima de los fotoelectrones se obtiene a partir de la energía cinética:

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}81 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}} = 6{,}3 \cdot 10^{5}\ \text{m s}^{-1}$$

14. Si el trabajo de extracción de una superficie de potasio es igual a 2,2 eV, ¿se podría utilizar el potasio en células fotoeléctricas para funcionar con luz visible? En caso afirmativo, ¿cuánto vale la velocidad máxima de salida de los fotoelectrones?

Dato: frecuencia máxima de la luz visible, $7{,}5 \cdot 10^{14}$ Hz.

La frecuencia umbral es la que corresponde al trabajo de extracción:

$$f_0 = \frac{W_e}{h} = \frac{2{,}2\ \text{eV} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J/eV}}{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s}} = 5{,}3 \cdot 10^{14}\ \text{s}^{-1}$$

Esta frecuencia corresponde a una luz verde, por tanto, el potasio sí se podría utilizar en células fotoeléctricas que funcionasen con luz visible.

La velocidad máxima de salida de los fotoelectrones se obtiene utilizando luz visible de máxima frecuencia, es decir, luz violeta. La energía cinética máxima de los fotoelectrones es:

$E_c = hf - W_e =$

$= (6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 7{,}5 \cdot 10^{14}\ \text{s}^{-1}) - (2{,}2\ \text{eV} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J/eV}) =$

$= 1{,}45 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}45 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}} = 5{,}7 \cdot 10^5\ \text{m s}^{-1}$$

15. Una fuente luminosa cuya potencia es de 20 W emite luz de $1{,}0 \cdot 10^{15}$ Hz de frecuencia en todas direcciones. Si una célula fotoeléctrica está situada a 2,0 m de distancia del foco luminoso, ¿cuántos fotones inciden por segundo en el cátodo de la fotocélula, si este tiene una superficie de 10 cm^2?

La potencia que incide sobre los 10 cm^2 del cátodo, situado a 2 m de distancia, es:

$$P = 20\ \text{J s}^{-1} \cdot \frac{10^{-3}\ \text{m}^2}{4\pi \cdot 2^2\ \text{m}^2} = 3{,}98 \cdot 10^{-4}\ \text{J/s}$$

La energía de un fotón es:

$E = hf = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 10^{15}\ \text{s}^{-1} = 6{,}63 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$

El número de fotones que inciden por segundo será:

$$\frac{3{,}98 \cdot 10^{-4}\ \text{J s}^{-1}}{6{,}63 \cdot 10^{-19}\ \text{J/fotón}} = 6{,}0 \cdot 10^{14}\ \text{fotones/s}$$

16. PAU **Al iluminar la superficie de un metal con luz de longitud de onda 280 nm, la emisión de fotoelectrones cesa para un potencial de frenado de 1,3 V.**

***a)* Determina la función trabajo del metal y la frecuencia umbral de emisión fotoeléctrica.**

***b)* Cuando la superficie del metal se ha oxidado, el potencial de frenado para la misma luz incidente es de 0,7 V. Razona cómo cambian, debido a la oxidación del metal: i) la energía cinética máxima de los fotoelectrones, ii) la frecuencia umbral de emisión; iii) la función trabajo.**

a) Ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico:

$E = W_e - E_c =$

$= W_e \dfrac{hc}{\lambda} - eV_0 =$

$= \dfrac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 3 \cdot 10^8\ \text{m s}^{-1}}{280 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} - 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 1{,}3\ \text{J C}^{-1};$

$W_e = 5{,}02 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$

b) De acuerdo con la ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico, si al oxidarse el metal disminuye el potencial de frenado se debe a que la energía cinética máxima de los fotoelectrones ha disminuido y, por tanto, ha aumentado el trabajo de extracción o función trabajo. En consecuencia, también habrá aumentado la frecuencia umbral.

17. Un material iluminado con luz de frecuencia $7{,}5 \cdot 10^{14}$ Hz emite fotoelectrones cuyo potencial de frenado es igual a 0,70 V. Luego se cambia la frecuencia de la luz y el nuevo potencial de frenado es 1,45 V. ¿Cuál es la frecuencia de la segunda luz?

El potencial de frenado (V_0) y la energía cinética se relacionan según la ecuación $E_c = eV_0$. Por tanto, la ecuación del efecto fotoeléctrico para ambas frecuencias es:

$hf_1 = eV_{01} + W_e; \qquad hf_2 = eV_{02} + W_e$

Restando ambas ecuaciones se obtiene:

$$hf_2 - hf_1 = e\,(V_{02} - V_{01}); \qquad f_2 = \frac{e\,(V_{02} - V_{01})}{h} + f_1$$

$$f_2 = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot (1{,}45\ \text{V} - 0{,}79\ \text{V})}{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s}} + 7{,}5 \cdot 10^{14}\ \text{s}^{-1} =$$

$= 9{,}3 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}$

18. ¿Por qué el espectro del hidrógeno tiene muchas líneas si el átomo de hidrógeno tiene un solo electrón?

El electrón puede saltar entre distintos niveles de energía y en una muestra de hidrógeno existen numerosísimos átomos en diversos estados de energía.

19. Calcula la longitud de onda de la tercera línea de la serie de Lyman en el espectro del hidrógeno.

Para la tercera línea de la serie de Lyman, $n_1 = 1$ y $n_2 = 4$:

$$\frac{1}{\lambda} = \text{R}\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) = 1{,}09677 \cdot 10^7\ \text{m}^{-1} \cdot \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{4^2}\right) =$$

$= 1{,}03 \cdot 10^7\ \text{m}^{-1}; \qquad \lambda = 9{,}71 \cdot 10^{-8}\ \text{m}$

20. PAU **La longitud de onda de una de las rayas amarillas del espectro visible del sodio es de 589 nm. Calcula la diferencia de energía entre los niveles electrónicos del átomo de sodio correspondientes a esta transición.**

$$E_2 - E_1 = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 3 \cdot 10^8\ \text{m s}^{-1}}{5{,}89 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} =$$

$= 3{,}38 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$

21. ¿Cuál es la mínima cantidad de energía que debe absorber un átomo de hidrógeno para pasar de su estado fundamental al primer estado excitado? Si la energía se suministra en forma de radiación electromagnética, ¿cuál es la longitud de onda de la radiación necesaria? ¿Qué tipo de onda electromagnética es?

En el estado fundamental $n_1 = 1$ y en el primer estado excitado $n_2 = 2$:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) = 1{,}09677 \cdot 10^7\ \text{m}^{-1} \cdot \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) =$$

$= 8{,}23 \cdot 10^6\ \text{m}^{-1}; \qquad \lambda = 1{,}22 \cdot 10^{-7}\ \text{m} = 122\ \text{m}$

Esta longitud de onda corresponde a una radiación ultravioleta.

La energía necesaria es:

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 3 \cdot 10^8\ \text{m s}^{-1}}{1{,}22 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} =$$

$= 1{,}64 \cdot 10^{-18}\ \text{J}$

22. ¿Por qué en el movimiento de los cuerpos ordinarios no tenemos en cuenta la onda asociada de De Broglie?

Al ser grande el momento lineal, la longitud de onda es muy pequeña.

23. Un haz monocromático de luz roja posee una longitud de onda de 650 nm.

PAU

Calcula:

a) **La frecuencia.**

b) **La energía de un fotón.**

c) **La cantidad de movimiento de ese fotón.**

a) $f = \dfrac{c}{\lambda} = \dfrac{3.\ 10^8 \text{ m s}^{-1}}{6{,}5 \cdot 10^{-7} \text{ m}} = 4{,}6 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$

b) $E = hf = 6{,}63 \cdot 10^{-34} \text{ J s} \cdot 4{,}6 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1} = 3{,}05 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

c) $\lambda = \dfrac{h}{p}; \qquad p = \dfrac{h}{\lambda} = \dfrac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \text{ J s}}{6{,}5 \cdot 10^{-7} \text{ m}} = 1{,}02 \cdot 10^{-27} \text{ kg m s}^{-1}$

24. Las partículas α son núcleos de helio, de masa cuatro veces la del protón, aproximadamente. Si una partícula α y un protón, que poseen la misma energía cinética, se mueven a velocidades mucho menores que la luz, ¿qué relación existe entre las longitudes de onda de De Broglie correspondientes a las dos partículas?

PAU

Como ambas partículas poseen la misma energía cinética, se cumple:

$$\frac{m_p v_p^2}{2} = \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2}; \qquad m_\alpha = 4\,m_p; \qquad m_p v_p^2 = 4\,m_p v_\alpha^2; \qquad v_p = 2\,v_\alpha$$

La relación entre las longitudes de onda de De Broglie es:

$$\lambda_p = \frac{h}{m_p v_p}; \qquad \lambda_\alpha = \frac{h}{m_\alpha v_\alpha}; \qquad \frac{\lambda_p}{\lambda_\alpha} = \frac{m_\alpha v_\alpha}{m_p v_p} = \frac{4\,m_p v_\alpha}{m_p 2\,v_\alpha} = 2$$

$\lambda_p = 2\,\lambda_\alpha$

La longitud de onda asociada al protón es el doble que la asociada a la partícula alfa.

25. Responde a las siguientes preguntas:

PAU

a) **¿Qué velocidad ha de tener un electrón para que su longitud de onda de De Broglie sea 400 veces mayor que la de un neutrón de 6,0 eV de energía cinética?**

b) **¿Se puede considerar que a esa velocidad el electrón es no relativista?**

a) Las longitudes de onda asociadas al electrón y al neutrón son:

$$\lambda_e = \frac{h}{m_e v_e}; \qquad \lambda_n = \frac{h}{\sqrt{2\,E_{cn} m_n}}$$

Como:

$$\lambda_e = \frac{h}{m_e v_e} = 400\,\frac{h}{\sqrt{2\,E_{cn} m_n}}; \qquad v_e = \frac{\sqrt{2\,E_{cn} m_n}}{400\,m_e}$$

$$v_e = \frac{\sqrt{2 \cdot 6 \text{ eV} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV} \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}}{400 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} =$$

$= 1{,}6 \cdot 10^5 \text{ m s}^{-1}$

b) La velocidad del electrón puede considerarse no relativista, puesto que es mucho menor que la velocidad de la luz.

26. Un protón que parte del reposo es acelerado por una diferencia de potencial de 10 V. Determina:

PAU

a) **La energía que adquiere el protón expresada en eV y su velocidad en m/s.**

b) **La longitud de onda de De Broglie asociada al protón con la velocidad anterior.**

Datos: $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ **J s;** $m_P = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ **kg;**
$q_p = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ **C.**

a) La energía que adquiere el protón coincide con el trabajo que realiza el campo eléctrico:

$E_c = q\,V = 1 \text{ e} \cdot 10 \text{ V} = 10 \text{ eV} =$

$= 10 \text{ eV} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ J eV}^{-1} = 1{,}6 \cdot 10^{-18} \text{ J}$

b) La longitud de onda de De Broglie es la siguiente:

$$\lambda = \frac{h}{m v} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \text{ J s}}{1{,}67 \cdot 10^{27} \text{ kg } 4{,}38 \cdot 10^5 \text{ m s}^{-1}} =$$

$= 9{,}06 \cdot 10^{-13} \text{ m}$

27. ¿Por qué el concepto de órbita electrónica carece de sentido en la Mecánica Cuántica?

Si no es posible determinar la posición y la velocidad de un electrón en un instante determinado, no es posible mantener el concepto de trayectoria y no tiene sentido hablar de órbitas electrónicas en los átomos.

28. ¿Cuándo coinciden las leyes de la Física clásica con las de la Física Cuántica?

Cuando la Mecánica Cuántica se aplica a sistemas de dimensiones ordinarias.

29. Las velocidades de un electrón y de una bala de 30 g se miden con una indeterminación en ambos casos de 10^{-3} m s^{-1}. Según el Principio de Incertidumbre de Heisenberg, ¿cuáles son las indeterminaciones en el conocimiento de su posición?

Dato: masa del electrón = $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

De acuerdo con el Principio de Incertidumbre de Heisenberg, se cumple:

Para el electrón:

$$\Delta x \geq \frac{h}{2\pi \cdot \Delta p} \geq \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \text{ J s}}{6{,}28 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 10^{-3} \text{ m s}^{-1}} \geq 0{,}12 \text{ m}$$

Para la bala:

$$\Delta x \geq \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \text{ J s}}{6{,}28 \cdot 3 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot 10^{-3} \text{ m s}^{-1}} \geq 3{,}5 \cdot 10^{-30} \text{ m}$$

30. Un grano de arena de masa 1 mg se mueve con una velocidad de 20 m/s. Si la indeterminación en su posición es de 10^{-7} m, ¿cuál es la mínima indeterminación en su velocidad? Analiza el resultado.

De acuerdo con el Principio de Incertidumbre de Heisenberg, se cumple:

$$\Delta v \geq \frac{h}{2\pi \cdot \Delta x \cdot m} \geq \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s}}{6{,}28 \cdot 10^{-7}\ \text{m} \cdot 10^{-6}\ \text{kg}} \geq$$

$$\geq 1{,}1 \cdot 10^{-21}\ \text{m s}^{-1}$$

Aunque la indeterminación en la posición es muy pequeña a escala macroscópica, la indeterminación en la velocidad es tan pequeña que resulta completamente despreciable.

31. ¿Qué relación existe entre la nube de probabilidades y la densidad electrónica?

Cuanto mayor es la probabilidad de encontrar el electrón, mayor es la densidad electrónica.

32. Un láser de He-Ne emite fotones con energías de $3{,}20 \cdot 10^{-19}$ J. ¿Cuál es el color de la luz de este láser?

La frecuencia de la luz del láser es:

$$f = \frac{E}{h} = \frac{3{,}23 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s}} = 4{,}83 \cdot 10^{14}\ \text{s}^{-1}$$

Esta frecuencia corresponde a una luz roja.

33. ¿Qué diferencias existen entre la emisión espontánea y la emisión estimulada de radiació?

