FÍSICA 2º BACHILLERATO. EXAMEN DEL TEMA 2. INTERACCIÓN GRAVITATORIA. 12-12-06
EXAMEN RESUELTO

1. a) Potencial gravitatorio. Características.

b) Una partícula de masa m, situada en un punto A, se mueve en línea recta hacia otro punto B, en una región en la que existe un campo gravitatorio creado por una masa M. Si el valor del potencial gravitatorio en el punto B es mayor que en el punto A, razonar si la partícula se acerca o se aleja de M.

2. a) Explique el concepto de velocidad de escape de un planeta, deduciendo su expresión.
b) Explique cómo es posible conocer las masas de los planetas

3. Un satélite de 300 kg describe órbitas circulares en torno al planeta Venus a una altura de 1000 km sobre su superficie.
a) Calcule la velocidad orbital del satélite, deduciendo su expresión
b) Calcule razonadamente la velocidad a la que habría que lanzar un cuerpo desde la superficie del planeta para que alcance esa altura. Desprecie el rozamiento con la atmósfera.
(Datos: R_V = 6050 km; $g_{0\,V}$ = 8,8 ms^{-2})

4. Dos partículas de masas M_1 = 2 kg y M_2 = 5 kg están situadas en los puntos P_1: (0,2) m y P_2: (1,0) m, respectivamente. Calcule:
a) Intensidad del campo gravitatorio y el potencial gravitatorio en el punto P: (1,2) m
b) Trabajo necesario para mover una partícula de 100 g desde P hasta alejarlo una distancia infinita.

---

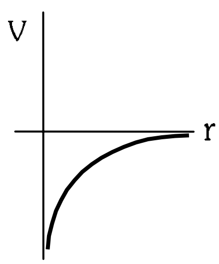
a)

Potencial gravitatorio (V): Energía potencial gravitatoria almacenada por unidad de masa que se coloque en un punto del campo gravitatorio.
Unidades: J/kg Se relaciona con la energía potencial mediante la relación $Epg = m \cdot V$

El potencial gravitatorio creado por una masa puntual M tiene la expresión (eligiendo el origen para $r \to \infty$).

$$V = -G \cdot \frac{M}{r}$$

A esta expresión corresponde la gráfica



Relación entre el campo gravitatorio y el potencial gravitatorio:

$$\Delta V = -\int_A^B \vec{g} \cdot \vec{dr}$$

El campo gravitatorio nos indica la dirección y sentido en que el potencial gravitatorio disminuye más rapidamente.

b)
En la gráfica del apartado anterior podemos ver que el potencial aumenta con la distancia a la masa M. Por lo tanto, si el potencial es mayor en B que en A, el punto B está más alejado de M que A. La partícula se aleja.

2.

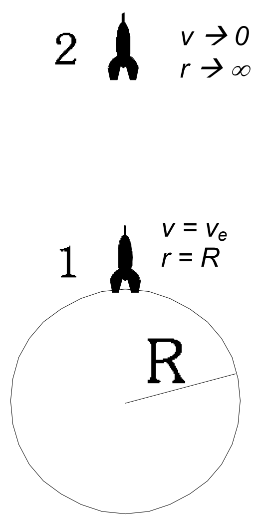
a)
La velocidad de escape se define como la velocidad a la que habría que lanzar un cuerpo desde la superficie del planeta para que escapara de su atracción gravitatoria, alejándose indefinidamente. En este cálculo se desprecia el rozamiento con la atmósfera.

En primer lugar tenemos en cuenta que, al no tener en cuenta el rozamiento, la única fuerza que va a actuar sobre el movimiento del cohete será la gravitatoria, que es conservativa. Por lo tanto, la energía mecánica del cohete se mantendrá constante.

Datos: M, R: masa y radio del planeta
m: masa del proyectil

<u>Sistemas de referencia</u>: mediremos las distancias desde el centro del planeta.