La emisión espontánea de radiación se produce cuando los átomos excitados caen a un nivel de energía más bajo y emiten fotones espontáneamente. Por ser un proceso aleatorio, los fotones emitidos no son coherentes, es decir, no están en fase los unos con los otros.

En el proceso de emisión estimulada de radiación, la emisión se produce cuando hay más átomos en el nivel superior de energía que en el inferior (inversión de población). Esto se consigue, generalmente, mediante una luz de frecuencia adecuada. En este caso, se produce un haz intenso de luz de una sola frecuencia, estando todas las ondas en fase entre sí (luz coherente).

34. Un láser de longitud de onda $\lambda = 650$ nm tiene una potencia de 12 mW y un diámetro de haz de 0,82 mm. Calcula:

a) **La intensidad del haz.**

b) **El número de fotones por segundo que viajan con el haz.**

a) La intensidad del haz es:

$$I = \frac{P}{A} = \frac{P}{\pi r^2} = \frac{12 \cdot 10^{-3}\ \text{W}}{3{,}14 \cdot (4{,}1 \cdot 10^{-4}\ \text{m})^2} = 2{,}3 \cdot 10^4\ \text{W m}^{-2}$$

b) La energía de un fotón del láser es:

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 3 \cdot 10^8\ \text{m s}^{-1}}{6{,}5 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} = 3{,}1 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

La intensidad del haz considerando los fotones es la siguiente:

$$I = \frac{2{,}3 \cdot 10\ \text{J s}^{-1}\text{m}^{-2}}{3{,}1 \cdot 10^{-19}\ \text{J/fotón}} = 7{,}4 \cdot 10^{22}\ \text{fotones s}^{-1}\text{m}^{-2}$$

El número de fotones por segundo que viajan con el haz es:

$$\text{N.º de fotones} = IA = I\pi r^2 =$$

$$7{,}4 \cdot 10^{22}\ \text{fotones s}^{-1}\text{m}^{-2} \cdot 3{,}14\ (4{,}1 \cdot 10^{-4}\ \text{m})^2 =$$

$$= 3{,}9 \cdot 10^{16}\ \text{fotones/s}$$

35. Un microscopio electrónico utiliza electrones de 50 keV. ¿Cuál es el poder de resolución del microscopio suponiendo que sea igual a la longitud de onda de los electrones?

La longitud de onda asociada a los electrones es:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mVe}} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J s}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 5 \cdot 10^4\ \text{V} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}}} =$$

$$= 5{,}5 \cdot 10^{-12}\ \text{m}$$

Actividades

1. **a) Indica la composición de los siguientes núcleos:**

 $^{14}_{7}N$, $^{19}_{9}F$, $^{31}_{15}P$, $^{59}_{27}Co$, $^{238}_{92}U$

 b) Indica la composición del núcleo de un isótopo del uranio-238.

 a) N: 7p y 7n; F: 9p y 10n; P: 15p y 16n; Co: 27p y 32n; U: 92p y 146n

 b) U: 92p y 146n

2. **El radio del núcleo del carbono-12 es aproximadamente de $2{,}7 \cdot 10^{-15}$ m. Calcula la masa, el volumen y la densidad de su núcleo.**

 La masa del núcleo del carbono-12 es la siguiente:

 $12\ u = 12\ u \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ kg\,u^{-1} = 2{,}0 \cdot 10^{-26}\ kg$

 El volumen del núcleo es:

 $$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot (2{,}7 \cdot 10^{-15}\ m)^3}{3} = 8{,}2 \cdot 10^{-44}\ m^3$$

 La densidad es:

 $$d = \frac{m}{V} = \frac{2 \cdot 10^{-26}\ kg}{8{,}2 \cdot 10^{-44}\ m^3} = 2{,}4 \cdot 10^{17}\ kg\,m^{-3}$$

3. **Justifica la estabilidad de los núcleos atómicos en función de las interacciones que se producen entre los nucleones.**

 La fuerza eléctrica de repulsión entre los protones es mucho mayor que la fuerza gravitatoria, atractiva. En consecuencia, debe existir una tercera fuerza, atractiva, muy intensa, de corto alcance, que supere las fuerzas eléctricas de repulsión y mantenga unido al núcleo: interacción nuclear fuerte.

4. **Determina el defecto de masa, la energía de enlace y la energía de enlace por nucleón para el núcleo del carbono-12.**

 El núcleo está formado por 6 protones y 6 neutrones. La masa de estas partículas es la siguiente:

Masa de 6 protones:	6 · 1,0073 u = 6,0438 u
Masa de 6 neutrones:	6 · 1,0087 u = 6,0522 u
Masa total:	12,0960 u
Masa del núcleo de carbono-12:	12,0000 u
Defecto de masa:	0,0960 u

 Como 1 u equivale a 931 MeV, la energía de enlace es:

 $E = 0{,}0960\ u \cdot 931\ MeV/u = 89{,}4\ MeV$

 El núcleo del carbono-12 contiene 12 nucleones; por tanto, la energía de enlace por nucleón es:

 $$\frac{E}{A} = \frac{89{,}4\ MeV}{12\ nucleones} = 7{,}4\ MeV/nucleón$$

5. **Define las siguientes magnitudes asociadas con los procesos de desintegración radiactiva: actividad, constante de desintegración, periodo de semidesintegración y vida media. Indica sus unidades en el Sistema Internacional.** PAU

 La actividad o velocidad de desintegración de una sustancia radiactiva es el número de desintegraciones por unidad de tiempo. Su unidad en el SI es el becquerel (Bq).

 La constante de desintegración representa la probabilidad de que un determinado núcleo radiactivo se desintegre. Su unidad en el SI es el s^{-1}.

 El periodo de semidesintegración es el tiempo que debe transcurrir para que el número de núcleos presentes en una muestra radiactiva se reduzca a la mitad. Su unidad en el SI es el segundo.

 La vida media es el promedio de vida, es decir, el tiempo que por término medio tardará un núcleo en desintegrarse. Su unidad en el SI es el segundo.

6. **Determina el número atómico y el número másico del elemento producido a partir del $^{218}_{85}Po$, después de emitir cuatro partículas alfa y dos beta.** PAU

 De acuerdo con las leyes de Soddy y Fajans:

 $Z = 84 - (4 \cdot 2) + (2 \cdot 1) = 78$

 $A = 218 - (4 \cdot 4) = 202$

 Se trata del ^{202}Pt.

7. **El $^{226}_{88}Ra$ se desintegra radiactivamente para dar $^{222}_{89}Rn$.** PAU

 a) Indica el tipo de emisión radiactiva y escribe la correspondiente ecuación.

 b) Calcula la energía liberada en el proceso.

 Datos: $m_{Ra} = 225{,}9771$ u; $m_{Rn} = 221{,}9703$ u; $m_{He} = 4{,}0026$ u; 1 u = $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg.

 a) Se trata de una emisión alfa:

 $$^{226}_{88}Ra \rightarrow {}^{222}_{86}Rn + {}^{4}_{2}He + \gamma$$

 b) La energía liberada puede obtenerse a partir del defecto de masa y de la ecuación de Einstein que relaciona masa y energía:

 $\Delta m = m_{Ra} - (m_{Rn} - m_{He}) =$

 $= 25{,}9771\ u - (221{,}9703 + 4{,}0026)\ u = 4{,}2 \cdot 10^{-3}\ u$

 $\Delta m = 4{,}2 \cdot 10^{-3}\ u \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ kg\,u^{-1} = 7{,}01 \cdot 10^{-30}\ kg$

 $E = \Delta m\, c^2 = 7{,}01 \cdot 10^{-30}\ kg \cdot (30 \cdot 10^8\ m\,s^{-1})^2 =$

 $= 6{,}31 \cdot 10^{-13}\ J$

8. **El $^{131}_{53}I$ se desintegra por emisión beta con un periodo de semidesintegración de 8 días. Una muestra de este material presenta una actividad de 10^5 Ci.** PAU

 a) Escribe la ecuación del proceso nuclear que tiene lugar.

 b) ¿Qué número de núcleos del yodo-131 existen en la muestra inicial?

 c) ¿Cuál será la actividad radiactiva de la muestra 25 días después?

 a) De acuerdo con las leyes de Soddy y Fajans, cuando en una transformación radiactiva se emite una partícula β se obtiene un núcleo cuyo número atómico es una unidad mayor y no varía su número másico:

$^{131}_{53}\mathrm{I} \rightarrow {}^{131}_{54}\mathrm{Xe} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e}$

El elemento de número atómico 54 es el xenón (Xe).

b) La constante de desintegración λ se obtiene a partir del periodo de semidesintegración $T_{1/2}$:

$$\lambda = \frac{\mathrm{L}\,2}{T_{1/2}} = \frac{\mathrm{L}\,2}{8\text{ días}} = \frac{\mathrm{L}\,2}{6{,}9 \cdot 10^5\text{ s}} = 1{,}0 \cdot 10^{-6}\text{ s}^{-1}$$

A partir de la ecuación de la actividad obtenemos el número de núcleos de yodo existentes en la muestra inicial:

$A_0 = \lambda N_0$;

$$N_0 = \frac{A_0}{\lambda} = \frac{10^5\text{ Ci} \cdot 10^{10}\text{ Bq/Ci}}{1{,}0 \cdot 10^{-6}\text{ s}^{-1}} = 3{,}7 \cdot 10^{21}\text{ núcleos}$$

c) La actividad de la muestra se obtiene a partir de la ecuación fundamental de las desintegraciones radiactivas:

$A = A_0 e^{-\lambda t} = 10^5\text{ Ci} \cdot 3{,}7 \cdot 10^{10}\text{ Bq/Ci} \cdot e^{-1{,}0 \cdot 10^{-6} s^{-1} \cdot 2{,}16 \cdot 10^6 s}$

$A = 4{,}3 \cdot 10^{14}\text{ Bq} = 1{,}2 \cdot 10^4\text{ Ci}$

9. Se tiene una muestra de 20 g de polonio-210, cuyo periodo de semidesintegración es de 138 días. ¿Qué cantidad quedará cuando hayan transcurrido 30 días? PAU

La constante de desintegración es:

$$\lambda = \frac{0{,}693}{T_{1/2}} = \frac{0{,}693}{138\text{ días}} = 5{,}02 \cdot 10^{-3}\text{ días}^{-1}$$

La masa no desintegrada se obtiene a partir de la ecuación fundamental de la radiactividad:

$m = m_0 e^{-\lambda t} = 20 \cdot e^{-5{,}02 \cdot 10^{-3} \cdot 30} = 20 \cdot e^{-0{,}15} = 1{,}72\text{ g}$

10. ¿Qué es una serie o familia radiactiva? Cita un ejemplo. PAU

Una serie radiactiva es el conjunto de núcleos que se producen por desintegración de uno inicial (núcleo padre) hasta llegar a uno estable. Ejemplo: familia del uranio-238.

11. Completa las siguientes reacciones nucleares:

a) $^{27}_{13}\mathrm{Al} + \ldots \rightarrow {}^{30}_{15}\mathrm{P} + {}^{1}_{0}\mathrm{n}$

b) $^{9}_{4}\mathrm{Be} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow {}^{1}_{0}\mathrm{n} + \ldots$

c) $\ldots + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow 2\,{}^{4}_{2}\mathrm{He}$

d) $^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow \ldots + {}^{1}_{1}\mathrm{H}$

a) $^{27}_{13}\mathrm{Al} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow {}^{30}_{15}\mathrm{P} + {}^{1}_{0}\mathrm{n}$

b) $^{9}_{4}\mathrm{Be} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow {}^{1}_{0}\mathrm{n} + {}^{12}_{6}\mathrm{C}$

c) $^{7}_{3}\mathrm{Li} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow 2\,{}^{4}_{2}\mathrm{He}$

d) $^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow {}^{17}_{8}\mathrm{O} + {}^{1}_{1}\mathrm{H}$

12. ¿Qué cantidad de energía se libera en la reacción de fusión $2\,{}^{2}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He}$?

Datos: masa del hidrógeno-2 = 2,0141 u;
masa del helio-4 = 4,0026 u.

a) El defecto de masa de la reacción es:

$\Delta m = 2 \cdot 2{,}0141\text{ u} - 4{,}0026\text{ u} = 0{,}0256\text{ u}$

Energía liberada:

$E = 0{,}0256\text{ u} \cdot 931\text{ MeV/u} = 23{,}8\text{ MeV}$

b) Para unir dos núcleos hay que vencer las fuerzas eléctricas de repulsión que existen entre las cargas positivas de los protones. Para conseguirlo, los núcleos deben chocar entre sí a velocidades suficientemente altas como para vencer la repulsión, lo que requiere temperaturas de varios cientos de millones de grados.

13. ¿Por qué en los procesos de fisión y de fusión nuclear se libera gran cantidad de energía?

Porque una parte de la masa se transforma en energía de acuerdo con la ecuación de Einstein, $E = m c^2$.

14. ¿Qué características presentan los reactores reproductores? ¿Qué inconvenientes puede presentar su utilización?

Producen nuevo material fisionable, incluso en mayor cantidad que el consumido durante su funcionamiento.

El plutonio-239 producido puede utilizarse para fabricar armas nucleares.

15. ¿Qué es la masa crítica? ¿Se puede producir una explosión nuclear, similar a una bomba atómica, en un reactor nuclear?

Se denomina masa crítica a la cantidad mínima de material fisionable necesaria para producir una reacción en cadena.

En un reactor nuclear no se puede producir una explosión similar a una bomba atómica, porque el material fisionable está poco enriquecido en uranio-235.

16. Explica la función que desempeñan los siguientes componentes de un reactor nuclear:

***a)* uranio enriquecido;** ***b)* blindaje;**
***c)* barras de control;** ***d)* moderador;**
***e)* cambiador de calor;** ***f)* agua de refrigeración.**

a) El uranio enriquecido es el material fisionable, el «combustible» del reactor.

b) El blindaje impide la salida al exterior del reactor de las distintas radiaciones.

c) Las barras de control absorben neutrones y regulan la reacción en cadena.

d) El moderador frena los neutrones rápidos producidos en la fisión.

e) El calor producido en el reactor se recoge en el circuito primario que cede al circuito secundario en el cambiador de calor.

f) El vapor de agua que sale de la turbina se licua en el condensador, enfriándose mediante el agua de refrigeración. El vapor producido puede verse sobre las inmensas torres de refrigeración de las centrales nucleares.

17. El Sol emite aproximadamente $3{,}6 \cdot 10^{26}$ J de energía cada segundo. Averigua cuánto tiempo tardará la masa del Sol en reducirse a la mitad, suponiendo que la radiación permanezca constante.

Datos: masa del Sol = $2 \cdot 10^{30}$ kg.

La energía producida por el Sol se debe a procesos de fusión nuclear. La masa equivalente a $3{,}6 \cdot 10^{26}$ J.

$$\Delta m = \frac{E}{c^2} = \frac{3{,}6 \cdot 10^{26}\ \text{J}}{(3 \cdot 10^8\ \text{m s}^{-1})^2} = 4 \cdot 10^9\ \text{kg}$$

es decir, el Sol pierde $4 \cdot 10^9$ kg de masa cada segundo. Como su masa es de $2 \cdot 10^{30}$ kg, para que se reduzca a la mitad ha de transcurrir el siguiente tiempo:

$$t = \frac{1 \cdot 10^{30}\ \text{kg}}{4 \cdot 10^9\ \text{kg s}^{-1}} = 2{,}5 \cdot 10^{20}\ \text{s} \approx 7{,}9 \cdot 10^{12}\ \text{años}$$

Antes de que transcurra ese tiempo, el Sol se convertirá en una «gigante roja» y después en una «enana blanca».

18. *a)* Algunos átomos de $^{14}_{7}$N atmosférico chocan con un neutrón y se transforman en $^{14}_{6}$C que, por emisión beta, se convierten de nuevo en nitrógeno. Escribe las correspondientes reacciones nucleares.

PAU

***b)* Los restos de animales recientes contienen mayor proporción de carbono-14 que los de animales antiguos. ¿A qué se debe este hecho y qué aplicación tiene?**

a) $^{14}_{7}\text{N} + ^{1}_{0}\text{n} \rightarrow ^{14}_{6}\text{C} + ^{1}_{1}\text{H}$; $\quad ^{14}_{6}\text{C} \rightarrow ^{14}_{7}\text{N} + ^{0}_{-1}\text{e}$

b) En los animales vivos se asimila el carbono-14 y su concentración permanece constante cuando el animal está vivo. Cuando muere, el carbono-14 se va desintegrando y su concentración disminuye, lo que permite determinar el tiempo transcurrido desde su muerte.

19. Los restos de un animal encontrados en un yacimiento arqueológico tienen una actividad radiactiva de 2,6 desintegraciones por minuto y gramo de carbono. Calcula el tiempo transcurrido, aproximadamente, desde la muerte del animal.

Datos: la actividad del carbono-14 en los seres vivos es de 15 desintegraciones por minuto y por gramo de carbono. $T_{1/2}$ 5 730 años.

La ecuación fundamental de la radiactividad en función de la actividad es:

$$A = A_0 e^{-\lambda t}; \qquad \frac{A}{A_0} = e^{-\lambda t}$$

Si se tiene en cuenta la relación existente entre la constante de desintegración y el periodo de semidesintegración, al aplicar logaritmos neperianos, resulta lo siguiente:

$$\text{L}\,\frac{A}{A_0} = -\lambda t; \qquad \text{L}\,\frac{A}{A_0} = -\frac{0{,}693\,t}{T_{1/2}}$$

$$\text{L}\,\frac{2{,}6}{15} = -\frac{0{,}693\,t}{5\,730\ \text{años}}; \qquad t \approx 14\,500\ \text{años}$$

20. Indica los nombres y las características de los seis leptones. ¿Por qué se dice que están apareados?

Electrón (e^-), muón (μ^-), tauón (τ^-), neutrino electrónico (ν_e), neutrino muónico (ν_μ) y neutrino tauónico (ν_τ).

Cada pareja de leptones está formada por un leptón cargado negativamente y su correspondiente neutrino.

21. Indica los nombres y la carga eléctrica de los quarks.

Arriba (u), encanto (c) y cima (t): $+\frac{2}{3}\,e$.

Abajo (d), extraño (s) y fondo (b): $-\frac{1}{3}\,e$.

22. Expresa la masa del quark *d* en kilogramos.

Masa del quark d = 6 MeV/c^2.

$$m = \frac{6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-13}\ \text{J}}{(3 \cdot 10^8\ \text{m s}^{-1})^2} = 1{,}1 \cdot 10^{-29}\ \text{kg}$$

23. Explica la carga eléctrica del protón en función de los quarks que lo constituyen.

Protón (u, u, d): $\quad 2\left(+\frac{2}{3}\,e\right) + \left(-\frac{1}{3}\,e\right) = +e$

24. Explica las características de la materia y la antimateria. ¿En qué se convierten la materia y la antimateria cuando se aniquilan entre sí?

Véase el Apartado 13.9 del libro de texto.

Energía nuclear

Cuestiones

1. Los residuos de una central nuclear contienen 200 t de U-238. Si su periodo de semidesintegración es $4{,}5 \cdot 10^9$ años, quedarán 50 t de U-238 cuando hayan transcurrido:

***a)* $9 \cdot 10^9$ años;**

***b)* $4{,}5 \cdot 10^9$ años;**

***c)* $1{,}35 \cdot 10^{10}$ años.**

a) Como la masa se reduce a la cuarta parte, deben transcurrir dos periodos de semidesintegración, es decir, $9 \cdot 10^9$ años.

2. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?:

***a)* Francia posee más reactores nucleares que España.**

***b)* China tiene previsto construir un elevado número de centrales nucleares.**

***c)* La eliminación de los residuos radiactivos es un problema aún no resuelto.**

Todas las afirmaciones son correctas.

3. Una ventaja de la energía nuclear es:

***a)* no contamina;**

***b)* sus instalaciones son poco costosas;**

***c)* no contribuye al desarrollo del cambio climático.**

c) Los reactores nucleares no emiten gases que influyan en el cambio climático.

Cuestiones y problemas

1. Indica el número de protones y neutrones que componen los siguientes núcleos:

$^{12}_{6}$C, $^{56}_{26}$Fe, $^{107}_{47}$Ag, $^{206}_{82}$Pb

C: 6p y 6n; Fe: 26p y 30n; Ag: 47p y 60n; Pb: 82p y 124 n.

2. ¿Qué te sugiere la enorme diferencia existente entre la densidad nuclear y la densidad de la materia ordinaria?

La diferencia de densidad indica que la materia ordinaria está practicamente «vacía», pues la densidad de las partículas es mundo mayor que la de la materia visible.

3. La masa del núcleo de litio-7 es 7,0182 u. Calcula el volumen aproximado del núcleo y su densidad.

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot (1{,}2 \cdot 10^{-15} \cdot A^{1/3})^3 =$$

$$= \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}728 \cdot 10^{-45} \cdot 7 = 5{,}07 \cdot 10^{-44}\ \text{m}^3$$

Masa: $m = 7{,}0182\ \text{u} \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \text{kg/u} = 1{,}16 \cdot 10^{-26}\ \text{kg}$

Densidad: $d = \dfrac{m}{V} = \dfrac{1{,}16 \cdot 10^{-26}\ \text{kg}}{5{,}07 \cdot 10^{-44}\ \text{m}^3} = 2{,}3 \cdot 10^{17}\ \text{kg/m}^3$

4. Calcula el defecto de masa, la energía de enlace y la energía de enlace por nucleón para el núcleo de helio-3.

PAU

Datos: masa del protón = 1,00729 u; masa del neutrón = = 1,00867 u; masa del helio-3 = 3,01603 u.

El núcleo está formado por 2 protones y 1 neutrón:

Masa de 2 protones:	2 · 1,00729 u =	2,01458 u
Masa de 1 neutrón:	1,00867 u =	1,00867 u
Masa total:		3,02325 u
Masa del núcleo:		3,01603 u
Defecto de masa:		0,00722 u

Energía de enlace:

$E = 0{,}00722\ \text{u} \cdot 931\ \text{MeV/u} = 6{,}72\ \text{MeV}$

Energía de enlace por nucleón:

$$\frac{E}{A} = \frac{6{,}72\ \text{MeV}}{3} = 2{,}24\ \text{MeV/nucleón}$$

5. Determina la energía de enlace por nucleón del $^{56}_{26}$F y del $^{39}_{19}$K si las masas de sus núcleos son 55,934939 u y 38,964001 u, respectivamente. Indica cuál de ellos es más estable.

PAU

Datos: m_p = 1,007276 u; m_n = 1,008665 u.

Para el $^{56}_{26}$Fe:

Masa de 26 protones:	26 · 1,007276 u =	26,189176 u
Masa de 30 neutrones:	30 · 1,008665 u =	30,259950 u
Masa total:		56,449126 u
Masa real del núcleo:		55,934939 u
Defecto de masa:		0,514187 u
Energía de enlace por nucleón:		8,5 MeV/nucleón

Para el $^{39}_{19}$K:

Masa de 19 protones:	19 · 1,007276 u =	19,138244 u
Masa de 20 neutrones:	20 · 1,008665 u =	20,173300 u
Masa total:		39,311544 u
Masa real del núcleo:		38,964001 u
Defecto de masa:		0,347543 u
Energía de enlace por nucleón:		8,3 MeV/nucleón

Como la energía de enlace por nucleón es mayor en el hierro que en el potasio, el núcleo de hierro es más estable.

6. Razona por qué el tritio ($^{3}_{1}$H) es más estable que el $^{3}_{2}$He.

Datos: masa del helio-3 = 3,016029 u; masa del tritio = = 3,016049 u; masa del protón = 1,6726 · 10^{-27} kg; masa del neutrón = 1,6749 · 10^{-27} kg.

Será más estable el que tenga mayor energía de enlace por nucleón.

Las masas del protón y del neutrón en unidades de masa atómica son:

$$m_p = \frac{1{,}6726 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}{1{,}6605 \cdot 10^{-27}\ \text{kg/u}} = 1{,}0073\ \text{u}$$

$$m_n = \frac{1{,}6749 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}{1{,}6605 \cdot 10^{-27}\ \text{kg/u}} = 1{,}0087\ \text{u}$$

$\Delta m\ (^{3}_{1}\text{H}) = 1{,}0073\ \text{u} + 2 \cdot 1{,}0087\ \text{u} - 3{,}0160\ \text{u} =$

$= 0{,}0087\ \text{u} = 8{,}10\ \text{MeV}$

Energía de enlace por nucleón:

$$\frac{E}{A} = \frac{8{,}10\ \text{MeV}}{3} = 2{,}70\ \text{MeV/nucleón}$$

$\Delta m\ (^{3}_{1}\text{He}) = 2 \cdot 1{,}0073 + 1{,}0087\ \text{u} - 3{,}0160 =$

$= 0{,}0073\ \text{u} = 6{,}80\ \text{MeV}$

Energía de enlace por nucleón:

$$\frac{E}{A} = \frac{6{,}80\ \text{MeV}}{3} = 2{,}27\ \text{MeV/nucleón}$$

El tritio es más estable al tener mayor energía de enlace por nucleón.

7. Las tres radiaciones α, β y γ, ¿pueden ser emitidas por un mismo núcleo?

No. Un determinado núcleo se desintegra emitiendo partículas alfa o beta. La emisión gamma acompaña generalmente a las otras emisiones.

8. ¿Qué cambios experimenta un núcleo atómico cuando emite una partícula alfa? ¿Y si emite radiación gamma?

Si emite una partícula alfa, su número atómico disminuye en dos unidades y su número másico en cuatro.

Si emite radiación gamma, el núcleo pasa de un estado excitado a un estado de menor energía, pero su número atómico y su número másico no varían.

9. El $^{222}_{86}$Rn se desintegra emitiendo una partícula alfa. ¿Qué número atómico y qué número másico tiene el núcleo resultante?

$^{222}_{86}\text{Rn} \rightarrow {}^{218}_{84}\text{Po} + {}^{4}_{2}\text{He}$

10. Determina el número atómico y el número másico del núcleo que resultará del uranio-238 después de emitir tres partículas alfa y cuatro beta.

Número atómico: $92 - (3 \cdot 2) + (4 \cdot 1) = 90$

Número másico: $238 - (3 \cdot 4) = 226$

11. Indica en curios las siguientes actividades radiactivas expresadas en desintegraciones por segundo: 200, $2 \cdot 10^6$, $5 \cdot 10^{12}$.

$$200\ \text{Bq} = \frac{200\ \text{Bq}}{3{,}7 \cdot 10^{10}\ \text{Bq/Ci}} = 5{,}4 \cdot 10^{-9}\ \text{Ci}$$

$$2 \cdot 10^6\ \text{Bq} = \frac{2 \cdot 10^6\ \text{Bq}}{3{,}7 \cdot 10^{10}\ \text{Bq/Ci}} = 5{,}4 \cdot 10^{-5}\ \text{Ci}$$

$$5 \cdot 10^{12}\ \text{Bq} = \frac{5 \cdot 10^{12}\ \text{Bq}}{3{,}7 \cdot 10^{10}\ \text{Bq/Ci}} = 1{,}4 \cdot 10^{2}\ \text{Ci}$$

12. ¿Cómo se puede explicar que un núcleo emita partículas beta si en él solo existen neutrones y protones?

Cuando la relación neutrones/protones en un núcleo es demasiado grande, el núcleo es inestable y se estabiliza convirtiendo un neutrón en un protón, según la reacción:

$^{1}_{0}\text{n} \rightarrow {}^{1}_{1}\text{p} + {}^{0}_{-1}\text{e} + \overline{\nu}_e$

PAU

13. Una sustancia radiactiva se desintegra según la ecuación $N = N_0 e^{-040\,t}$ en unidades del SI. Calcula su periodo de semidesintegración.