El origen de energía potencial gravitatoria lo colocamos a una distancia infinita del centro planetario, por lo que la expresión usada para la Epg será $Ep_g = -\frac{G \cdot M \cdot m}{R}$



Consideraremos dos situaciones:

<u>Inicial:</u> Lanzamiento del cohete desde la superficie terrestre con velocidad v_e.

$$Ec_1 = \tfrac{1}{2} m v_e^2 \qquad Ep_{g1} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{R}$$

$$E_{M1} = Ec + Ep_g = \tfrac{1}{2} m v_e^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{R}$$

<u>Final:</u> el cohete se aleja indefinidamente. En el límite cuando la distancia r tiende a infinito, la velocidad (y la Ec) tiende a cero, al igual que la energía potencial, ya que el origen de Ep está colocado en el infinito.

$$E_{M2} = \lim_{r \to \infty} E_M = \lim_{r \to \infty} (Ec + Ep_g) = 0$$

Aplicando la conservación de la energía mecánica:

$$E_{M1} = E_{M1} \Rightarrow \tfrac{1}{2} m v_e^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{R} = 0 \Rightarrow \tfrac{1}{2} \cancel{m} v_e^2 = \frac{G \cdot M \cdot \cancel{m}}{R} \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$ Puesto en función de la gravedad en superficie $v_e = \sqrt{2 \cdot g_0 \cdot R}$

Nótese que la velocidad de escape desde la superficie de un planeta sólo depende de las características (masa, tamaño) del planeta. No importa la masa del proyectil. (Evidentemente, para acelerar un proyectil de más masa hasta esa velocidad se necesitará un mayor esfuerzo, pero eso es otra cuestión)

También puede hablarse de velocidad de escape desde una cierta altura h sobre la superficie. El concepto es el mismo, solo que en lugar de R pondremos R+h.

b) Explique cómo es posible conocer las masas de los planetas

Podemos conocer la masa de un planeta si tiene algún satélite describiendo órbitas a su alrededor. Conociendo el radio de la órbita y el periodo de revolución, podemos aplicar la tercera ley de Kepler

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$ Y a partir de ahí calcular la masa M del planeta.

También podemos calcular la masa del planeta conociendo su gravedad superficial, $g_0 = G \cdot \frac{M}{R^2}$

3.

a)

La velocidad orbital es la velocidad que lleva el satélite en su órbita. Para calcularla, tendremos en cuenta que la única fuerza que actúa sobre el satélite es la gravitatoria.

También, al tratarse de un movimiento circular, sólo tendrá aceleración normal.
Aplicando la segunda ley de Newton:

$$F_g = m \cdot a_n = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

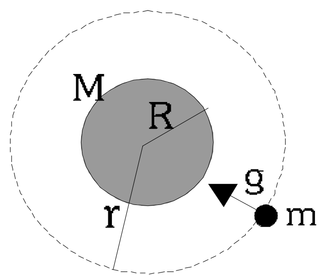
Igualando ambas expresiones: $$\frac{G \cdot M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \cdot \frac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow v_{orb} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Necesitamos conocer la masa del planeta Venus y la distancia r a la que se encuentra el satélite de su centro. Para ello usamos los datos de g_0 y la altura.

$$g_{0V} = \frac{GM}{R_V^{\ 2}} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{g_{0V} \cdot R_V^{\ 2}}{G} = 4{,}83 \cdot 10^{24}\ kg$$

$r = R + h = 7050\ km = 7{,}05 \cdot 10^6\ m$

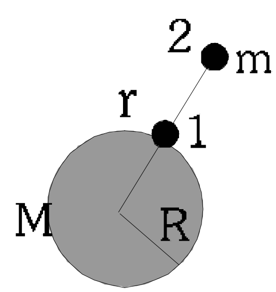
Por lo tanto, $v_{orb} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} = 7297\ m/s$



b)

Resolvemos esta cuestión aplicando la conservación de la energía mecánica al movimiento del cuerpo. Tras el choque, si no tenemos en cuenta el rozamiento con la atmósfera, la única fuerza que actúa sobre él es la gravitatoria, que es conservativa. Por lo tanto, la energía mecánica ($E_M = Ec+Epg$) se mantiene constante. Esto nos permite calcular la velocidad con la que hay que lanzar el cuerpo para que alcance la altura a la que se encuentra el satélite.