De acuerdo con la ecuación fundamental de la radiactividad, se cumple:

$$N = N_0\, e^{-0{,}4\,t}; \qquad \frac{N_0}{2} = N_0\, e^{-0{,}4\,T_{1/2}}$$

Aplicando logaritmos neperianos se obtiene

$-\text{L}\ 2 = -0{,}4\ T_{1/2}; \quad T_{1/2} = 1{,}7\ \text{s}$

14. La semivida del polonio-210 es 138 días. Si disponemos inicialmente de 1 mg de polonio, ¿al cabo de cuánto tiempo quedarán 0,25 mg?

Habrán transcurrido dos semividas, es decir, dos periodos de semidesintegración:

$t = 2 \cdot 138$ días $= 276$ días

PAU

15. ¿Qué es una familia radiactiva? ¿Qué condición debe cumplir el último miembro de la familia?

El conjunto de núcleos radiactivos que proceden de un núcleo inicial (núcleo padre). El último miembro de la familia es un núcleo estable, no radiactivo.

16. El $^{212}_{83}$Bi tiene un periodo de semidesintegración de 60,5 minutos. ¿Cuántos átomos se desintegran por segundo en 50 g de bismuto-212?

Número de átomos de Bi:

$$\frac{50\ \text{g}}{212\ \text{g mol}^{-1}} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}\ \frac{\text{átomos}}{\text{mol}} = 1{,}42 \cdot 10^{23}\ \text{átomos}$$

Actividad:

$$A = \lambda N = \frac{0{,}693\ N}{T_{1/2}} = \frac{0{,}693 \cdot 1{,}42 \cdot 10^{23}\ \text{átomos}}{3\,630\ \text{s}} =$$

$$= 2{,}7 \cdot 10^{19}\ \text{átomos/s}$$

PAU

17. El radón-222 se desintegra con un periodo de 3,9 días. Si inicialmente se dispone de 20 μg, ¿cuánto quedará al cabo de 7,6 días?

$$\lambda = \frac{\text{L}\,2}{T_{1/2}} = \frac{0{,}693}{3{,}9\ \text{días}} = 0{,}178\ \text{días}^{-1}$$

$m = m_0\, e^{-\lambda t}$

$m = 20 \cdot 10^{-6}\ \text{g} \cdot e^{-0{,}178 \cdot 7{,}6} = 5{,}2 \cdot 10^{-6}\ \text{g} = 5{,}2\ \mu\text{g}$

18. Tenemos $6{,}02 \cdot 10^{23}$ átomos del isótopo radiactivo cromo-51, con un periodo de semidesintegración de 27 días. ¿Cuántos átomos quedarán al cabo de seis meses?

Llamando T al periodo de semidesintegración, la constante de desintegración es:

$$\lambda = \frac{0{,}693}{T} = \frac{0{,}693}{27\ \text{días}} = 2{,}57 \cdot 10^{-2}\ \text{días}^{-1}$$

El número de átomos que quedan sin desintegrar después de seis meses (180 días) es:

$$N = N_0\, e^{-\lambda t} = 6{,}02 \cdot 10^{23}\ \text{átomos} \cdot e^{-0{,}0257 \cdot 180} =$$

$$= 5{,}9 \cdot 10^{21}\ \text{átomos}$$

PAU

19. La constante de desintegración de una sustancia radiactiva es $2 \cdot 10^{-6}\ \text{s}^{-1}$. Si tenemos 200 g de ella, ¿cuánto tiempo debe transcurrir para que se reduzca a 50 g? ¿Cuál es su periodo de semidesintegración y su semivida?

Al aplicar la ecuación fundamental de la radiactividad se obtiene:

$$m = m_0\, e^{-\lambda t}; \qquad 50\ \text{g} = 200\ \text{g} \cdot e^{-2 \cdot 10^{-6} t}$$

$$\text{L}\left(\frac{50}{200}\right) = 2 \cdot 10^{-6}\, t; \qquad t = 6{,}9 \cdot 10^5\ \text{s}$$

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-6}\ \text{s}^{-1}} = 5 \cdot 10^5\ \text{s}$$

$$T_{1/2} = \tau \cdot \text{L}\,2 = 5 \cdot 10^5\ \text{s} \cdot 0{,}693 = 3{,}5 \cdot 10^5\ \text{s}$$

20. El periodo de semidesintegración de un elemento radiactivo es de 28 años. ¿Cuánto tiempo tiene que transcurrir para que su cantidad se reduzca al 75 % de la muestra inicial?

El valor de la constante de desintegración es el siguiente:

$$\lambda = \frac{\text{L}\,2}{T_{1/2}} = \frac{0{,}693}{28\ \text{años}} = 2{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{años}^{-1}$$

El tiempo se calcula a partir de la ecuación fundamental de la radiactividad:

$$N = N_0\, e^{-\lambda t}; \qquad 0{,}75\, N_0 = N_0\, e^{-2{,}5 \cdot 10^{-2}\, t};$$

$$\text{L}\,0{,}75 = -2{,}5 \cdot 10^{-2}\ t; \qquad t = 11{,}5\ \text{años}$$

21. La semivida del radio-226 es de 1 600 años. Calcula la actividad radiactiva de una muestra de 2 g de radio-226.
PAU

La constante de desintegración es:

$$\lambda = \frac{L\,2}{T_{1/2}} = \frac{L\,2}{1\,600 \text{ años}} = 1{,}4 \cdot 10^{-11} \text{ s}$$

N.º de núcleos de radio:

$$N = \frac{m}{M} N_A = \frac{2 \text{ g} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}}{226 \text{ g mol}^{-1}} = 5{,}3 \cdot 10^{21} \text{ núcleos}$$

Actividad:

$$A = \lambda N = 1{,}4 \cdot 10^{-11} \text{ s}^{-1} \cdot 5{,}3 \cdot 10^{21} \text{ núcleos} = 7{,}4 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$$

$$A = \frac{7{,}4 \cdot 10^{10} \text{ Bq}}{3{,}7 \cdot 10^{10} \text{ Bq/Ci}} = 2 \text{ Ci}$$

22. Debido a la desintegración beta del rubidio-87, los minerales de rubidio contienen estroncio. Se analizó un mineral y se comprobó que contenía el 0,85 % de rubidio y el 0,0089 % de estroncio. Suponiendo que todo el estroncio procede de la desintegración del rubidio y que el periodo de semidesintegración de este es 5,7 · 10^{10} años, calcula la edad del mineral. (Solo el 27,8 % del rubidio natural es rubidio-87.)

$${}^{87}_{37}\text{Rb} \rightarrow {}^{87}_{38}\text{Sr} + {}^{0}_{-1}\text{e} + \overline{\nu}$$

Si consideramos 100 g de mineral, existirán 0,85 g de rubidio, de los que solo el 27,8 % es rubidio-87.

Masa de rubidio: 87, 0,85 · 0,278 g = 0,2363 g.

Como se han formado 0,0089 g de estroncio-87, se han desintegrado 0,0089 g de rubidio-87, luego inicialmente la muestra contenía 0,2363 g + 0,0089 g = 0,2454 g de rubidio-87.

$$m = m_0 \cdot e^{-\lambda t}; \qquad L\left(\frac{m}{m_0}\right) = -\frac{0{,}693\,t}{T_{1/2}}$$

$$L\,\frac{0{,}2363}{0{,}2454} = -\frac{0{,}693\,t}{5{,}7 \cdot 10^{10} \text{ años}}; \qquad t \approx 3 \cdot 10^{9} \text{ años}$$

23. Al bombardear berilio-9 con partículas alfa se obtiene carbono-12 y otra partícula. Escribe la reacción nuclear correspondiente.

$${}^{9}_{4}\text{Be} + {}^{4}_{2}\text{He} \rightarrow {}^{12}_{6}\text{Ce} + {}^{1}_{0}\text{n}$$

24. Escribe y completa las siguientes reacciones nucleares:

a) $\mathbf{{}^{58}_{28}Ni + {}^{1}_{1}H \rightarrow \ldots + {}^{1}_{0}n}$

b) $\mathbf{{}^{58}_{27}Co + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{60}_{27}Co + \ldots}$

c) $\mathbf{{}^{39}_{19}K + \alpha \rightarrow \ldots + p}$

d) $\mathbf{{}^{10}_{5}B + \ldots \rightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{8}_{4}Be}$

a) ${}^{58}_{28}\text{Ni} + {}^{1}_{1}\text{H} \rightarrow {}^{58}_{29}\text{Cu} + {}^{1}_{0}\text{n}$ *b)* ${}^{59}_{27}\text{Co} + {}^{1}_{0}\text{n} \rightarrow {}^{60}_{27}\text{Co} + \gamma$

c) ${}^{39}_{19}\text{K} + {}^{4}_{2}\text{He} \rightarrow {}^{42}_{20}\text{Ca} + {}^{1}_{1}\text{H}$ *d)* ${}^{10}_{5}\text{B} + {}^{2}_{1}\text{H} \rightarrow {}^{4}_{2}\text{He} + {}^{8}_{4}\text{Be}$

25. Calcula la energía que se libera en la reacción nuclear:

$\mathbf{{}^{7}_{3}Li + {}^{1}_{1}H \rightarrow 2\ {}^{4}_{2}He}$

Datos: masa del litio-7 = 7,0182 u; m_p = 1,0073 u; masa del helio-4 = 4,0038 u.

Masa de los productos iniciales: 7,0182 u + 1,0073 u = 8,0255 u

Masa de los productos finales: 2 · 4,0038 u = 8,0076 u

Defecto de masa: 8,0255 u – 8,0076 u = 0,0179 u

Energía liberada: 0,0179 u · 931 MeV/u = 16,7 MeV

26. Durante el proceso de fisión de un núcleo de $\mathbf{{}^{235}_{92}U}$ por un neutrón se liberan 198 MeV. Calcula la energía liberada al fisionarse 1 kg de uranio.

N.º de núcleos de uranio:

$$N = \frac{m}{M} N_A = \frac{10^{3} \text{ g} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}}{235 \text{ g mol}^{-1}} = 2{,}56 \cdot 10^{24} \text{ núcleos}$$

Energía:

$$E = 2{,}56 \cdot 10^{24} \text{ núcleos} \cdot 198 \text{ MeV/núcleo} = 5{,}07 \cdot 10^{26} \text{ MeV}$$

$$E = 5{,}07 \cdot 10^{26} \text{ MeV} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-13} \text{ J/MeV} =$$
$$= 8{,}1 \cdot 10^{13} \text{ J} = 8{,}1 \cdot 10^{10} \text{ kJ}$$

27. La energía desprendida en la fisión de un núcleo de uranio-235 es aproximadamente de 200 MeV. ¿Cuántos kilogramos de carbón habría que quemar para obtener la misma cantidad de energía que la desprendida por fisión de 1 kg de uranio-235? El calor de combustión del carbón es de unas 7 000 kcal/kg.

Número de núcleos existentes en 1 000 g de uranio-235:

$$\frac{1\,000 \text{ g} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} \text{ núcleos/mol}}{235 \text{ g mol}^{-1}} = 2{,}56 \cdot 10^{24} \text{ núcleos}$$

Energía desprendida en la fisión:

$$E = 2{,}56 \cdot 10^{24} \text{ núcleos} \cdot 200 \text{ MeV/núcleo} = 5{,}12 \cdot 10^{26} \text{ MeV} =$$
$$= 5{,}12 \cdot 10^{32} \text{ eV} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV} = 8{,}19 \cdot 10^{13} \text{ J}$$

Energía desprendida en la combustión del carbón:

$$7\,000 \text{ kcal/kg} \cdot 4{,}18 \text{ kJ/kcal} = 2{,}92 \cdot 10^{4} \text{ kJ/kg}$$

$$\frac{1 \text{ kg}}{2{,}92 \cdot 10^{7} \text{ J}} = \frac{x}{8{,}19 \cdot 10^{13} \text{ J}}; \qquad x = 2{,}8 \cdot 10^{6} \text{ kg}$$

28. Cuando un núcleo de $\mathbf{{}^{226}_{88}Ra}$ emite una partícula alfa se convierte en un núcleo de radón (Rn).

a) **Escribe la ecuación del proceso nuclear correspondiente.**

b) **Suponiendo que toda la energía generada en el proceso se transfiere a la partícula alfa, calcula su energía cinética y su velocidad.**

Datos: m_{Ra} = 226,025406 u; m_{Rn} = 222,017574 u; m_a = 4,002603 u.

a) ${}^{226}_{88}\text{Ra} \rightarrow {}^{222}_{86}\text{Rn} + {}^{4}_{2}\text{He}$

b) $\Delta m = m_{Ra} - (m_{Rn} + m_{\alpha}) = 226{,}025406 \text{ u} -$
$- (222{,}017574 \text{ u} + 4{,}002603 \text{ u}) = 0{,}005229 \text{ u}$

$$E_c = \Delta m c^2 =$$
$$= 0{,}005229 \text{ u} \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \text{ kg/u} \cdot (3 \cdot 108 \text{ m s}^{-1})^2 =$$
$$= 7{,}8 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 7{,}8 \cdot 10^{-13} \text{ J}}{4{,}002603 \text{ u} \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \text{ kg/u}}} =$$
$$= 1{,}5 \cdot 10^{7} \text{ m s}^{-1}$$

29. En un reactor nuclear se detecta una pérdida de masa de 54,0 g. Calcula cuántos kW h de energía se habrán producido.

La energía producida según la ecuación de Einstein es la siguiente:

$E = \Delta m c^2 = 5{,}4 \cdot 10^{-2}$ kg $(3 \cdot 10^8$ m s$^{-1})^2 = 4{,}9 \cdot 10^{15}$ J

$$E = \frac{4{,}9 \cdot 10^{15}\ \text{J}}{3{,}6 \cdot 10^6\ \text{J/kW h}} = 1{,}35 \cdot 10^9\ \text{kW h}$$

30. ¿Qué misión cumple el moderador en un reactor nuclear?