Escogemos el origen de energía potencial a una distancia infinita del planeta. Esto hace que la expresión usada para la energía potencial gravitatoria sea: $Epg = -\frac{GMm}{r}$



Situación inicial: $E_{M2} = Ec_2 + Epg_2 = \frac{1}{2} m v_2^{\ 2} - \frac{GMm}{r_2} = 0 - \frac{GMm}{r}$

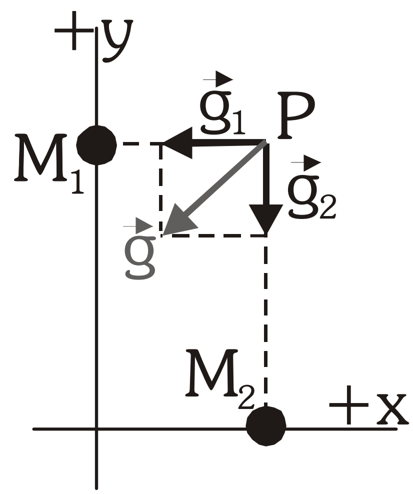
Situación final: $E_{M1} = Ec_1 + Epg_1 = \frac{1}{2} m v_1^{\ 2} - \frac{GMm}{R_V}$

La energía mecánica se mantiene constante: $\frac{1}{2} m v_1^{\ 2} - \frac{GMm}{R_V} = -\frac{GMm}{r}$

Con lo que $v_1 = 3886{,}7\ m/s$. Con esa velocidad habría que lanzar el cuerpo.

4.

a)



Campo gravitatorio: Fuerza gravitatoria que se ejerce por unidad de masa sobre un cuerpo situado en un punto del campo gravitatorio. En el punto A influyen las dos masas puntuales, por lo que aplicamos el principio de superposición. $\vec{g}_P = \vec{g}_{1P} + \vec{g}_{2P}$ El campo producido por la masa 1:

$M_1 = 2\ kg$; $\vec{r}_1 = (1,2) - (0,2) = (1,0)m$;

$r_1 = 1\ m$; $\vec{u}_{r1} = \frac{\vec{r}_1}{r_1} = \vec{j}$

$$\vec{g}_{1P} = -\frac{GM_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_{r1} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2}{1}\vec{j} \quad N/kg = -1{,}334 \cdot 10^{-10}\,\vec{j}\ N/kg$$

Del mismo modo calculamos el campo producido por la masa 2 en P:

$M_2 = 5\ kg$; $\vec{r}_2 = (1,2) - (1,0) = (0,2)m$;

$r_2 = 2\ m$; $\vec{u}_{r2} = \frac{\vec{r}_2}{r_2} = \vec{i}$

$$\vec{g}_{2P} = -\frac{GM_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_{r2} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5}{4}\vec{i}\ N/kg = -8{,}34 \cdot 10^{-11}\vec{i}\ N/kg$$

con lo que $\vec{g}_P = \vec{g}_{1P} + \vec{g}_{2P} = -8{,}34 \cdot 10^{-11}\ \vec{i} - 1{,}334 \cdot 10^{-10}\,\vec{j}\ N/kg$

Para calcular el potencial (energía almacenada por unida de masa), aplicamos el principio de superposición:

$V_P = V_{1P} + V_{2P}$ Escogiendo el nivel cero de potencial en el infinito

$$V_P = -\frac{GM_1}{r_{1P}} - \frac{GM_2}{r_{2P}} = -3 \cdot 10^{-10}\,J/kg$$

b)

Calculamos el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria en ese desplazamiento.

$$W_{Fg} = -\Delta Epg = -(Epg_\infty - Epg_P) = Epg_P - Epg_\infty = m \cdot V_P - m \cdot V_\infty$$

Teniendo en cuenta el origen de potencial escogido, el potencial a una distancia infinita será nulo. Así

$$W_{Fg} = m \cdot V_P = 0{,}1kg \cdot (-3 \cdot 10^{-10}\,\tfrac{J}{kg}) = -3 \cdot 10^{-11}\,J$$

El trabajo que realiza la fuerza gravitatoria es negativo (la fuerza gravitatoria se opone al desplazamiento). Eso significa que debemos realizar exteriormente un trabajo como mínimo igual y de signo contrario para desplazarlo. Así $W_{ext} \geq 3 \cdot 10^{-11}$ J