Frena los neutrones rápidos procedentes de la fisión nuclear.

31. ¿Qué es un reactor reproductor? ¿Qué ventajas e inconvenientes presenta?

Es un reactor diseñado para producir más plutonio-239 que el uranio-235 que consume. Permiten producir material fisionable, pero esta producción es difícil de controlar y puede utilizarse en la fabricación de armas nucleares.

32. ¿Qué ventajas presenta la obtención de energía por fusión nuclear frente a la obtenida mediante procesos de fisión nuclear?

La materia prima (deuterio y tritio) es abundante y barata. Los reactores de fusión presentarán menos problemas con los residuos radiactivos que los de fisión y serán más seguros.

33. En la fisión de un núcleo de uranio-235 se liberan aproximadamente 200 MeV de energía. ¿Qué cantidad de uranio-235 se consume en un año en un reactor nuclear de 1 000 MW de potencia?

Cada fisión libera:

200 Mev $= 2 \cdot 10^8$ eV $\cdot\ 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J/eV $= 3{,}2 \cdot 10^{-11}$ J

N.º de fisiones por segundo:

10^9 J s$^{-1}/3{,}2 \cdot 10^{-11}$ J/fisión $= 3{,}125 \cdot 10^{19}$ fisiones/s

Masa de uranio consumida por segundo:

$3{,}125 \cdot 10^{19}$ núcleos/s $\cdot$ 235 u/núcleo $\cdot\ 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg/u =

$= 1{,}22 \cdot 10^{-5}$ kg/s

Consumo en un año:

$1{,}22 \cdot 10^{-5}$ kg/s $\cdot$ (365 $\cdot$ 24 $\cdot$ 3 600) s = 385 kg

34. Una central nuclear, de 800 MW de potencia, utiliza como combustible uranio enriquecido hasta el 3 % del isótopo fisionable. ¿Cuántas fisiones por segundo deben producirse? ¿Cuántas toneladas de combustible consumirá en un año? Se supone que en la fisión de un núcleo de uranio 235 se liberan 200 MeV.

Energía liberada en cada fisión:

$2 \cdot 10^8$ eV $\cdot\ 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J/eV $= 3{,}2 \cdot 10^{-11}$ J

N.º de fisiones por segundo:

$$\frac{8 \cdot 10^8\ \text{J s}^{-1}}{3{,}2 \cdot 10^{-11}\ \text{J/fisión}} = 2{,}5 \cdot 10^{19}\ \text{fisiones/s}$$

Como la riqueza del uranio-235 es solo del 3 %, el número de núcleos de uranio necesarios por segundo es:

$$\frac{100}{3} = \frac{x}{2{,}5 \cdot 10^{19}}; \qquad x = 8{,}33 \cdot 10^{20}\ \text{núcleos/s}$$

Como la masa atómica del uranio es aproximadamente 238u, la masa del uranio consumida en 1 s es:

$8{,}33 \cdot 10^{20}$ núcleos/s $\cdot$ 238 u/núcleo $\cdot\ 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg/u =

$= 3{,}29 \cdot 10^{-4}$ kg s^{-1}

El consumo total en un año es:

m $= 3{,}29 \cdot 10^{-4}$ kg s^{-1} $\cdot$ (365 $\cdot$ 24 $\cdot$ 3 600)s = 10 400 kg

35. Comenta la siguiente frase: «Debido a la desintegración del carbono-14, cuando un ser vivo muere se pone en marcha un reloj». PAU

Cuando un ser vivo muere su concentración de carbono-14 va disminuyendo con el tiempo.

Este hecho permite determinar el tiempo transcurrido desde su muerte.

36. Se ha medido la actividad de una muestra de madera prehistórica, observándose que se desintegran 90 átomos/hora, cuando en una muestra actual de la misma naturaleza la tasa de desintegración es de 700 átomos/hora. Calcula la antigüedad de la madera. El periodo de semidesintegración del carbono-14 es de 5 730 años. PAU

De acuerdo con la ecuación fundamental de la radiactividad y el concepto de actividad, se cumple:

$$\frac{A_0}{A} = \frac{N_0 \lambda}{N \lambda} = \frac{N_0}{N_0 e^{-\lambda t}} = e^{\lambda t}$$

$$\lambda t = \text{L}\,\frac{A_0}{A}; \qquad t = \frac{1}{\lambda}\,\text{L}\,\frac{A_0}{A}$$

La constante de desintegración se obtiene a partir del periodo de semidesintegración:

$$\lambda = \frac{L\,2}{T_{1/2}} = \frac{0{,}693}{5\,730\ \text{años}} = 1{,}21 \cdot 10^{-4}\ \text{años}^{-1}$$

El tiempo transcurrido se obtiene a partir de la ecuación anterior:

$$t = \frac{1}{1{,}21 \cdot 10^{-4}\ \text{años}^{-1}}\,\text{L}\left(\frac{700}{90}\right) = 1{,}69 \cdot 10^4\ \text{años}$$

37. Un electrón y un positrón se aniquilan mutuamente y se produce un rayo gamma. ¿Cuál es la frecuencia y la longitud de onda de la radiación obtenida?

Datos: masa del electrón $= 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg;
$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J s.

$e^- + e^+ = \gamma$

La energía del electrón y el positrón ($2 m_e c^2$) será igual a la energía del fotón (hf):

$2 m_e c^2 = hf$

$$f = \frac{2m_e c^2}{h} = \frac{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot (3 \cdot 10^8\ \text{m}\,\text{s}^{-1})^2}{6{,}62 \cdot 10^{-34}\ \text{J}\,\text{s}} = 2{,}5 \cdot 10^{20}\ \text{Hz}$$

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m}\,\text{s}^{-1}}{2{,}5 \cdot 10^{20}\ \text{s}^{-1}} = 1{,}21 \cdot 10^{-12}\ \text{m}$$

38. La carga del electrón se ha considerado durante mucho tiempo como la unidad natural de carga eléctrica. ¿Te parece lógico mantener este criterio?

Se pensaba que la carga del electrón era la más pequeña que podía existir. Tras el descubrimiento de los quarks, no parece lógico mantener este criterio.

39. Explica el carácter neutro del neutrón en función de los quarks que lo constituyen.

Neutrón (u, d, d): $\left(+\frac{2}{3}\,e\right) + 2\left(-\frac{1}{3}\,e\right) = 0$

40. *a)* ¿Qué función realizan las partículas portadoras de fuerzas? ¿Cuáles son estas partículas?

***b)* ¿Sobre qué partículas materiales actúan los gluones?**

***c)* Según la Teoría de las Supercuerdas, ¿qué relación existe entre el modelo de vibración de la cuerda y la fuerza gravitatoria?**

***d)* ¿Qué dice el Principio antrópico?**

a) Las partículas portadoras de fuerza transmiten las interacciones entre las partículas de materia. Son: fotones, partículas *W* y *Z*, gluones y gravitones.

b) Los gluones transmiten la interacción nuclear fuerte que mantiene unidos a los protones y neutrones en el interior del núcleo atómico.

c) Cuanto mayor sea la amplitud y la frecuencia de vibración de la cuerda, mayor es la energía y, por tanto, mayor será la masa, de acuerdo con la relación relativista entre masa y energía, y es la masa la que determina las propiedades gravitatorias.

d) El Universo debe resultar adecuado para que exista vida inteligente.

Actividades PAU propuestas en los bloques

Bloque I. Vibraciones y ondas

1. Un muelle cuya constante de elasticidad es *k* está unido a una masa puntual de valor *m*. Separando la masa de la posición de equilibrio, el sistema comienza a oscilar. Determina:

a) El valor del periodo de las oscilaciones *T* y su frecuencia angular ω.

b) Las expresiones de las energías cinética, potencial y total en función de la amplitud y de la elongación del movimiento del sistema oscilante.

Consultar Apartado 1. 4 y 1.5 A del libro del alumno

2. Una partícula efectúa un movimiento armónico simple cuyo periodo es igual a 1 s. Sabiendo que en el instante $t = 0$ su elongación es 0,70 cm y su velocidad 4,39 cm s^{-1}, calcula:

a) La amplitud y la fase inicial.

b) La máxima aceleración de la partícula.

a) Planteamos las ecuaciones del sistema según los datos de m.a.s del enunciado:

Como $T = 1$ s, $\omega = 2\pi/1 = 2\pi$ rad/s.

Las ecuaciones del m.a.s. son:

$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$

$v \frac{dx}{dt} = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$

En el instante $t = 0$ s, sucede que:

$0{,}7 = A \cos \varphi_0$

$4{,}39 = -2\pi A \operatorname{sen} \varphi_0$

Resolviendo el sistema obtenemos:

$A = 0{,}98$ cm; $\varphi_0 = 44{,}9°$

b) La aceleración máxima viene dada por la expresión:

$a_{máx} = A\omega^2 = 0{,}98 \cdot (2\pi)^2 = 39{,}04$ cm/s^2

3. El periodo de una onda transversal que se propaga en una cuerda tensa es de $2 \cdot 10^{-3}$ s. Sabiendo, además, que dos puntos consecutivos, cuya diferencia de fase vale 2 rad, están separados una distancia de 10 cm, calcula:

a) La longitud de onda.

b) La velocidad de propagación.

Si consideramos los dos estados de vibración en un instante dado resulta que:

$y(x_1, t) = A \cos(2\pi ft - kx_1) \qquad y(x_2, t) = A\cos(2\pi ft - kx_2)$

a) Conocemos la diferencia de fase y la distancia entre los dos estados de vibración, de modo que:

$\delta = (2\pi ft - kx_1) - (2\pi ft - kx_2) = k(x_2 - x_1)$

de donde:

$$k = \frac{\delta}{(x_2 - x_1)} = \frac{2 \text{ rad}}{10 \text{ cm}} = 0{,}2 \text{ cm}^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = 10\pi \text{ cm}$$

b) La velocidad de propagación de la onda es

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{10\pi \text{ cm}}{2 \cdot 10^{-3} \text{ s}} = 5\pi \,.\, 10^4 \text{ cm/s}$$

4. Considera la siguiente ecuación de una onda:

$y(x, t) = A \operatorname{sen}(bt - cx)$

a) ¿Qué representan los coeficientes *A*, *b*, *c*? ¿Cuáles son sus unidades?

b) ¿Qué interpretación tendría que la función fuera «coseno» en lugar de «seno»? ¿Y que el signo dentro del paréntesis fuera + en lugar de −?

a) *A* es la amplitud, en m, *c* es el número de onda, *k* en rad m^{-1}, y *b* es la frecuencia angular del m.a.s., ω, en rad/s.

b) Si la función fuese un coseno el tipo de movimiento sería el mismo, un m.a.s., aunque la fase inicial sería distinta.

Si el signo cambia, el desplazamiento de la onda sería en sentido contrario.

5. Una onda en una cuerda de 0,01 kg m^{-1} de densidad lineal viene dada por la ecuación:

$y(x, t) = 0{,}2 \operatorname{sen}(\pi x + 100\pi t)$ m

Calcula:

a) La frecuencia de la onda.

b) La velocidad de propagación de las ondas en la cuerda.

c) La potencia que transporta la onda.

a) La frecuencia de la onda es, según la ecuación $\omega = 100\pi$.

b) La velocidad de propagación es:

$$v = \frac{dy}{dt} = 20\pi \cos(\pi x + 100\pi t)$$

c) La potencia que transporta la onda viene dada por la energía de la onda en la unidad $P = \frac{E}{t}$. Como la energía de la onda es $E = \frac{1}{2} kA^2 = 2m\pi^2 f^2 A^2$, y la densidad lineal de masa es $d_L = \frac{m}{\lambda}$ podemos expresar la potencia que transporta la onda en un periodo como:

$$P = \frac{E}{T} = \frac{2m\pi^2 f^2 A^2}{T} = \frac{2d_L \pi^2 f^2 A^2}{T} \lambda = 2d_L \pi^2 f^2 A^2 v$$

Sustituyendo:

$P = 2 \cdot 0{,}01$ kg/m $\cdot \pi^2 \cdot (50 \text{ Hz})^2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 20\pi$ m/s $= 1\,240$ W

6. Una onda armónica que se propaga por un medio unidimensional tiene una frecuencia de 500 Hz y una velocidad de propagación de 350 m s^{-1}.

a) **¿Qué distancia mínima hay, en un cierto instante, entre dos puntos del medio que oscilan con una diferencia de fase de 60°?**

b) **¿Cuál es la diferencia de fase de oscilación, en un cierto punto, para un intervalo de tiempo de 10^3 s?**

a) La velocidad de propagación y la frecuencia nos informan acerca de la ecuación de onda,

$f = 500$ Hz; $v = 350$ m/s

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{350 \text{ m/s}}{350 \text{ s}^{-1}} = 0{,}7 \text{ m}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{,}7} = \frac{20\pi}{7} \text{ m}^{-1}$$

Así que la ecuación de onda queda así:

$$y\ (x,\ t) = A\cos\left(1\,000\,\pi t - \frac{20\pi}{7}x\right)$$

Considerando los dos estados de vibración en un instante dado:

$$y\ (x_1,\ t) = A\cos\left(1\,000\,\pi t - \frac{20\pi}{7}x_1\right)$$

$$y\ (x_2,\ t) = A\cos\left(1\,000\,\pi t - \frac{20\pi}{7}x_2\right)$$

$$\delta = \left(1\,000\,\pi t - \frac{20\pi}{7}x_1\right) - \left(1\,000\,\pi t - \frac{20\pi}{7}x_2\right) =$$

$$= \frac{20\pi}{7}(x_2 - x_1) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow (x_2 - x_1) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{7}{20\pi} = 0{,}12 \text{ m}$$

b) Al igual que en el apartado anterior, consideramos un estado de oscilación en dos instantes de tiempo distintos:

$$y\ (x,\ t_1) = A\cos\left(1\,000\,\pi t_1 - \frac{20\pi}{7}x\right)$$

$$y\ (x,\ t_2) = A\cos\left(1\,000\,\pi t_2 - \frac{20\pi}{7}x\right)$$

La diferencia de fase es:

$$\delta = \left(1\,000\,\pi t_1 - \frac{20\pi}{7}x\right) - \left(1\,000\,\pi t_2 - \frac{20\pi}{7}x\right) =$$

$$1\,000\,\pi\,(t_1 - t_2) = 1\,000\,\pi \cdot 10^3 \Rightarrow \delta = 10^6 \cdot \pi$$

7. Cierta onda está descrita por la ecuación:

$$\psi\ (x,\ t) = 0{,}02 \text{ sen}\left(t - \frac{x}{4}\right)$$

todo expresado en unidades del SI. Determina:

a) **La frecuencia de la onda y su velocidad de propagación.**

b) **La distancia existente entre dos puntos consecutivos que vibran con una diferencia de fase de 120°.**

a) La frecuencia y la velocidad de propagación de la onda se hallan según estas expresiones:

$$\psi\ (x,\ t) = A \text{ sen } (2\pi f t - kx)$$

$$\psi\ (x,\ t) = 0{,}02 \text{ sen}\left(t - \frac{1}{4}x\right)$$

$$2\pi f = 1 \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi} \text{ Hz};$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi \text{ m}$$

$$v = \lambda f = 8\pi \text{ m} \cdot \frac{1}{2\pi} \text{ Hz} = 4 \text{ m/s}$$

b) Considerando los dos estados de vibración en un instante dado:

$$\psi\ (x_1,\ t) = 0{,}02 \text{ sen}\left(t - \frac{1}{4}x_1\right)$$

$$\psi\ (x_2,\ t) = 0{,}02 \text{ sen}\left(t - \frac{1}{4}x_2\right)$$

$$\delta = \left(t - \frac{1}{4}x_1\right) - \left(t - \frac{1}{4}x_2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow (x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{3} \cdot 4 = 8{,}4 \text{ m}$$

8. Un barco emite simultáneamente un sonido dentro del agua y otro en el aire. Si otro barco detecta los dos sonidos con una diferencia de dos segundos, ¿a qué distancia están los dos barcos?

Datos: velocidad del sonido en el aire, 340 m/s; en el agua 1 500 m/s.

Las ondas sonoras emitidas por el barco recorren el mismo espacio (el que hay entre los dos barcos) en tiempos diferentes.

Como el barco que recibe la señal lo hace con una diferencia de 2 s, resulta que $t_2 - t_1 = 2$ s, así que resolviendo el sistema de ecuaciones:

$s = v_{aire} t_1$; $s = v_{agua} t_1$; $t_2 - t_1 = 2$

Resulta que: $s = 879$ m

Bloque II. Interacción gravitatoria

1. La nave espacial lunar *Prospector* permanece en órbita circular alrededor de la Luna a una altura de 100 km sobre su superficie. Determina:

a) **La velocidad lineal de la nave y el periodo del movimiento.**

b) **La velocidad de escape a la atracción lunar desde esa órbita.**

Datos: constante de Gravitación, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^{2}kg^2; masa de la Luna $M_L = 7{,}36 \cdot 10^{22}$ kg; radio medio lunar, $R_L = 1\,740$ km.

a) Obtenemos la velocidad de la nave mediante la expresión:

$$v = \sqrt{\frac{GM_L}{R_L + h}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{kg}^{-2} \cdot 7{,}36 \cdot 10^{22} \text{ kg}}{(1\,740 + 100) \cdot 10^3 \text{ m}}} =$$

$$= 1\,633{,}4 \text{ m/s}$$

b) Obtenemos la velocidad de escape a la atracción de la Luna desde la altura de 100 km mediante la expresión:

$$v = \sqrt{\frac{2GM_L}{R_L + h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}} \cdot 7{,}36 \cdot 10^{22}\ \mathrm{kg}}{(1740 + 100) \cdot 10^3\ \mathrm{m}}} =$$

$$= 2\,310\ \mathrm{m/s}$$

2. Una sonda espacial se encuentra estacionada en una órbita circular terrestre a una altura sobre la superficie terrestre de $2{,}26\,R_T$, donde R_T es el radio de la Tierra.

a) Calcula la velocidad de la sonda en la órbita de estacionamiento.

b) Comprueba que la velocidad que la sonda necesita, a esa altura, para escapar de la atracción de la Tierra es, aproximadamente, 6,2 km s^{-1}.

Datos: gravedad en la superficie de la Tierra, g = 9,81 m s^{-2}; radio medio terrestre, R_T = 6 370 km.

a) Obtenemos la velocidad de la sonda en la órbita mediante la expresión:

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}} = \sqrt{\frac{GM_T}{(2{,}26 + 1)\,R_T}} = \sqrt{g}\sqrt{\frac{R_T}{3{,}26}} =$$

$$= \sqrt{\frac{9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot 6\,370 \cdot 10^3\ \mathrm{m}}{3{,}26}} = 4\,378\ \mathrm{m/s}$$

b) La velocidad de escape a esa altura es:

$$v = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T + 2{,}26\,R_T}} = \sqrt{2g}\sqrt{\frac{R_T}{3{,}26}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot 6\,370 \cdot 10^3\ \mathrm{m}}{3{,}26}} = 6\,192\ \mathrm{m/s}$$

3. Responde:

a) Compara las fuerzas de atracción gravitatoria que ejercen la Luna y la Tierra sobre un cuerpo de masa m que se halla situado en la superficie de la Tierra. ¿A qué conclusión llegas?

b) Si el peso de un cuerpo en la superficie de la Tierra es de 100 kp, ¿cuál sería el peso de ese mismo cuerpo en la superficie de la Luna?

Datos: la masa de la Tierra es 81 veces la masa de la Luna; la distancia entre los centros de la Tierra y la Luna es de 60 radios terrestres; el radio de la Luna es 0,27 veces el radio de la Tierra.

a) Las fuerzas de atracción de la Tierra y la Luna sobre un cuerpo en la superficie terrestre son, respectivamente:

$$F_T = G\,\frac{M_T m}{R_T^2}; \qquad F_L = G\,\frac{M_L m}{d^2}$$

Como la masa terrestre es 81 veces la de la Luna y la distancia entre centros es de $60\,R_T$, resulta que la fuerza de la Luna sobre la masa m en la superficie es:

$$F_L = G\,\frac{M_T m}{81 \cdot 59^2\,R_T^2} = \frac{F_T}{81 \cdot 59^2} = 3{,}5 \cdot 10^{-6}\,F_T$$

Es decir, la fuerza de atracción de la Luna sobre el cuerpo es del orden de la millonésima parte de la fuerza terrestre. Aún así, no la debemos considerar despreciable, pues su efecto es visible por ejemplo, en las mareas.

b) La intensidad del campo gravitatorio en la Tierra es $g_T = G\,\dfrac{M_T}{R_T^2}$ y en la Luna $g_L = G\,\dfrac{M_L}{R_L^2} = G\,\dfrac{M_T}{81 \cdot 0{,}27^2\,R_T^2} = 0{,}17\,g_T$.

Si el peso en la Tierra es de 100 kp, significa que:

$P_T = m\,g_T = 100$ kp

así que en la Luna:

$P_L = m\,g_L = 0{,}17\,m\,g_T = 0{,}17 \cdot 100$ kp $= 17$ kp

4. Un astronauta con 100 kg de masa (incluyendo el traje) está en la superficie de un asteroide de forma prácticamente esférica, con 2,4 km de diámetro y densidad media 2,2 g cm^{-3}. Determina con qué velocidad debe impulsarse el astronauta para abandonar el asteroide. ¿Cómo se denomina rigurosamente tal velocidad? El astronauta carga ahora con una mochila de masa 40 kg; ¿le será más fácil salir del planeta? ¿Por qué?

Datos: G = 6,67 · 10^{-11} Nm^2 kg^{-2}.

La velocidad de escape del astronauta desde la superficie del asteroide es $v = \sqrt{\dfrac{2GM_a}{R_a}}$. Como disponemos de la densidad del asteroide y de la forma geométrica del mismo, podemos afirmar que $M_a = d_a V_a = d_a \cdot \dfrac{4}{3}\pi R_a^3$.

La velocidad es entonces:

$$v = \sqrt{\frac{2GM_a}{R_a}} = \sqrt{\frac{2Gd_a \cdot \frac{4}{3}\pi R_a^3}{R_a}} = \sqrt{\frac{8}{3}\,Gd_a\pi R_a^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{8}{3} \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}} \cdot 2{,}2 \cdot 10^3\ \mathrm{kg/m^3} \cdot \pi \cdot (2\,400\ \mathrm{m})^2} =$$

$$= 2{,}66\ \mathrm{m/s}$$

Si el astronauta carga la mochila, la velocidad de escape seguirá siendo la misma, pues no depende de la masa del objeto que escapa.

5. Las distancias de la Tierra y de Marte al Sol son, respectivamente, 149,6 · 10^6 km y 228,0 · 10^6 km. Suponiendo que las órbitas son circulares y que el periodo de revolución de la Tierra en torno al Sol es de 365 días,

a) ¿Cuál será el periodo de revolución de Marte?

b) Si la masa de la Tierra es 9,6 veces la de Marte y sus radios respectivos son 6 370 km y 3 390 km, ¿cuál será el peso en Marte de una persona de 70 kg?

Datos: gravedad en la superficie terrestre, g = 9,8 m s^{-2}.

a) Aplicamos la Tercera Ley de Kepler a estos dos planetas:

$$\frac{T_T^2}{r_T^3} = \frac{T_M^2}{r_M^3}$$

donde T son los periodos de rotación de Marte y Tierra y r es la distancia al centro de giro, en este caso el Sol. El periodo de revolución de Marte es, entonces:

$$T_M = \sqrt{\frac{T_T^2 r_M^3}{r_T^3}} = \sqrt{\frac{365^2 \cdot (228 \cdot 10^6)^3}{(149 \cdot 10^6)^3}} = 691 \text{ días}$$

b) La intensidad del campo gravitatorio en la superfice marciana es, respecto al de la Tierra:

$$g_M = G\,\frac{M_M}{R_M^2} = G\,\frac{9{,}6\,M_T}{1{,}88^2\,R_T^2} = 2{,}72\,g_T$$

Luego el peso de una persona de 70 kg en Marte es:

$$P_M = m\,g_M = 2{,}72\,m\,g_T = 2{,}72 \cdot 70 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 = 1\,865 \text{ N}$$

6. Un satélite gira alrededor de la Tierra en una órbita circular. Tras perder cierta energía, continúa girando en otra órbita circular cuyo radio es la mitad que el original. ¿Cuál es su nueva energía cinética (relativa a la energía cinética inicial)?

La energía de un cuerpo que se mantiene en una órbita cerrada o energía de enlace es $E_m = -\frac{G M_T m}{2a}$, donde a es el radio de la órbita. Si el satélite cambia a una órbita de radio $a/2$, la nueva energía de enlace será:

$$E_m = -\frac{G M_T m}{2a/2} = -\frac{G M_T m}{a}$$

es decir, el doble que en la órbita anterior.

7. La órbita de Venus, en su recorrido alrededor del Sol, es prácticamente circular. Calcula el trabajo desarrollado por la fuerza de atracción gravitatoria hacia el Sol a lo largo de media órbita. Si esa órbita, en lugar de ser circular, fuese elíptica, ¿cuál sería el trabajo de esa fuerza a lo largo de una órbita completa?

El trabajo que realiza la fuerza de gravedad al desplazar Venus en su órbita corresponde a la integral de la fuerza de atracción entre las dos masas, $F = G\,\frac{M_{\text{Sol}} M_{\text{Venus}}}{r_{S-V}^2}$, por el diferencial d$r$. En una trayectoria cerrada el trabajo realizado será nulo, dado que el campo gravitatorio es conservativo. Si solo tenemos en cuenta media órbita e integramos resulta:

$$W = \int_{2\pi r}^{\pi r} F\,\mathrm{d}r = -GMm \int_{2\pi r}^{\pi r} \frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r = GMm \left(\frac{1}{r}\right)_{2\pi r}^{\pi r} = G\,\frac{Mm}{2\pi r}$$

Si integrásemos para la otra media órbita el resultado sería $W = -G\,\frac{Mm}{2\pi r}$, de modo que en la órbita cerrada el trabajo sería nulo.

Bloque III. Interacción electromagnética

1. Dos pequeñas esferas iguales, de 5 N de peso cada una, cuelgan de un mismo punto fijo mediante hilos idénticos, de 10 cm de longitud y de masa despreciable. Si se suministra a cada una de estas esferas una carga eléctrica positiva de igual cuantía, se separan de manera que los hilos forman entre sí un ángulo de 60° en la posición de equilibrio.

Calcula:

***a)* El valor de la fuerza electrostática ejercida entre las cargas de las esferas en la posición de equilibrio.**

***b)* El valor de la carga de las esferas.**

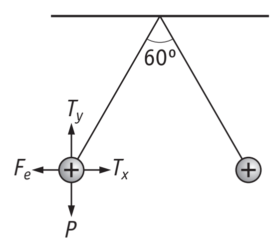
Datos: constante de la ley de Coulomb, $K = (4\pi\varepsilon_0)^{-1} = 9 \cdot 10^9$ N m² C⁻²

b) Las esferas están sometidas a las fuerzas gravitatoria y eléctrica. En el equilibrio la suma de las fuerzas es nula. Las cargas tienen el mismo signo, pues se repelen.

$T_x = F_e$

$T_y = P$

Según la figura observamos que:



T sen 30° $= qE$

T cos 30° $= mg$

de donde $\quad q = \frac{mg}{E}$ tg 30°

Por otra parte, el campo eléctrico es $E = K\,\frac{q}{d^2}$, donde d es la distancia entre cargas en la posición de equilibrio. Para obtener d, basta con conocer el ángulo entre los hilos y la longitud del mismo, $d = 0{,}1$ m.

Con esas dos ecuaciones, obtenemos:

$$q^2 = \frac{P}{K}\,d^2 \text{ tg } 30° = \frac{5 \text{ N}}{9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2} \cdot (0{,}1 \text{ m})^2 \cdot \text{tg } 30° \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; q = 1{,}79 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

a) La fuerza de repulsión entre cargas es $F = qE$, o:

$$F = K\,\frac{q_1 q_2}{d^2} = K\,\frac{q_2}{d^2} =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2 \cdot \frac{(1{,}79 \cdot 10^{-6} \text{ C})^2}{(0{,}1 \text{ m})^2} = 2{,}88 \text{ N}$$

2. ¿Puede existir diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos de una región en la cual la intensidad de campo eléctrico es nula? ¿Qué relación general existe entre el vector intensidad de campo eléctrico y el potencial eléctrico? Razona las respuestas.

Consultar Apartados 6.5 y 6.6 del libro del alumno.

3. *a)* ¿Qué diferencia de potencial debe existir entre dos puntos de un campo eléctrico uniforme para que un electrón que se mueva entre ellos, partiendo del reposo, adquiera una velocidad de 10^6 m s⁻¹? ¿Cuál será el valor del campo eléctrico si la distancia entre estos dos puntos es 5 cm?

***b)* ¿Qué energía cinética posee el electrón después de recorrer 3 cm desde el reposo?**

Datos: masa del electrón, $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; valor absoluto de la carga del electrón, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

a) El trabajo que realiza el campo se invierte en acelerar al electrón:

$W = \Delta E_c$, es decir, $q\,\Delta V = -\frac{1}{2}\,m\,(\Delta v)^2$

El electrón pierde energía potencial eléctrica y adquiere energía cinética, es decir, se acelera.

$$\Delta V = -\frac{1}{2\,q}\,m\,(\Delta v)^2$$

$$\Delta V = -\frac{1}{-2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot (10^6 - 0)\ \text{m/s} =$$

$= 2{,}8 \cdot 10–6$ V

Es decir, se produce un incremento del potencial.

El valor de campo eléctrico es:

$$E = \frac{V}{d} = \frac{2{,}8 \cdot 10^{-6}\ \text{V}}{0{,}05\ \text{m}} = 5{,}6 \cdot 10^{-5}\ \text{V/m}$$

b) Como el campo es constante, calculamos el valor del potencial a 3 cm del punto desde el que se libera el electrón, es decir, $V = E\,d$. El valor del potencial es:

$V = 5{,}6 \cdot 10^{-5}\ \text{V/m} \cdot 0{,}03\ \text{cm} = 1{,}68 \cdot 10^{-6}\ \text{V}$

Y la variación de energía cinética:

$$q\,\Delta V = -\frac{1}{2}\,m\,(\Delta v)^2$$

es decir:

$q\,V = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 1{,}68 \cdot 10^{-6}\ \text{V} = 2{,}7 \cdot 10^{-25}\ \text{J}$

Se podría calcular también la fuerza que ejerce el campo sobre el electrón y la aceleración a la que se somete al electrón y, mediante cálculos cinemáticos, hallar la velocidad y con ello la energía cinética.

4. Tenemos una carga de $4 \cdot 10^{-3}$ C en el origen y otra de $-4 \cdot 10^{-3}$ C en el punto $3\vec{u}_x - 4\vec{u}_y$ m. Determina:

a) El potencial eléctrico en el punto medio entre las cargas.

b) El campo eléctrico en dicho punto.

c) La energía potencial eléctrica de la carga en el origen.

Datos: $K = (4\pi\varepsilon_0)^{-1} = 9 \cdot 10^9\ \text{N}\,\text{m}^2\,\text{C}^{-2}$.

a) El punto medio entre las cargas es (3/2, 2), es decir, la distancia entre las cargas y el centro es de 2,5 m.

El potencial entre cargas en el punto medio será la suma de los potenciales que crean ambas cargas, es decir, cero, pues se anulan uno a otro.

$$V_1 = K\frac{q_1}{r} = 9 \cdot 10^9\ \text{N}\,\text{m}^2\,\text{C}^{-2} \cdot \frac{4\ .\ 10^{-3}\ \text{C}}{2{,}5\ \text{m}} = 14{,}4 \cdot 10^6\ \text{V}$$

$$V_2 = K\frac{q_2}{r} = 9 \cdot 10^9\ \text{N}\,\text{m}^2\,\text{C}^{-2} \cdot \frac{-4\ .\ 10^{-3}\ \text{C}}{2{,}5\ \text{m}} = -14{,}4 \cdot 10^6\ \text{V}$$

b) Por la misma razón, el campo eléctrico en el punto entre las dos cargas es nulo.

c) La energía potencial eléctrica de la carga en el origen es $E_p = K\frac{q_1 q_2}{r}$, donde r es la distancia entre cargas, es decir, 5 m.

$$E_p = 9 \cdot 10^9\ \text{N}\,\text{m}^2\,\text{C}^{-2} \cdot \frac{-4 \cdot 10^{-3}\ \text{C} \cdot 4 \cdot 10^{-3}\ \text{C}}{5\ \text{m}} = -2{,}88 \cdot 10^3\ \text{J}$$

la energía potencial es negativa, lo que significa que el campo ejerce una acción de atracción entre cargas.

5. Un electrón es lanzado con una velocidad de $2 \cdot 10^6\ \text{m}\,\text{s}^{-1}$ paralelamente a las líneas de un campo eléctrico uniforme de $5\,000\ \text{V}\,\text{m}^{-1}$. Determina:

a) La distancia que ha recorrido el electrón cuando su velocidad se ha reducido a $0{,}5 \cdot 10^6\ \text{m}\,\text{s}^{-1}$.

b) La variación de la energía potencial que ha experimentado el electrón en ese recorrido.

Datos: valor absoluto de la carga del electrón, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; masa del electrón, $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

a) La distancia que recorre el electrón es, según las ecuaciones de cinemática:

$$s = \frac{1}{2}\,\frac{v_f^2 - v_0^2}{a}$$

La fuerza a la que está sometido el electrón por la acción del campo es $F = \frac{E}{q}$. Como conocemos el campo, la carga y la masa del electrón, podemos hallar su aceleración:

$$a = \frac{F}{m_e} = \frac{E\,q}{m_e} = \frac{-5\,000\ \text{V/m} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}} = -8{,}8 \cdot 10^{14}\ \text{m/s}^2$$

es decir, el electrón se frena.

Así, la distancia recorrida por el electrón es:

$$s = \frac{1}{2} \cdot \frac{(0{,}5 \cdot 10^6\ \text{m/s})^2 - (2 \cdot 10^6\ \text{m/s})^2}{-8{,}8 \cdot 10^{14}\ \text{m/s}^2} = 2{,}1 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$$

b) La variación de la energía potencial es igual a $q\,\Delta V$. Como el campo es $E = V/d$, resulta que:

$$\Delta E_p = q\,\Delta V = -1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 5\,000\ \text{V/m} \cdot 2{,}1 \cdot 10^{-3}\ \text{m} =$$

$= -1{,}68 \cdot 10^{-18}$ J

6. Un protón penetra en una región donde existe un campo magnético uniforme. Explica qué tipo de trayectoria describirá el protón si su velocidad es:

a) Paralela al campo.

b) Perpendicular al campo.

c) ¿Qué sucede si el protón se abandona en reposo en el campo magnético?

d) ¿En qué cambiarían las respuestas anteriores si en lugar de un protón fuera un electrón?

Consultar el Apartado 6.6. de la Unidad 6 del libro del alumno.

7. Un conductor rectilíneo indefinido transporta una corriente de 10 A en el sentido positivo del eje *Oz*. Un protón, que se mueve a $2 \cdot 10^5\ \text{m}\,\text{s}^{-1}$, se encuentra a 50 cm del conductor.

Calcula el módulo de la fuerza ejercida sobre el protón si su velocidad:

a) **Es perpendicular al conductor y está dirigida hacia él.**

b) **Es paralela al conductor.**

c) **Es perpendicular a las direcciones definidas en los apartados *a)* y *b)*.**

d) **¿En qué casos, de los tres anteriores, el protón ve modificada su energía cinética?**

Datos: permeabilidad magnética del vacío, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A^2; valor absoluto de la carga del electrón, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

La fuerza a la que está sometido el protón es la del campo magnético que crea la corriente.

$F = q\,(\vec{v} \times \vec{B})$

La fuerza total dependerá de la orientación del campo respecto a la velocidad del protón.

a) si la velocidad del protón es perpendicular al campo la fuerza magnética será $F = qvB = qv\,\dfrac{\mu_0 I}{2\pi d}$.

Sustituyendo:

$$F = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 2 \cdot 10^5\ \text{m/s} \cdot \frac{\mu_0 \cdot 10\ \text{A}}{2\pi \cdot 0{,}5\ \text{m}} =$$

$$= 1{,}28 \cdot 10^{-19}\ \text{N}$$

b) Si la velocidad del protón es paralela al campo la fuerza magnética es nula.

c) A efectos de módulo es el mismo caso que el apartado *a)*, solo que la dirección de la fuerza es diferente.

Bloque IV. Óptica

1. Un rayo de luz que viaja por un medio con velocidad de $2{,}5 \cdot 10^8$ m/s incide con un ángulo de 30º, con respecto a la normal, sobre otro medio donde su velocidad es de $2 \cdot 10^8$ m/s. Calcula el ángulo de refracción.

De acuerdo con las leyes de Snell de la refracción, la relación entre el seno del ángulo de incidencia y el seno del ángulo de refracción es una constante característica de los dos medios:

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}$$

Al introducir en la ecuación los datos del enunciado, se obtiene el ángulo de refracción:

$$\frac{\text{sen } 30º}{\text{sen } r} = \frac{2{,}5 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{2 \cdot 10^8\ \text{m/s}};$$

$$\frac{\text{sen } 30º}{\text{sen } r} = 1{,}25; \qquad \text{sen } r = \frac{\text{sen } 30º}{1{,}25} = 0{,}4$$

$$r = \text{arc sen } 0{,}4 = 23{,}6º$$

La velocidad de la luz disminuye cuando pasa al segundo medio, es decir, pasa de un medio menos refringente a otro más refringente; en consecuencia, el rayo refractado se acerca a la normal: el ángulo de refracción es menor que el ángulo de incidencia.

2. Un haz de luz blanca incide sobre una lámina de vidrio de grosor d = 1 cm con un ángulo de incidencia de 60º. Determina la altura respecto al punto O', de los puntos por los que emergen la luz roja y la luz violeta. Datos: $n_R = 1{,}4$; $n_V = 1{,}6$.

La Ley de Snell de la refracción permite calcular los ángulos de refracción en el vidrio de cada uno de los rayos.

El ángulo de refracción para el rayo rojo es:

n_a sen 60º = n_R sen r_R

$$\text{sen } r_R = \frac{n_a \text{ sen } 60º}{n_R} = \frac{1 \cdot \text{sen } 60º}{1{,}4} = 0{,}619$$

r_R arc sen 0,619 = 38,2º

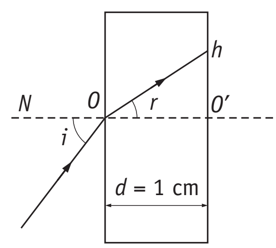
El ángulo de refracción para el rayo violeta es el siguiente:

n_a sen 60º = n_V sen r_V

$$\text{sen } r_V = \frac{n_a \text{ sen } 60º}{n_V} = \frac{1 \cdot \text{sen } 60º}{1{,}6} = 0{,}541$$

r_V arc sen 0,541 = 32,8º

En el triángulo que forman la normal, el rayo refractado y la cara posterior de la lámina (ver figura), podemos calcular la altura sobre el punto O'.



Para el rayo rojo:

$$\text{tg } r_R = \frac{h_R}{d}; \qquad h_R = d \text{ tg } r_R = 1\ \text{cm} \cdot \text{tg } 38{,}2º = 0{,}79\ \text{cm}$$

Para el rayo violeta:

$$\text{tg } r_V = \frac{h_V}{d}; \qquad h_V = d \text{ tg } r_V = 1\ \text{cm} \cdot \text{tg } 32{,}8º = 0{,}64\ \text{cm}$$

Como el índice de refracción del color rojo es menor que el del color violeta, el rayo rojo se acerca menos a la normal, es decir, se desvía menos que el rayo violeta.

3. Un sistema óptico está formado por dos lentes: la primera es convergente y con distancia focal de 10 cm; la segunda, situada a 50 cm de distancia de la primera, es divergente y con 15 cm de distancia focal. Un objeto de tamaño 5 cm se coloca a una distancia de 20 cm delante de la lente convergente:

a) **Obtenga gráficamente mediante el trazado de rayos la imagen que produce el sistema óptico.**

b) **Calcule la posición de la imagen producida por la primera lente.**

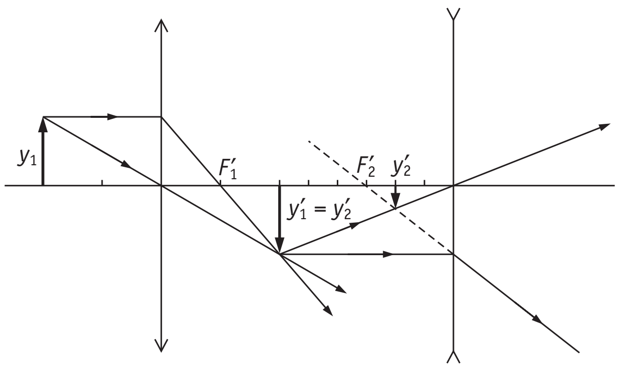
c) **Calcule la posición de la imagen producida por el sistema óptico.**

d) **¿Cuál es el tamaño y la naturaleza de la imagen formada por el sistema óptico?**

De acuerdo con el enunciado, disponemos de los siguientes datos:

$f'_1 = 10$ cm; $\quad f'_2 = -15$ cm; $\quad y_1 = 5$ cm; $\quad s_1 = -20$ cm

a) La imagen gráfica se obtiene trazando los rayos de trayectorias conocidas (Epígrafe 10.6). La imagen formada por la primera lente actúa como objeto de la segunda lente.



La imagen final es virtual, invertida y de menor tamaño que el objeto.

b) La posición de la imagen producida por la primera lente se obtiene a partir de la ecuación fundamental de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s'_1} - \frac{1}{s_1} = \frac{1}{f'_1}; \qquad \frac{1}{s'_1} - \frac{1}{-20 \text{ cm}} = \frac{1}{10 \text{ cm}}; \qquad s'_1 = 20 \text{ cm}$$

Como la distancia imagen es positiva, esta imagen es real.

c) La imagen producida por la primera lente actúa como objeto en la segunda lente. Como la imagen se forma 20 cm detrás de la primera lente, y la distancia que separa ambas lentes es de 50 cm, la distancia objeto para la segunda lente es: $s_2 = -30$ cm.

La imagen final se obtiene aplicando la ecuación fundamental de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s'_2} - \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f'_2}; \qquad \frac{1}{s'_2} - \frac{1}{-30 \text{ cm}} = \frac{1}{-15 \text{ cm}}; \qquad s'_2 = -10 \text{ cm}$$

Como la distancia imagen es negativa, la imagen es virtual, se forma a la izquierda de la segunda lente y a 10 cm de ella.

d) El tamaño de la imagen se obtiene a partir de la ecuación del aumento lateral. Para la primera lente se cumple:

$$M_L = \frac{y'_1}{y_1} = \frac{s'_1}{s_1}; \qquad y'_1 = \frac{y_1 s'_1}{s_1} = \frac{5 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm}}{-20 \text{ cm}} = -5 \text{ cm}$$

Para la segunda lente: $y_2 = y'_1$

$$M_L = \frac{y'_2}{y_2} = \frac{s'_2}{s_2}; \qquad y'_2 = \frac{y_2 s'_2}{s_2} = \frac{-5 \text{ cm} \cdot (-10 \text{ cm})}{-20 \text{ cm}} = -1{,}7 \text{ cm}$$

El signo negativo indica que la imagen es invertida, además, como hemos visto es virtual, y tiene menor tamaño que el objeto.

4. Una lente convergente forma una imagen derecha y de tamaño doble de un objeto real. Si la imagen queda a 60 cm de la lente, ¿cuál es la distancia del objeto a la lente y la distancia focal de la lente?

Como la imagen es derecha, también es virtual y la distancia imagen negativa:

$s' = -60$ cm

Como la imagen es de tamaño doble que el objeto, el aumento lateral es igual a 2:

$$M_L = \frac{s'}{s} = 2; \qquad s = \frac{s'}{2} = \frac{-60 \text{ cm}}{2} = -30 \text{ cm}$$

El objeto está situado 30 cm delante de la lente.

La ecuación fundamental de las lentes delgadas nos permite calcular la distancia focal de la lente:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}; \qquad \frac{1}{-60 \text{ cm}} - \frac{1}{-30 \text{ cm}} = \frac{1}{f'}; \qquad f' = 60 \text{ cm}$$

De estos resultados deducimos que la imagen se forma en el foco imagen y el objeto está situado en el punto medio de la distancia focal.

5. La potencia de una lente es de 5 dioptrías.

a) **Si a 10 cm a su izquierda se coloca un objeto de 2 mm de altura, hallar la posición y el tamaño de la imagen.**

b) **Si dicha lente es de vidrio (*n* = 1,5) y una de sus caras tiene un radio de curvatura de 10 cm, ¿cuál es el radio de curvatura de la otra? ¿De qué tipo de lente se trata?**

Como la potencia de la lente es positiva, se trata de una lente convergente, cuya distancia focal imagen es:

$$f' = \frac{1}{P} = \frac{1}{5 \text{ m}^{-1}} = 0{,}2 \text{ m}$$

a) Según el enunciado, disponemos de los siguientes datos:

$s = -10$ cm; $\quad y = 2$ mm

La posición de la imagen se obtiene a partir de la ecuación fundamental de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}; \qquad \frac{1}{s'} - \frac{1}{-10 \text{ cm}} = \frac{1}{20 \text{ cm}}; \qquad s' = -20 \text{ cm}$$

La imagen se forma 20 cm delante de la lente, por tanto, es virtual.

El tamaño de la imagen se obtiene a partir de la ecuación del aumento lateral:

$$M_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$$

$$y' = \frac{y s'}{s} = \frac{0{,}2 \text{ cm} \cdot (-20 \text{ cm})}{-10 \text{ cm}} = 0{,}4 \text{ cm} = 4 \text{ cm}$$

Como el aumento es positivo, la imagen es derecha.

b) Sabemos que la lente es convergente, pero veamos qué tipo de lente convergente es. El radio de curvatura de la otra cara de la lente lo obtenemos a partir de la ecuación de la distancia focal imagen:

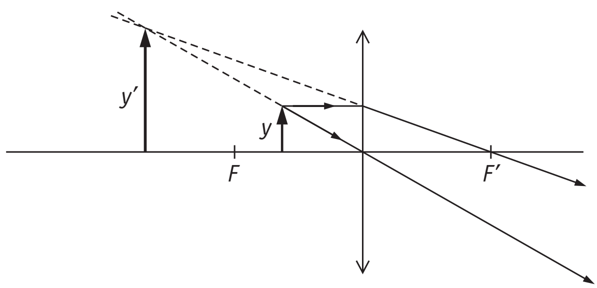
$$P = \frac{1}{f'} = (n - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right);$$

$$5\ \text{m}^{-1} = (1{,}5 - 1)\left(\frac{1}{0{,}1\ \text{m}} - \frac{1}{R_2}\right); \qquad R_2 = \infty$$

Como el radio de esta cara es infinito, la cara es plana y la lente es plano convexa.

6. **Para una lente convergente, explica si hay alguna posición del objeto para la que la imagen sea virtual y derecha, y otra para la que la imagen sea real, invertida y del mismo tamaño que el objeto.**

En las lentes convergentes sólo se obtienen imágenes virtuales cuando el objeto se sitúa dentro de la distancia focal, es decir, entre el foco y la lente



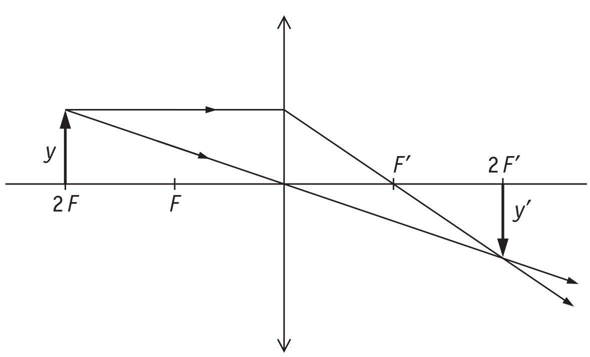
Si la imagen es real, invertida y del mismo tamaño que el objeto, el aumento lateral es:

$$M_L = \frac{s'}{s} = -1; \qquad s' = -s$$

La ecuación fundamental de las lentes delgadas permite calcular la posición del objeto para que la imagen tenga esas características:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}; \qquad \frac{1}{-s} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}; \qquad \frac{-2}{s} = \frac{1}{f'}; \qquad s = -2f'$$

Por tanto, el objeto debe situarse a una distancia de la lente igual dos veces la distancia focal.



Bloque V. Introducción a la física moderna

1. **Una muestra de material radiactivo posee una actividad de 115 Bq inmediatamente después de ser extraída del reactor donde se formó. Su actividad 2 horas después resulta ser 85,2 Bq.**

   ***a)* Calcule el periodo de semidesintegración de la muestra.**

   ***b)* ¿Cuántos núcleos radiactivos existían inicialmente en la muestra?**

   Dato: 1 Bq = 1 desintegración/segundo.

   a) Previamente calculamos la constante de desintegración λ:

$$A = A_0 e^{-\lambda t}; \qquad \text{L}\left(\frac{A}{A_0}\right) = -\lambda t;$$

$$\lambda = \frac{\text{L}\left(\frac{A}{A_0}\right)}{t} = -\frac{\text{L}\left(\frac{85{,}2\ \text{Bq}}{115\ \text{Bq}}\right)}{2\ \text{horas}} = 0{,}150\ \text{horas}^{-1}$$

   Ya podemos calcular el periodo de semidesintegración:

$$T_{1/2} = \frac{\text{L}\ 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{0{,}150\ \text{horas}^{-1}} = 4{,}62\ \text{horas}$$

   b) El número de núcleos radiactivos que existían inicialmente se obtiene a partir del valor de la actividad inicial:

$$A_0 = \frac{115\ \text{desintegraciones}}{1s} \cdot \frac{3\,600\ \text{s}}{1\ \text{hora}} =$$

$$= 4{,}14 \cdot 10^5\ \text{desintegraciones/hora}$$

$$A_0 = \lambda N_0$$

$$N_0 = \frac{A_0}{\lambda} = \frac{4{,}14 \cdot 10^5\ \text{desintegraciones/hora}}{0{,}150\ \text{horas}^{-1}} =$$

$$= 2{,}76 \cdot 10^6\ \text{desintegraciones}$$

   Como cada núcleo produce una desintegración, en la muestra inicial existían $2{,}76 \cdot 10^6$ núcleos radiactivos.

2. **El isótopo de fósforo $^{32}_{15}P$, cuya masa es 31,9739 u, se transforma por emisión beta en cierto isótopo estable de azufre (Z = 16), de masa 31,9721 u. El proceso, cuyo periodo de semidesintegración es 14,28 días, está acompañado por la liberación de cierta cantidad de energía en forma de radiación electromagnética. Con estos datos:**

   ***a)* Escriba la reacción nuclear y calcule la energía y la frecuencia de la radiación emitida.**

   ***b)* Calcule la fracción de átomos de fósforo desintegrados al cabo de 48 horas para una muestra formada inicialmente solo por átomos de fósforo $^{32}_{15}P$.**

   Datos: $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Js; 1 eV = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J; $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg; 1 u = $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg.

   a) La reacción nuclear es la siguiente:

$$^{32}_{15}\text{P} \longrightarrow\ ^{32}_{16}\text{S} +\ ^{0}_{-1}\text{X}$$

Para que se conserven el número atómico y el número másico en la reacción la partícula *X* debe ser un electrón. Un neutrón del núcleo se convierte en un protón, un electrón y una partícula, sin carga y sin masa en reposo, llamada antineutrino $\overline{\nu}_e$. Por tanto, la reacción completa es:

$${}^{32}_{15}\mathrm{P} \rightarrow {}^{32}_{16}\mathrm{S} + {}^{0}_{-1}e + \overline{\nu}_e$$

A partir de las masas atómicas, calculamos la variación de masa de la reacción:

$$\Delta m = m_s + m_e - m_p$$

La masa del electrón es:

$$m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg} \cdot \frac{1\ \mathrm{u}}{1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}} = 0{,}00055\ \mathrm{u}$$

$$\Delta m = 31{,}9721\ \mathrm{u} + 0{,}00055\ \mathrm{u} - 31{,}9739\ \mathrm{u} = -1{,}25 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{u}$$

Esta pérdida de masa en la reacción se convierte en energía que se libera en el proceso:

$$E = \Delta m\, c^2 =$$
$$= 1{,}25 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{u} \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg/u} \cdot (3 \cdot 10^8\ \mathrm{m\,s^{-1}})^2 =$$
$$= 1{,}87 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{J}$$

La frecuencia de la radiación emitida es:

$$E = hf; \qquad f = \frac{E}{h} = \frac{1{,}87 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{J}}{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\,s}} = 2{,}82 \cdot 10^{20}\ \mathrm{Hz}$$

b) Calculamos la constante de desintegración λ a partir del periodo de semidesintegración:

$$\lambda = \frac{\mathrm{L}\ 2}{T_{1/2}} = \frac{0{,}693}{(14{,}28 \cdot 24)\ \mathrm{horas}} = 2{,}02 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{horas^{-1}}$$

Ahora calculamos la fracción de átomos desintegrados a partir de la ecuación fundamental de la radiactividad:

$$N = N_0\, \mathrm{e}^{-\lambda t}$$
$$\mathrm{L}\left(\frac{N}{N_0}\right) = -\lambda t = -2{,}02 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{horas^{-1}} \cdot 48\ \mathrm{horas} = -0{,}097$$
$$\frac{N}{N_0} = 0{,}91; \qquad N = 0{,}91\, N_0$$

Como quedan sin desintegrar el 91% de los núcleos, se han desintegrado el 9% de los átomos de fósforo.

3. Determina el número másico y el número atómico del isótopo que resultará del ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$ después de emitir tres partículas alfa y dos beta.

El número másico es $A = 238$. El nuevo número másico será:

$A' = 238 - 3 \cdot 4 - 2 \cdot 0 = 226.$

El número atómico es $Z = 92$. El nuevo número atómico será:

$Z' = 92 - 3 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) = 88.$

Así, el resultado de la emisión de 3α y 2β es ${}^{226}_{88}\mathrm{Ra}$.

4. En una experiencia del efecto fotoeléctrico, la función de trabajo de un material es W_e, la constante de Planck *h*, la frecuencia incidente *f* y la velocidad de la luz *c*.

La longitud de onda umbral para la emisión de fotoelectrones es:

a) $\dfrac{W_e}{hf}$; ***b)*** $\dfrac{W_e}{h}$; ***c)*** $\dfrac{c}{W_e}$; ***d)*** $\dfrac{hc}{W}$

Elige la opción que creas correcta y razónala brevemente.

Consultar Apartado 12.3 de la Unidad 12 del libro del alumno.